

## 크랙과 집중질량을 갖는 회전 외팔보의 진동 해석

### Vibration Analysis of a Cracked Beam with a Concentrated Mass Undergoing Rotational Motion

김민권† · 유희희\*

Min Kwon Kim, Hong Hee Yoo

**Key Words :** Modal Analysis(고유진동 해석), Modal Characteristic(고유진동 특성), Cantilever Beam(외팔보), Concentrated Mass(집중 질량), Open Crack(개구형 크랙), Stress Intensity Factor(응력집중계수), Natural Frequency(고유진동수), Flexibility Function(유연함수)

#### ABSTRACT

Modal characteristics of a cracked beam with a concentrated mass undergoing rotational motion are investigated in this paper. Hybrid deformation variables are employed to derive the equations of motion of a rotating cantilever beam. The flexibility due to crack, which is assumed to be open during the vibration, is calculated basing on a fracture mechanics theory. To obtain more general information, the equations of motion are transformed into a dimensionless form in which dimensionless parameters are identified. The effects of the dimensionless parameters related to the angular speed, the depth and location of a crack and the size and location of a concentrated mass on the modal characteristics of the beam are investigated numerically.

#### 1. 서 론

보 형태의 구조물은 오늘날 가장 널리 쓰이는 구조요소 중의 하나로 많은 수치적 방법과 정적 및 동적 상태에서의 적용을 통해 그 특성이 해석되고 있다. 이 중 터빈블레이드나 항공기 회전익과 같이 회전하는 외팔보 형태의 구조물의 경우 결합에 따라 진동특성은 크게 변화하게 된다. 이것은 보가 크랙과 같은 결함을 가질 경우 크랙이 존재하는 위치에서 추가적으로 발생하는 변형에너지와 집중질량에 의한 영향 때문이다. 특히 회전 구조물에 크랙과 집중질량이 동시에 존재하는 경우 크랙과 집중질량, 그리고 회전운동의 영향으로 인하여 구조물의 진동 특성은 현격히 변화할 것이 진동특성에 미치는 영향을 예측하는 것은 중요한 일이라 할 수 있다.

회전 외팔보의 굽힘진동 해석 방법은 Southwell과 Gough<sup>(1)</sup>가 Rayleigh Energy 평형이론에 근거하여 보의 회전에 따른 고유진동수의 변화를 예측하는 방법을 발표한 이래로 많은 연구가 수행 되어왔다. 그 후 Schilhansl<sup>(2)</sup>은 회전 외팔보의 굽힘진동 방정식을 유도하고 이에 Ritz방법을 적용하여 Southwell

등이 제시한 고유진동수 예측을 위한 방정식의 계수들을 더 정확하게 구하는 방법을 제시하였으며 Yoo<sup>(3-5)</sup>등은 복합변형변수를 이용하여 집중질량을 가진 회전 외팔보의 진동해석 모델을 제시하고 그에 따른 영향을 연구하였다. 한편 크랙을 가진 구조물의 동적 응답에 관한 연구는 Bock<sup>(6)</sup>에 의한 콘크리트 구조 요소의 굽힘 변형에 대해 시작되어 수많은 연구자들에 의해서 수행 되어 오고 있다. 그 중에서도 크랙을 가지는 보 태의 구조물의 해석은 Euler - Bernoulli 및 Timoshenko 보 이론을 중심으로 적용되어 크랙이 전체 구조물 동특성에 미치는 영향에 대한 연구가 주로 이루어져 왔다. 특히 Shen<sup>(7)</sup>등은 하나의 크랙에 의한 고유진동수의 변화를 예측하였고, Chati<sup>(8)</sup>등은 진동 시 크랙의 개폐현상에 의한 비선형 효과의 영향을 제시하였다. 또한 Chondros<sup>(9)</sup>등은 크랙을 가지는 보의 연속체 이론을 제시하고 그에 따른 여러 형태의 보에 관한 진동해석을 수행하였다. 최근 Yoon<sup>(11)</sup>등은 크랙이 존재하는 경우 회전 외팔보의 동적특성에 관한 영향을 연구하였다. 이 연구에서는 외팔보의 임의의 위치에 크랙과 집중 질량이 존재할 경우 크랙과 집중질량이 회전하는 외팔보의 고유진동수에 미치는 영향을 조사하였다. 크랙에 의한 응력집중 현상은 1 차 파괴 모드만 고

† 김민권; 한양대학교 기계공학과 대학원  
E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr  
Tel : (02) 2220-0446, Fax : (02) 2293-5070  
\* 한양대학교 기계공학부

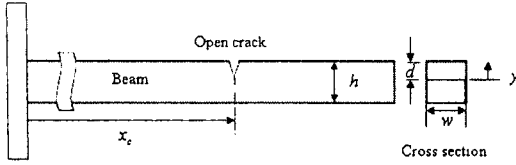


Fig. 1 Geometry of a cracked beam and its cross section

려하였으며 크랙은 비선형 효과를 무시한 비전진 개구형이라 가정하고 수치해석을 통해 집중질량의 크기 및 크랙의 크기와 위치 변화에 따른 고유진동수의 변화를 비교 고찰하였다.

## 2. 크랙에 의한 탄성에너지

Fig. 1은 크랙이 존재하는 빔과 그 단면의 형상이다. 여기서  $w$ 와  $h$ 는 사각단면의 너비와 높이를,  $d$ 는 개구형 크랙의 깊이를 나타낸다. 1차 파괴모드를 고려할 경우, 개구형 크랙에 가해지는 축방향과 굽힘 방향 하중으로 인한 탄성 에너지는 다음과 같다.

$$U_c = \int_A \frac{1-\nu^2}{E} (\sigma_p + \sigma_M)^2 dA \quad (1)$$

여기서  $E$ 와  $\nu$ 는 보의 영률과 프아송비를 나타낸다. 식 (1)의  $\sigma_p$ 와  $\sigma_M$ 은 각각 축방향 힘  $P$ 와 굽힘 모멘트  $M$ 에 의한 응력집중계수를 의미하며, 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_p = \frac{P}{wh} \sqrt{\pi y} F_1(y), \quad \sigma_M = \frac{6M}{wh^2} \sqrt{\pi y} F_2(y) \quad (2)$$

여기서  $F_1(y)$ 과  $F_2(y)$ 는 다음과 같다.

$$F_1(y) = \sqrt{\frac{2 \tan \frac{\pi y}{2}}{\pi y}} \left[ \frac{0.752 + 2.02y + 0.37(1 - \sin \frac{\pi y}{2})^3}{\cos \frac{\pi y}{2}} \right] \quad (3)$$

$$F_2(y) = \frac{1.99 - y(1-y)(2.15 - 3.39y + 2.7y^2)}{\sqrt{\pi(1+2y)(1-y)^{3/2}}} \quad (4)$$

Castigliano의 정리에 의하면 크랙에 의한 유연행렬은 다음과 같다.

$$c_{ij} = \frac{\partial^2 U_c}{\partial P_i \partial P_j} \quad (i, j = 1, 2) \quad (5)$$

이상의 식을 종합하면 유연행렬의 요소  $c_{ij}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$c_{11} = \frac{2\pi h(1-\nu^2)}{EA} \int_0^x \xi F_1^2(\xi) d\xi \quad (6)$$

$$c_{12} = c_{21} = \frac{\pi h^2(1-\nu^2)}{EI} \int_0^x \xi F_1(\xi) F_2(\xi) d\xi \quad (7)$$

$$c_{22} = \frac{6\pi h(1-\nu^2)}{EI} \int_0^x \xi F_2^2(\xi) d\xi \quad (8)$$

크랙에 의한 강성행렬은 계산된 유연행렬로부터 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}^{-1} \quad (9)$$

따라서 크랙에 의한 탄성에너지는 다음과 같다.

$$U_c = \frac{1}{2} \{ \Delta u \quad \Delta \theta \} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta \theta \end{Bmatrix} \quad (10)$$

크랙의 위치를 기준으로 하여  $\Delta u$ 는 양쪽 부위에서 발생하는 축방향 변위차를 나타내고  $\Delta \theta$ 는 양쪽 부위의 경사차를 나타낸다.

## 3. 운동방정식 유도

Fig. 2는 각속도  $\Omega$ 로 평면 회전 운동하는 강체 허브에 지지되어 있는 외팔보이다. 여기서  $L, A, I, \rho, r$ 은 각각 보의 길이, 단면의 넓이, 보의 면적관성모멘트, 단위길이당 질량, 허브의 반지름을 나타낸다.  $x_c$ 와  $x_m$ 는 각각 크랙과 집중질량의 위치를 나타낸다. 크랙이 보의 자유단에 근접한 경우나 집중질량이 보의 고정단에 근접한 경우에는 각각이 시스템 진동특성에 미치는 영향이 작을 것이므로 본 연구에서는  $x_m$ 이 항상  $x_c$ 보다 크다고 가정하였다. 외팔보 위의 임의 질점의 변형 후 위치인  $P$ 점의 탄성변위는 복합 변형변수  $s$ 와 굽힘방향 변형변수  $u_2$ 로 나타낼 수 있다.

$$s = \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{1i}(x) q_{1i}(t) \quad (11)$$

$$u_2 = \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{2i}(x) q_{2i}(t) \quad (12)$$

여기서  $\phi_{1i}(x)$ 와  $\phi_{2i}(x)$ 는 각각 인장방향과 굽힘방향의 모드함수를 나타낸다.  $q_{1i}(t)$ 과  $q_{2i}(t)$ 는 일반좌표이며  $\mu_1$ 과  $\mu_2$ 는 일반좌표의 개수를 나타낸다. 보는 크랙의 위치를 기준으로 두 개의 영역으로 나눌 수 있으며 ( $0 \leq x \leq x_c$ ,  $x_c < x \leq L$ ) 각 영역에서의 모드함수  $\phi_{1i}^{<1>}(x)$ ,  $\phi_{2i}^{<1>}(x)$ ,  $\phi_{1i}^{<2>}(x)$ ,  $\phi_{2i}^{<2>}(x)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\phi_{1i}^{<1>}(x) = A_1 \cos(\sigma_i x) + A_2 \sin(\sigma_i x) \quad (13)$$

$$\phi_{2i}^{<1>}(x) = B_1 \cos(\beta_i x) + B_2 \sin(\beta_i x) + B_3 e^{\beta_i(L-x)} + B_4 e^{\beta_i(x-L)} \quad (14)$$

$$\phi_{1i}^{<2>}(x) = A_3 \cos(\sigma_i x) + A_4 \sin(\sigma_i x) \quad (15)$$

$$\phi_{2i}^{<2>}(x) = B_5 \cos(\beta_i x) + B_6 \sin(\beta_i x) + B_7 e^{\beta_i(L-x)} + B_8 e^{\beta_i(x-L)} \quad (16)$$

여기서  $\sigma_i = \omega_i \sqrt{\frac{\rho}{EA}}$ ,  $\beta_i = \sqrt{\omega_i} \sqrt{\frac{\rho}{EI}}$ 이며  $\omega_i$ 는 회전 이 없는 상태에서의 보의 고유진동수를 나타낸다. 보의 경계조건은 다음과 같다.

$$\phi_{1i}^{<1>}(0) = 0, \phi_{2i}^{<1>}(0) = 0, \phi_{2i,x}^{<1>}(0) = 0 \quad (17)$$

$$\phi_{2i}^{<1>}(x_c) = \phi_{2i}^{<2>}(x_c), \phi_{2i,xx}^{<1>}(x_c) = \phi_{2i,xx}^{<2>}(x_c) \quad (18)$$

$$\phi_{2i,xxx}^{<1>}(x_c) = \phi_{2i,xxx}^{<2>}(x_c), \phi_{1i,x}^{<1>}(x_c) = \phi_{1i,x}^{<2>}(x_c)$$

$$\begin{aligned} & k_{11}(\phi_{1i}^{<2>}(x_c) - \phi_{1i}^{<1>}(x_c)) + \\ & k_{12}(\phi_{2i,x}^{<2>}(x_c) - \phi_{2i,x}^{<1>}(x_c)) = EA \phi_{1i,x}^{<1>}(x_c) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & k_{21}(\phi_{1i}^{<2>}(x_c) - \phi_{1i}^{<1>}(x_c)) + \\ & k_{22}(\phi_{2i,x}^{<2>}(x_c) - \phi_{2i,x}^{<1>}(x_c)) = EI \phi_{2i,xx}^{<1>}(x_c) \end{aligned}$$

$$\phi_{1i,x}^{<2>}(L) = 0, \phi_{2i,xx}^{<2>}(L) = 0, \phi_{2i,xxx}^{<2>}(L) = 0 \quad (20)$$

위 식에서 하첨자에 포함된  $x$ 는 각 하첨자에 대한 모드함수의 미분을 뜻한다. 즉  $xx$ 는 모드함수의 2차미분을,  $xxx$ 는 3차미분을 나타낸다. 위 12개의 식으로부터 구성된  $12 \times 12$  행렬이 무의미해를 갖지 않기 위한 조건으로부터 각 모드함수의 계수인  $A_i$ 와  $B_i$ 가 결정될 수 있다. 이로부터 얻어진 모드함수는 모든 경계조건을 만족하는 comparison 함수이며 그 수렴속도가 매우 빠르다. 반경이  $r$ 인 허브가 각속도  $\Omega$ 로 회전할 경우 디스크  $\tilde{A}$ 의 각속도와  $P$ 의 속도는 다음과 같다.

$$\tilde{\omega}^{\tilde{A}} = \Omega \hat{a}_3 \quad (21)$$

$$\tilde{v}^P = [\dot{u}_1 - \Omega u_2] \hat{a}_1 + [r\Omega + \dot{u}_2 + \Omega(x + u_1)] \hat{a}_2 \quad (22)$$

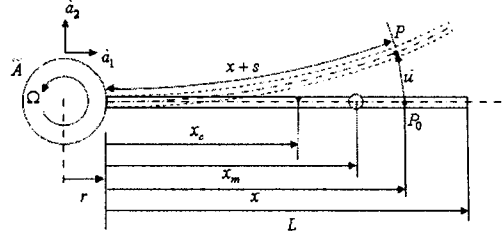


Fig. 2 Configuration of a rotating cracked beam with a concentrated mass Geometry of a cracked beam and its cross section

케인의 방법에 의한 운동방정식은 다음과 같다.

$$\int_0^L \rho \left( \frac{d\tilde{v}^P}{dt} \right) \cdot \left( \frac{\partial \tilde{v}^P}{\partial \dot{q}_i} \right) dx + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (23)$$

$U$ 는 보의 총 탄성 에너지이며  $q_i$ 는 일반좌표를 나타낸다. 식 (23)의 편속도는 다음과 같은 관계식에 의해  $\dot{s}$ 와  $\dot{u}_2$ 로 나타내어질 수 있다.

$$\dot{s} = \dot{u}_1 + \int_0^s \left( \frac{\partial u_2}{\partial \sigma} \right) \left( \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial \sigma} \right) d\sigma \quad (24)$$

보의 총 탄성 에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 dx + U_c \quad (25)$$

$U_c$ 를 얻기 위해 다음과 같은 식이 적용된다.

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{\mu_1} \phi_{1i}^{<2>}(x_c) q_{1i}(t) - \sum_{i=1}^{\mu_1} \phi_{1i}^{<1>}(x_c) q_{1i}(t) \quad (26)$$

$$\Delta \theta = \sum_{i=1}^{\mu_2} \phi_{2i,x}^{<2>}(x_c) q_{2i}(t) - \sum_{i=1}^{\mu_2} \phi_{2i,x}^{<1>}(x_c) q_{2i}(t)$$

이상의 식들을 종합하여 다음과 같은 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_1} [m_{ij}^{11} \dot{q}_{1j} - \Omega^2 m_{ij}^{11} q_{1j} + k_{ij}^s q_{1j}] - \sum_{j=1}^{\mu_2} [2\Omega m_{ij}^{12} \dot{q}_{2j} + \Omega m_{ij}^{12} q_{2j}] \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_1} [k_{ij}^{11} q_{1j}] + \sum_{j=1}^{\mu_2} [k_{ij}^{12} q_{2j}] = \Omega^2 P_{1i} \quad (i=1,2,\dots,\mu_1) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\sum_{j=1}^{\mu_1} [\hat{m}_{ij}^{22} \ddot{q}_{2j} + \{k_{ij}^B + \Omega^2(k_{ij}^G - \hat{m}_{ij}^{22})\} q_{2j}] + \sum_{j=1}^{\mu_2} [2\Omega \hat{m}_{ij}^{21} \dot{q}_{1j} + \hat{\Omega} \hat{m}_{ij}^{21} q_{1j}] + \sum_{j=1}^{\mu_1} [k_{ij}^{21} q_{1j}] + \sum_{j=1}^{\mu_2} [k_{ij}^{22} q_{2j}] = -\hat{\Omega} P_{2i} \quad (i=1, 2, \dots, \mu_2) \quad (28)$$

여기서

$$\begin{aligned} m_{ij}^{ab} &= \int_0^L \rho \phi_{ai}(x) \phi_{bj}(x) dx \\ k_{ij}^S &= \int_0^L EA \phi_{1,x}(x) \phi_{1,x}(x) dx \\ k_{ij}^B &= \int_0^L EI \phi_{2i,xx}(x) \phi_{2j,xx}(x) dx \\ k_{ij}^G &= \int_0^L \frac{\rho}{2} (2r + L + x)(L - x) \phi_{2i,x}(x) \phi_{2j,x}(x) dx \\ k_{ij}^{11} &= k_{11} [\phi_{1i}^{<2>}(x_c) - \phi_{1i}^{<1>}(x_c)] [\phi_{1j}^{<2>}(x_c) - \phi_{1j}^{<1>}(x_c)] \\ k_{ij}^{12} &= k_{12} [\phi_{1i}^{<2>}(x_c) - \phi_{1i}^{<1>}(x_c)] [\phi_{2j,x}^{<2>}(x_c) - \phi_{2j,x}^{<1>}(x_c)] \\ k_{ij}^{21} &= k_{21} [\phi_{2i,x}^{<2>}(x_c) - \phi_{2i,x}^{<1>}(x_c)] [\phi_{1j}^{<2>}(x_c) - \phi_{1j}^{<1>}(x_c)] \\ k_{ij}^{22} &= k_{22} [\phi_{2i,x}^{<2>}(x_c) - \phi_{2i,x}^{<1>}(x_c)] [\phi_{2j,x}^{<2>}(x_c) - \phi_{2j,x}^{<1>}(x_c)] \\ P_{ai} &= \int_0^L \rho(r+x) \phi_{ai}(x) dx \end{aligned} \quad (29)$$

집중질량을 고려하여 단위 길이당 질량은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\rho^*(x) = \rho + m \delta(x - x_m) \quad (31)$$

여기서  $\delta(x - x_m)$  은 Dirac' s delta 함수로서  $x = x_m$  에서 무한대의 값을 갖는다.

$$\begin{aligned} \hat{m}_{ij}^{ab} &= m_{ij}^{ab} + m \phi_{ai}(x) \phi_{bj}(x) \\ \hat{k}_{ij}^G &= k_{ij}^G + m(r + x_m) \int_0^m \phi_{2i,x}(x) \phi_{2j,x}(x) dx \\ \hat{P}_{ai} &= P_{ai} + m(r + x_m) \phi_{ai}(x_m) \end{aligned} \quad (32)$$

인장, 굽힘 간 연성효과를 무시하고 일정한 각속도의 회전운동을 가정하면 다음과 같은 굽힘방향 운동방정식을 얻을 수 있다.

Table 1 Comparison of the natural frequencies

$\beta$	$\kappa$	1 <sup>st</sup> natural frequency		2 <sup>nd</sup> natural frequency	
		Present	Ref.[10]	Present	Refer[10]
0.1	0.4	1.707	1.706	4.568	4.568
	0.7	1.313	1.313	4.417	4.417
0.5	0.4	1.843	1.843	4.401	4.401
	0.7	1.693	1.693	3.752	3.752
0.9	0.4	1.875	1.875	4.688	4.689
	0.7	1.875	1.874	4.649	4.649

$$\sum_{j=1}^{\mu_2} [\hat{m}_{ij}^{22} \ddot{q}_{2j} + \{k_{ij}^B + k_{ij}^{22} + \Omega^2(\hat{k}_{ij}^G - \hat{m}_{ij}^{22})\} q_{2j}] = 0 \quad (i=1, 2, \dots, \mu_2) \quad (33)$$

보다 일반적인 결과를 얻기 위해 운동방정식을 무차원화할 수 있다. 다음과 같은 무차원 변수 및 매개변수를 이용하여 시스템의 고유진동 해석에 사용되는 최종적인 무차원 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$\tau = \frac{t}{T}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \mathcal{G}_{ai} = \frac{q_{ai}}{L} \quad (34)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{AL^2}{I}}, \quad \gamma = \Omega T \quad (35)$$

$$T = \sqrt{\frac{\rho L^4}{EI}} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\mu_2} [\bar{m}_{ij}^{22} \ddot{\mathcal{G}}_{2j} + \{k_{ij}^B + \gamma^2(\bar{k}_{ij}^G - \bar{m}_{ij}^{22})\} \mathcal{G}_{2j}] + \sum_{j=1}^{\mu_2} [\bar{k}_{ij}^{22} \mathcal{G}_{2j}] = 0 \quad (i=1, 2, \dots, \mu_2) \end{aligned} \quad (37)$$

위 식에서  $\ddot{\mathcal{G}}_{ai}$  는  $\tau$  에 대한  $\mathcal{G}_{ai}$  의 2 차 미분을 나타내며 각 행렬과 무차원 매개변수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{m}_{ij}^{ab} &= \int_0^1 \psi_{ai} \psi_{bj} d\xi + \mu \psi_{ai}(\beta_m) \psi_{bj}(\beta_m) \\ \bar{k}_{ij}^B &= \int_0^1 \psi_{2i,\xi\xi} \psi_{2j,\xi\xi} d\xi \\ \bar{k}_{ij}^G &= \int_0^1 [\delta(1-\xi) + (1-\xi^2)] \psi_{2i,\xi} \psi_{2j,\xi} d\xi \\ &\quad + \mu(\beta_m + \delta) \int_0^{\beta_m} \psi_{2i,\xi} \psi_{2j,\xi} d\xi \\ \bar{k}_{ij}^{22} &= \bar{k}_{22} [\psi_{2i,\xi}^{<2>}(\beta_c) - \psi_{2i,\xi}^{<1>}(\beta_c)] [\psi_{2j,\xi}^{<2>}(\beta_c) - \psi_{2j,\xi}^{<1>}(\beta_c)] \end{aligned}$$

$$\beta_c = \frac{x_c}{L}, \quad \beta_m = \frac{x_m}{L}, \quad \delta = \frac{r}{L}$$

$$\mu = \frac{m}{\rho L}, \quad \bar{k}_{22} = \frac{k_{22}}{EI}$$

Table 2 Comparison of the natural frequencies

$\eta$	1 <sup>st</sup> natural frequency		2 <sup>nd</sup> natural frequency	
	Present	Ref.[5]	Present	Ref.[5]
1	11.9861	11.9862	-	-
2	11.4797	11.4797	60.3866	60.3867
3	11.2937	11.2938	60.3643	60.3643
4	11.2251	11.2252	59.6623	59.6623
5	11.1919	11.1919	59.5924	59.5924

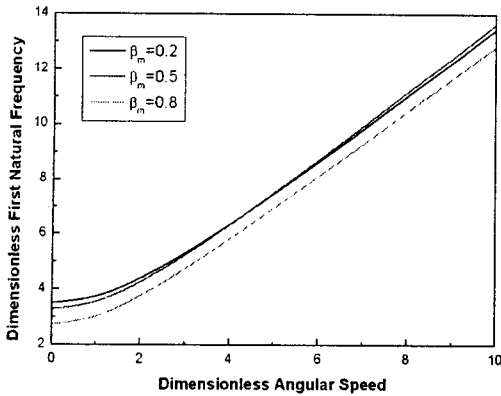


Fig. 3 First natural frequency for different concentrated mass location

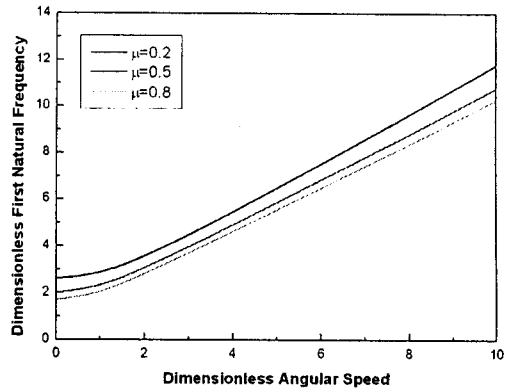


Fig. 5 First natural frequency for different concentrated mass ratio

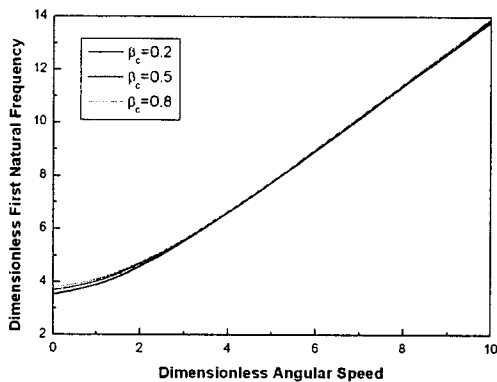


Fig. 4 First natural frequency for different crack location

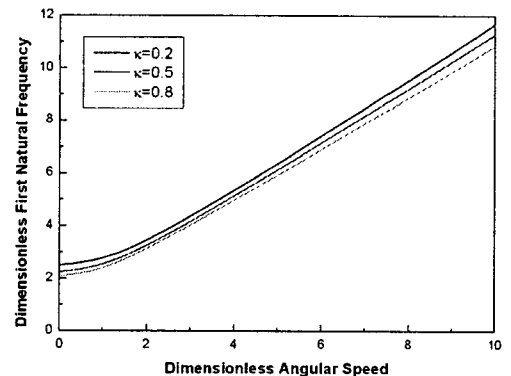


Fig. 6 First natural frequency for different crack depth ratio

#### 4. 수치해석

##### 4.1 크랙만 존재하는 경우

Table 1 은 외팔보상 임의의 위치에 일정 크기의 크랙만 존재할 경우 크랙의 크기와 위치에 따른 첫 번째와 두 번째 고유진동수 값들을 비교한 것이다. 보이는 바와 같이 참고문헌 [10]과 잘 일치하는 결과를 얻을 수 있었으며 이때 크랙의 위치가 고정단에 가깝고 크랙의 크기가 클수록 고유진동수는 더 작아지는 것을 확인할 수 있다.

##### 4.2 집중질량만 존재하는 경우

Table 2 는 외팔보가 집중질량만 가지는 경우, 현 모델링 방법의 정확도를 검증하기 위해  $\mu=1$ ,  $\alpha=1$ ,  $\kappa=0$ ,  $\beta=0$ ,  $\delta=1$ ,  $\gamma=10$  인 경우 사용한 모드의 개수에 따른 1 차와 2 차 고유진동수를 비교하였다.

Fig. 3 은 각속도가 증가함에 따라서 고유진동수가 증가하는 현상을 보여준다. 가장 낮은 3 개의 고유진동수를 나타내었으며 수치해석에 사용된 무차원 파

라미터들을 표시하였다.

Fig. 4, Fig. 5, Fig. 6, Fig. 7 은 각각 집중질량의 위치, 크랙의 위치, 집중질량의 크기, 크랙의 깊이 변화에 따른 고유진동수의 변화이다. 수치해석에 사용된 무차원 파라미터들을 표시하였다. 집중질량이 고정단 가까이 위치할수록, 그 크기가 작을수록 고유진동수가 증가하는 현상을 확인하였다. 크랙의 위치는 고유진동수 변화에 큰 영향을 미치지 못하는 것으로 나타났으며 직관적으로도 예측 가능하듯, 그 깊이가 클수록 고유진동수가 감소하였다.

#### 5. 결론

본 논문에서는 임의의 위치에 크랙과 집중질량을 가진 회전하는 외팔보 구조물의 굽힘진동 해석모델링이 제시되었다. 이 모델링에서 크랙에 의한 효과를 고려하기 위해 1 차 파괴모드만을 이용하였으며 집중질량을 고려하기 위해 보의 단위길이당 질량을 충격함수로 이상화하여 수식을 유도하였다. 또한 외팔보의 굽힘방향 지배방정식으로부터 유도된 일반해에 시스템의 경계조건과 연속조건을 적용하여 얻은 식의 특성방정식의 해를 구함으로써 고유진동수를 얻을 수 있었다. 해석결과 크랙과 집중질량의 크기

와 위치, 그리고 회전 각속도가 외팔보의 굽힘방향 고유진동수에 큰 영향을 미치는 것을 확인할 수 있었다. 수치해석 예제를 통해 집중질량의 크기가 커질수록, 집중질량이 자유단 근처에 위치할수록 고유진동수가 낮아지는 현상을 볼 수 있었다. 또한 크랙의 위치에 의한 고유진동수의 변화는 집중질량의 위치에 의한 변화에 비해 미소하게 나타나는 것을 확인할 수 있었다. 회전하지 않는 외팔보의 고유진동수의 경우 크랙의 크기에 의한 영향이 위치에 의한 영향보다 크게 나타나는 것을 확인할 수 있었으며 회전하는 외팔보에 경우는 크랙에 의한 영향 보다 집중질량의 크기와 위치, 그리고 회전 각속도에 의한 영향이 더 큰 것을 확인할 수 있었다.

## 후 기

본 논문은 2008 년도 2 단계 두뇌한국 21 프로젝트에 의해서 지원되었습니다.

## 참 고 문 헌

- (1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, " The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," British A. R. C. Reports and Memoranda No. 766.
- (2) Schilhansl, M., 1958, " Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam," *J. of App. Mech. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs.* 25, pp. 28~30.
- (3) Yoo, H., Ryan, R. and Scott, R., 1995, " Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions," *J. of Sound and Vibration*, 181(2), pp. 261~278.
- (4) Yoo, H., 1996, " Vibration Analysis of Rotating Cantilever Beams Considering Concentrated Mass Effect," *KSME*, Vol. 20, No. 8, pp. 2516~2523.
- (5) Seo, S., Huh, K. and Yoo, H., 2002, " The Effect of a Concentrated Mass on the Modal Characteristics of a Rotating Cantilever Beam," *J. of Mechanical Engineering*, Vol. 216(2), pp. 151~163.
- (6) Bock, E., 1942, " Behavior of Concrete and Reinforced Concrete Subjected to Vibrations Causing Bending," *VDI Z* 86, pp. 145~147.
- (7) Shen, M., Pierre, C. 1990, " Natural modes of Euler-Bernoulli Beam," *J. of Vibration and Acoustics Stress and Reliability*, 111, pp. 81~84.
- (8) Chati, M., Rand, R. and Mukherjee, S., 1997, " Modal Analysis of a Cracked Beam," *J. of Sound and Vibration*, 207(2), pp. 249~270.
- (9) Chondros, T. and Dimarogonas, A., 1998, " Vibration of a Cracked Cantilever Beam," *J. of Vibration and Acoustics*, 120, pp. 742~746
- (10) Dado, M. and Abuzeid, O., 2003, " Coupled Transverse and Axial Vibratory Behaviour of Cracked Beam with End Mass and Rotary Inertia," *J. of Sound and Vibration*, V. 261, No. 4, pp. 675~696.

(11) Yoon, H. and Son, I., 2005, " Dynamic Behavior of Rotating Cantilever Beam with Crack," *KSNVE*, Vol. 15, No. 5, pp. 620~628.

(12) Kane, T. and Levinson, D., 1985, " Dynamics, Theory and Applications," McGraw-Hill Book Co.

(13) Ewalds, H. and Wnahil, R., 1984, " Fracture Mechanics,," Edward Arnold and Delftse Uitgevers Maatschappij, London.