

구형 중공단면을 갖는 원호아치의 자유진동 해석

Free Vibration Analysis of Circular Arches with Rectangular Hollow Section

이 태 은[†] · 이 병 구* · 박 광 규** · 윤 희 민***

Tae Eun Lee, Byoung Koo Lee, Kwang Kyou Park and Hee Min Yoon

Key Words : free vibration(자유진동), circular arches(원호아치), rectangular hollow section(구형 중공단면), natural frequency(고유진동수), shape ratio(형상비), thickness ratio(두께비)

ABSTRACT

The differential equations governing free vibrations of the elastic arches with rectangular hollow section are derived in polar coordinates, in which the effect of rotatory inertia is included. Natural frequencies is computed numerically for circular arches with both clamped ends and both hinged ends. The lowest four natural frequency parameters are reported, with the rotatory inertia, as functions of three non-dimensional system parameters: the breadth ratio, the thickness ratio and the shape ratio.

1. 서 론

아치는 축력이 거동을 지배하므로 구조적으로 매우 이상적인 뿐만 아니라 그 외관이 수려하여 예부터 교량 등 각종 구조물에 많이 이용되었다. 특히 재료공학의 발달로 인한 강재의 고강도화 및 경량화는 시간길이가 긴 아치교의 가설을 가능하게 하여 자연경관과 조화를 이루는 아름다운 아치교가 등장하게 되었다.

아치교의 거동에 있어서 진동이 미치는 영향은 상당히 크기 때문에 아치구조의 동적거동에 대한 종합적인 검토가 필수적으로 요구되고 있다.⁽¹⁾ 비교적 세장한 아치 구조에 풍압이 가해지는 경우 와류에 의하여 진동이 발생할 수 있으며, 와류에 의한 진동이 구조물의 고유진동수와 유사해지면 다소 큰 진폭의 진동이 발생하게 된다. 이러한 진동은 반복적으로 큰 응력을 발생시켜 피로파괴의 원인이 되거나 좌굴에 대한 안전도가 저하하여 종종 구조물의 안정성에 문제를 일으키기도 한다. 아치교를 통행하는 차량에 의해 발생하는 동하중도 이와 유사한 문제점을 야기할 수 있다.

아치의 자유진동해석에 관한 연구는 많은 연구자들에 의해 진행되어 왔다.^(2,3) 최근에는 아치의 구조적 안정성을

향상시킬 수 있는 단면형상에 대한 연구가 활발히 수행되고 있으며,^(4,5) 대표적인 예로 아치의 단면을 중공단면으로 하는 경우 폭과 두께를 적절히 조절함으로써 동일한 단면적에서 보다 큰 동적안정성을 갖는 단면을 채택할 수 있다.

본 연구에서는 이론적 전개가 용이한 원호아치를 대상 아치의 선형으로 채택하였으며, 아치의 단면은 현장에서 가장 많이 이용되는 구형 중공단면을 대상으로 하였다. 구형 중공단면을 갖는 원호아치의 자유진동특성을 고찰함으로써 아치의 진동에 대한 이론을 확장하고, 실제 아치구조물의 설계 및 공용중인 아치구조의 유지관리에 더욱 정확한 동적해석자료를 제공하는데 본 연구의 목적이 있다.

2. 단면의 정의

Fig. 1 그림 1은 본 연구에서 채택한 구형 중공단면을 나타낸 것으로, b 는 단면의 폭, d 는 단면의 깊이, t_1 은 수직판의 두께, t_2 는 수평판의 두께이다.

본 연구에서는 구형단면의 형상을 정의하기 위하여 구

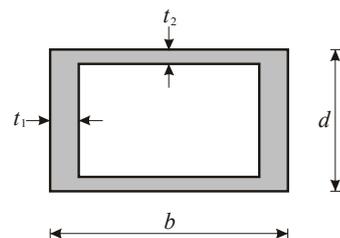


Fig 1. Rectangular hollow section

† 교신저자 ; 정회원, 원광대학교 토목환경공학과
E-mail : telee@wonkwang.ac.kr
Tel : (063) 850-6718, Fax : (063) 857-7204

* 정회원, 원광대학교 토목환경공학과

** 정회원, 대전대학교 토목공학과

*** 학생회원, 원광대학교 대학원 토목환경공학과

형단면의 폭에 대한 깊이의 비를 다음과 같이 형상비 k 로 정의하였다.

$$k = \frac{d}{b} \quad (1)$$

또한 중공단면의 형상을 정의하기 위하여 단면폭에 대한 수직판의 두께의 비와 단면의 깊이에 대한 수평판의 두께의 비를 각각 n_1 , n_2 로 정의하였다.

$$n_1 = \frac{t_1}{b}, \quad n_2 = \frac{t_2}{d} \quad (2a,2b)$$

위의 식들을 이용하면 구형 중공단면의 단면적 A 와 단면2차모멘트 I 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A = A_1(1 - c_1 c_2) \quad (3)$$

$$I = I_1(1 - c_1 c_2^3) \quad (4)$$

위의 식들에서 A_1 및 I_1 은 속이 완전히 채워진 중실단면의 단면적과 단면2차모멘트로 다음의 식 (5), (6)와 같고, 계수 c_1 , c_2 는 식 (7)과 같다.

$$A_1 = kb^2, \quad I_1 = \frac{k^3 b^4}{12} \quad (5,6)$$

$$c_1 = 1 - 2n_1, \quad c_2 = 1 - 2n_2 \quad (7a,7b)$$

3. 지배미분방정식

Fig. 2는 지간길이 l , 높이 h , 반경 ρ 인 원호아치의 기하학적 형상을 나타낸 그림이다. 이 그림에서 (x, y) 는 아치의 좌단을 원점으로 하는 직교좌표계이며, v , w 및 Ψ 는 각각 접선방향 변위, 곡률중심방향 변위 및 단면 회전각을 나타낸다. ϕ , ϕ_L 및 ϕ_R 은 각각 아치축상 임의점과 좌단 및 우단에서 x 축과 곡률중심방향이 이루는 각도이며, α 는 중심각이다.

Fig. 2에 나타낸 원호아치의 선형식은 다음 식과 같다.

$$y = \rho \sin \phi + h - \rho \quad (8)$$

Fig. 3은 아치의 미소요소에 작용하는 합응력과 관성력

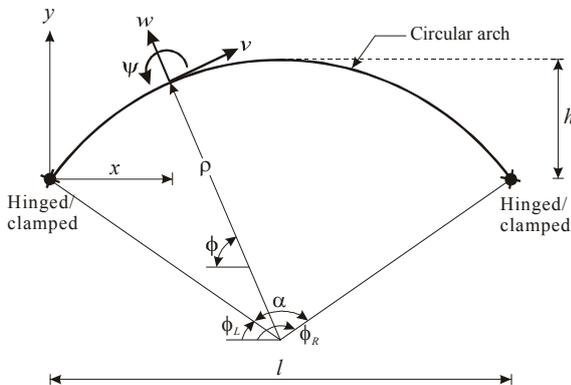


Fig 2. Arch geometry

을 나타낸 것이며, 이 힘들의 동적 평형방정식을 세우면 다음의 식들과 같다.

$$\frac{dN}{d\phi} + Q + \rho F_v = 0, \quad \frac{dQ}{d\phi} - N + \rho F_w = 0 \quad (9,10)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dM}{d\phi} - Q - C_\Psi = 0 \quad (11)$$

변위에 의해 발생하는 합응력 및 단면회전각은 다음의 식들과 같이 나타낼 수 있다.⁽⁶⁾

$$N = \frac{EA}{\rho} \left[(v' + w) + \frac{r^2}{\rho^2} (w'' + w) \right] \quad (12)$$

$$M = \frac{EA r^2}{\rho} (w'' + w), \quad \Psi = \frac{1}{\rho} (w' - v) \quad (13,14)$$

여기서 $(\prime) = d/d\phi$ 이며, E 는 탄성계수, A 는 단면적, r 은 단면회전반경 ($r = \sqrt{I/A}$)이다.

아치의 진동을 조화진동으로 가정하면 곡률중심방향 관성력 F_w , 접선방향 관성력 F_v 및 회전관성우력 C_Ψ 는 다음 식들과 같이 나타낼 수 있다.⁽⁷⁾

$$F_w = m\omega_i^2 w, \quad F_v = m\omega_i^2 v, \quad C_\Psi = m\omega_i^2 \frac{r^2}{\rho} (w' - v) \quad (15-17)$$

여기서 m 은 부재재료의 단위길이당 질량이며, ω_i 는 고유각진동수(rad/sec), i 는 모드번호이다.

식 (13)으로부터 $dM/d\phi$ 를 구하고, 이를 식 (17)과 함께 식 (11)에 대입하여 전단력 Q 를 구하면 다음 식과 같다.

$$Q = -\frac{EA r^2}{\rho^3} \left[(w''' + w') - \frac{2\rho'}{\rho} (w'' + w) \right] - \frac{m\omega_i^2 r^2}{\rho} (w' - v) \quad (18)$$

본 연구에서는 수치해석 과정의 효율성을 높이기 위하여 다음과 같은 무차원 변수들을 도입하였다.

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{l}, \quad \delta = \frac{w}{l}, \quad \lambda = \frac{v}{l} \quad (19-22)$$

$$f = \frac{h}{l}, \quad g = \frac{b}{l}, \quad \zeta = \frac{\rho}{l}, \quad s = \frac{l}{r} \quad (23-26)$$

$$C_i = \pi^4 \omega_i l \sqrt{\frac{m}{EA}}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (27)$$

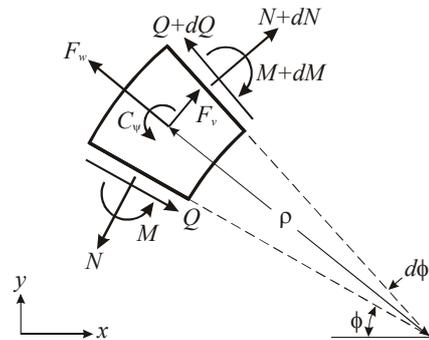


Fig 3. Loads on an arch element

위의 식들에서 (ξ, η) 는 무차원 직교좌표계이며, δ, λ, f, g 는 w, v, h, d 를 지간길이 l 로 정규화 한 것이고, ζ 는 무차원 곡률반경, s 는 세장비, C_i 는 무차원 고유진동수이다.

식 (8)을 위의 무차원 변수들을 이용하면 다음과 같이 무차원 선형식으로 나타낼 수 있다.

$$\eta = \zeta \sin \phi + f - \zeta \quad (28)$$

아치축상 임의점에서 x 축과 곡률중심방향이 이루는 각도 ϕ 와 곡률반경 ζ 및 곡률항 ζ', ζ'' 를 무차원식으로 나타내면 각각 다음 식들과 같다.

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left(\frac{0.5 - \xi}{\zeta} \right) \quad (29)$$

$$\zeta = \frac{4f^2 + 1}{8f}, \quad \zeta' = 0, \quad \zeta'' = 0 \quad (30 \sim 32)$$

식 (18)로부터 $dQ/d\phi$ 를 구하고, 이를 식 (12) 및 식 (15)와 함께 식 (10)에, 식 (12)로부터 $dN/d\phi$ 를 구하고, 이를 식(16) 및 식 (18)과 함께 식 (9)에 대입하면 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도할 수 있다. 유도된 미분방정식에 식 (30)~(32)를 대입하고, 식 (19)~(27)의 무차원 변수들을 이용하여 정리하면 아치의 자유진동을 지배하는 무차원 미분방정식이 다음과 같이 유도된다.

$$\delta'''' = (-2 - \zeta^2 \pi^{-8} C_i^2) \delta'' + (-s^2 \zeta^2 - 1 + s^2 \zeta^4 \pi^{-8} C_i^2) \delta + (-s^2 \zeta^2 + \zeta^2 \pi^{-8} C_i^2) \lambda' \quad (33)$$

$$\lambda'' = (s^{-2} \pi^{-8} C_i^2 - 1) \delta' + (-s^{-2} - \zeta^2) \pi^{-8} C_i^2 \lambda \quad (34)$$

미분방정식 식 (33), (34)를 수치해석하기 위해서는 단부조건에 대한 경계조건이 필요하며, 아치의 단부조건에 따른 경계조건을 식 (19)~(22)의 무차원 변수들을 이용하여 유도하면 다음과 같다.

회전단인 경우 접선방향 변위 v , 곡률중심방향 변위 w 및 휨모멘트 M 이 “0” 이므로 다음과 같이 경계조건식을 나타낼 수 있다.

$$\lambda = \delta = \delta'' = 0, \quad \phi = \phi_L \quad \text{또는} \quad \phi = \phi_R \quad \text{에서} \quad (35 \sim 37)$$

고정단은 접선방향 변위 v , 곡률중심방향 변위 w 및 단면회전각 ψ 가 “0” 이므로 다음과 같이 경계조건식을 나타낼 수 있다.

$$\lambda = \delta = \delta' = 0, \quad \phi = \phi_L \quad \text{또는} \quad \phi = \phi_R \quad \text{에서} \quad (38 \sim 40)$$

4. 수치해석 예 및 토의

이상에서 유도한 상미분방정식 식 (33), (34)에 경계조건식 식 (35)~(40)을 대입하면 원호아치의 무차원 고유진동수 C_i 를 수치해석 방법에 의하여 산출할 수 있다.

본 연구에서는 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식

의 수치적분기법으로 정확도가 매우 높아 진동문제에 많이 이용되고 있는 제4차 Runge-Kutta법⁽⁸⁾을 이용하였으며, 지배미분방정식에 포함된 고유진동수를 산정하기 위한 비선형방정식의 수치해석 방법으로 정확성과 효율성이 높아 많이 이용되고 있는 Regula-Falsi법⁽⁸⁾을 이용하였다.

Fig. 4는 단면폭비 g 의 변화에 따른 무차원 고유진동수 C_i 의 변화를 나타낸 것이다. $k=1$ 로 정사각형 단면이며, $n_1 = n_2 = 0.02, f = 0.2$ 인 양단고정 및 양단회전인 아치를 대상으로 무차원 고유진동수의 변화를 고찰하였다. 이 그림을 살펴보면 g 가 증가할 때 C_i 는 증가하며, 일부구간에서는 C_i 의 증가율이 크고 일부구간에서는 작음을 알 수 있다. 이러한 결과를 이용하면 아치구조의 고유진동수를 효율적으로 증가시킬 수 있을 것으로 사료된다.

Table 1은 두께비 n_1 및 n_2 의 변화에 따른 무차원 고유진동수 C_i 의 변화를 나타낸 것이다. $g=0.05, k=1, f=0.3$ 인 고정-고정 아치를 대상으로 n_1 및 n_2 를 변화시키면서 무차원 고유진동수의 변화를 고찰하였다. n_1 이 증가하면 수평판의 두께가 점점 두꺼워지고, n_2 가 증가하면 수직판의 두께가 점점 두꺼워져 중공단면의 속이 채워지며, $n_1=0.5$ 또는 $n_2=0.5$ 이면 속이 완전히 채워진 중실단면이 된다. n_1 이 증가하면 C_i 는 감소하며, n_2 가 증가하면 C_i 는 증가하다가 정점을 보인 후에 감소한다. 따라서 구형 중공단면의 고유진동수를 높이기 위하여 단면의 두께를 증가시키는 경우 수직판의 두께를 증가시키는 것이 효율적이며, 이 표의 결과로부터 효과를 극대화할 수 있는 적절한 두께를 결정할 수 있을 것으로 판단된다. 또한 이 표에서 $n_1=0.5$ 또는 $n_2=0.5$ 인 중실단면의 경우 $n_1=n_2=0.01$ 인 중공단면에 비하여 제1 무차원 고유진동수가 28.13% 감소하여 중실단면에 비하여 중공단면을 갖는 아치가 진동에 대한 강성이 크음을 알 수 있다.

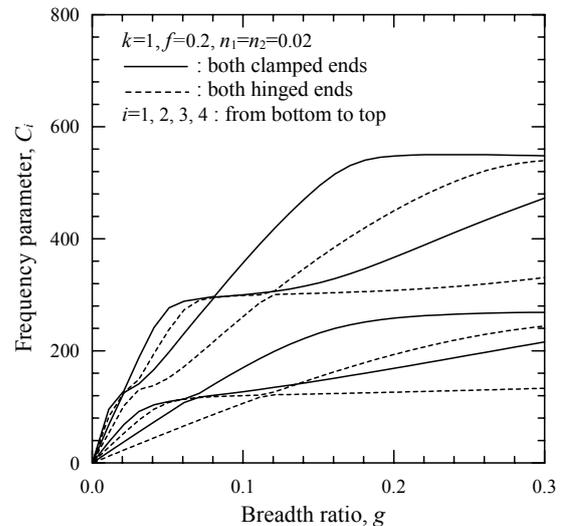


Fig 4. $C_i - g$ curves

Table 1. Effect of thickness ratio n_1 and n_2 on C_i

Geometry of arch	n_1	n_2	Natural frequency, C_i				Deviation (%)*
			C_1	C_2	C_3	C_4	
Clamped-clamped $g = 0.05$ $k = 1.0$ $f = 0.3$	0.01	0.01	89.64	109.65	196.44	275.91	0.00
		0.02	81.90	107.30	182.12	263.01	-8.63
	0.05	0.05	73.20	103.89	166.86	241.87	-18.34
		0.1	68.83	101.70	159.70	229.47	-23.22
		0.2	66.19	100.17	155.58	221.61	-26.16
	0.3	0.3	65.23	99.56	154.13	218.68	-27.23
		0.4	64.73	99.24	153.38	217.15	-27.79
		0.5	64.42	99.03	152.93	216.21	-28.13
	0.01	0.01	89.64	109.65	196.44	275.91	0.00
		0.02	95.76	111.24	208.08	282.18	+6.83
		0.05	99.29	112.09	214.88	284.67	+10.77
		0.1	97.01	111.55	210.48	283.13	+8.22
		0.2	88.58	109.36	194.46	274.51	-1.18
		0.3	79.71	106.54	178.18	258.26	-11.08
		0.4	71.46	103.07	163.95	237.02	-20.28
0.5	64.42	99.03	152.93	216.21	-28.13		

* Deviation(%) = $[(C_{1(\alpha=0.01)} - C_1) / C_{1(\alpha=0.01)}] \times 100$

Fig. 5는 단면적 A 가 일정할 때 형상비 k 의 변화에 따른 무차원 고유진동수 C_i 의 변화를 나타낸 것이다. A 가 일정하기 위해서는 k 가 증가할 때 단면폭비 g 가 감소하여야 하며, 식 (3)으로부터 계산된 g 를 그림 상단에 나타내었다. k 값이 증가하면 무차원 고유진동수 C_i 는 증가하며, 작은 k 값에서 C_i 값의 증가가 크게 나타나고, k 가 커지면 C_i 의 증가율은 다소 감소한다. 따라서 구형 증공단면 아치의 진동에 대한 강성을 증가시키기 위하여 단면의 깊이를 증가시키는 것은 매우 효과적인 방법이나 깊이를 특정 값 이상으로 크게 증가시키는 것은 무의미하며, 본 연구의 결과를 이용하여 진동에 대한 강성을 효과적으로 증가시킬 수 있는 적절한 단면을 선택할 수 있을 것으로 사료된다.

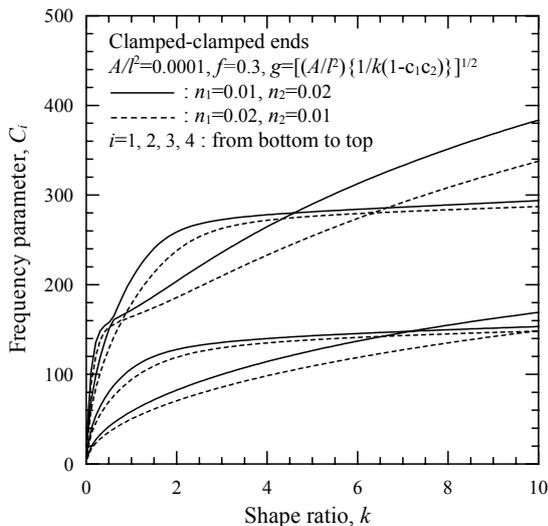


Fig 5. $C_i - k$ curves

5. 결론

본 논문은 구형 증공단면을 갖는 원호아치의 자유진동에 관한 연구이다. 본 연구에서는 증공단면의 형상으로 가장 널리 이용되고 있는 구형단면을 채택하였으며, 이론적 전개가 용이한 원호아치를 대상아치의 선형으로 결정하였다. 원호아치의 자유진동을 지배하는 무차원 상미분방정식을 유도하고, 이를 효율적으로 해석하여 정확한 고유진동수를 산정할 수 있는 수치해석 알고리즘을 개발하였으며, 제변수 변화에 따른 고유진동수의 변화를 고찰하였다.

본 연구의 결과를 이용하면 구형 증공단면 아치의 단면 폭과 깊이 및 두께의 비율을 적절히 조절함으로써 동일한 단면적에서 진동에 대한 강성이 보다 높은 단면의 확보가 가능할 것으로 사료된다.

참고 문헌

- (1) Hikami, Y., 1982, "Wind Tunnel Test Methods and Facilities for Bridge Aerodynamic Stability Investigation", IHI Report, Vol. 6, pp. 47~52.
- (2) Auciello, N. M. and De Rosa, M. A., 1994, "Free Vibrations of Circular Arches: A Review", Journal of Sound and Vibration, Vol. 176, No. 4, pp. 433~458.
- (3) Wilson, J. F. and Lee, B. K., 1995, "Free Vibrations of Catenary Arches with Unsymmetric Axes", Structural Engineering and Mechanics, An International Journal, Vol. 3, No. 5, pp. 511~525.
- (4) Maurizi, M. J., Rossi R. E. and Belles, P. M., 1991, "Lowest Natural Frequency of Clamped Circular Arcs of Linearly Tapered Width", Journal of Sound and Vibration, Vol. 144, No. 3, pp. 357~361.
- (5) Lee, B. K. and Oh, S. J., 1996, "Planar Free Vibrations of Stepped Arches", Proceeding of 3rd Asian-Pacific Conference on Computational Mechanics, Seoul, pp. 815~820.
- (6) Borg, S. F. and Gennaro, J. J., 1959, Advanced Structural Analysis, New Jersey: Van Nostrand.
- (7) Lee, B. K. and Wilson, J. F., 1989, "Free Vibrations of Arches with Variable Curvature," Journal of Sound and Vibration, Vol. 136, No. 1, pp. 75~89.
- (8) Al-Khafaji, A. W. and Tooley, J. R., 1986, Numerical Methods in Engineering Practice, Holt, Rinehart and Winston, Inc.