

# PZT actuator를 이용한 외팔보의 능동진동제어

## Active control of vibration of cantilever beams using PZT actuators

신 창 주\* · 홍 진 숙† · 정 의 봉\*\*  
Changjoo Shin, Chinsuk Hong and Weui Bong Jeong

**Key Words** : Active Control of Vibration(능동진동제어), PZT actuator(압전작동기), Cantilever Beam(외팔보), Velocity Feedback Control(속도 되먹임 제어), Plant Response(플랜트 응답), Stability(안정도), Total Kinetic Energy(전체운동에너지) Normalized Total Kinetic Energy (정규화된 전체운동에너지)

### ABSTRACT

This paper presents an active vibration control of cantilever beams under disturbances by a primary force. A direct velocity feedback control using a pair of PZT actuator and a velocity sensor is considered. Variation of the stability and performance with the locations of the sensor/actuator pair is investigated. It is found that the maximum gain varies with the locations of the sensor/actuator pair significantly. The maximum gain shows a symmetric distribution along the beam length with respect to the center point, although the boundary condition of the beam is unsymmetric. The control performance is affected by the location of the primary force as well as the location of the sensor/actuator pair. The active control system can more effectively reduce the vibration when the primary force is located close to the fixed boundary.

### 1. 서 론

외팔보 구조물은 하드 디스크의 액세스 암, 비행기의 날개, 우주 정거장의 집광판 그리고 로봇 팔등 여러 분야에 적용되어 있다. 외팔보는 자유단 부위에서 발생하는 큰 변위차가 구조물을 파손할 수 있다는 단점을 갖고 있다. 특히 가볍고 유연한 구조물이 저주파 진동에 놓여있을 때 치명적인 문제점을 야기할 수 있다<sup>(1)</sup>. 이러한 구조물의 진동 저감을 위한 전통적인 방법은 구조물 재설계 또는 수동적으로 감쇠를 주는 것이다. 구조물 재설계는 많은 비용을 수반하게 된다. 반면 수동적으로 감쇠를 주는 것은 고주파 진동에 대해서 효과적이지만 저주파대 대역의 진동 저감에는 효율성이 현저하게 떨어진다. 이것에 대한 대안으로 제어력을 이용한 능동진동제어(active vibration control : AVC)는 저주파 대역에서 높은 성능의 진동 저감을 수행할 수 있다<sup>(2)</sup>.

능동진동제어를 위해 쓰이는 대표적인 actuator로는 전자기 actuator와 PZT actuator가 있다. 전자기 actuator는 한 점을 통해 제어력을 구조물에 전달한다. 전자기 actuator의 위치와 응답점의 위치가 같을 때 무조건적 안정성을 가지게 되며 이로 인해 gain을 자유자재로 조절할 수 있다<sup>(3)</sup>. 하지만 전자기 actuator의 외형적인 특성상 무게고 부피가 크다. 따라서 실제 적용 대상 분야가 매우 한정적이다. 반면 PZT actuator는 PZT의 가장자리를 통해 제어 모멘트를 쌍으로 구조물에 전달한다. 모멘트를 통한 구조물 제어의 경우 PZT가 구조물에 놓여있는 위치에 의해 불안정성 응답을 유발할 수 있다<sup>(4)</sup>. 하지만 작고 가벼우며 큰 힘을 전달할 수 있기 때문에 실질적인 적용범위가 매우 넓다. 따라서 PZT를 능동진동 제어에 적용하기 전에는 반드시 불안정성을 피하기 위한 연구가 선행되어야 한다.

본 연구에서는 외팔보에 속도 되먹임 제어 시스템을 구성하여 plant response와 안정성을 확인한다. 또한 PZT actuator 위치, 외란 입력 위치를 변화시키며 구조물 응답을 비교하고자 한다.

† 교신저자; 부산대학교 기계공학부  
E-mail : cshong@pusan.ac.kr  
Tel : (051) 510-2494, Fax : (051) 517-3805

\* 부산대학교 대학원 기계공학부

\*\* 부산대학교 기계공학부

## 2. 정식화

### 2.1 지배방정식

힘과 모멘트가 동시에 입력되는 균일 외팔보의 Fig. 1과 같이 표현할 수 있으며 Euler-Bernoulli beam의 운동방정식을 이용하여 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

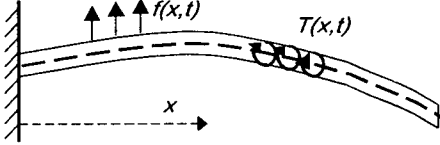


Fig. 1 A cantilever beam subjected to external forces and moments along the beam

$$E(1+j\eta)I \frac{\partial^4 \omega(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 \omega(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t) + \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \quad (1)$$

여기서  $E$ 는 Young율,  $\eta$ 는 구조 감쇠,  $I$ 는 보 단면의 관성 모멘트,  $\rho$ 는 밀도,  $A$ 는 보의 단면적,  $f$ 는 단위 길이당 외력 그리고  $T$ 는 단위 길이당 모멘트이다. 보의 속도에 대한 주파수 응답 함수는 식(2)와 같다.

$$v(x, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\omega) \phi_n(x) \quad (2)$$

여기서  $a_n$ 은 주파수별 모달 속도응답이며  $\phi_n$ 은 모드 형상이다. 모달 속도응답은 식(3)과 같다.

$$a_n = A_n(\omega) F_n(\omega), \quad (3)$$

단,

$$A_n(\omega) = \frac{j\omega}{\rho A L (\omega_n^2 - \omega^2 + 2j\zeta_n \omega \omega_n)}, \quad (4)$$

$$F_n(\omega) = \int_0^L f(x, \omega) \phi_n(x) dx + \int_0^L \frac{\partial T(x, \omega)}{\partial x} \phi_n(x) dx \quad (5)$$

외팔보의 경계조건을 이용하면 모드형상은 식(6)과 같이 표현된다<sup>(5)</sup>.

$$\phi_n(x) = \left( \cosh \frac{\lambda_n x}{L} - \cos \frac{\lambda_n x}{L} \right) - \frac{\sinh \lambda_n - \sin \lambda_n}{\cosh \lambda_n + \cos \lambda_n} \left( \sinh \frac{\lambda_n x}{L} - \sin \frac{\lambda_n x}{L} \right) \quad (6)$$

여기서  $\lambda_n$ 은 식(7)의 근으로 주어진다.

$$\cos \lambda_n \cosh \lambda_n = -1 \quad (7)$$

본 연구에 고려할 외란과 PZT actuator에 의한 제어모멘트는 각각 집중하중과 모멘트쌍이다. 외란인 집중하중은  $x = x_p$  위치에 크기가  $f_p$ 로 식(8)과 같이 쓸 수 있다.

$$f(x, t) = f_p \delta(x - x_p), \quad (8)$$

PZT actuator에 의한 모멘트 쌍은  $x = x_s$ 를 중심으로 양쪽으로  $s$ 만큼 떨어져 서로 반대방향으로 작용하며 그 크기가  $T_s$ 로 식(9)와 같이 표현된다.

$$T(x, t) = T_s \{ \delta(x - (x_s - s)) - \delta(x - (x_s + s)) \} \quad (9)$$

식(8)과 식(9)를 식(5)에 대입하고 그 결과를 식(3)에 대입하면

$$a_n = A_n \left[ f_p \phi_n(x_p) + T_s \left\{ \frac{\partial \phi_n(x_s - s)}{\partial x} - \frac{\partial \phi_n(x_s + s)}{\partial x} \right\} \right] \quad (10)$$

이다. 보의 속도에 대한 주파수응답함수를  $N$ 차까지 중첩하면 식 (11)과 같다.

$$v(x, \omega) = \sum_{n=1}^N a_n(\omega) \phi_n(x) = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\phi}(x), \quad (11)$$

단,

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T, \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\phi}(x) = [\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)]^T \quad (13)$$

여기서  $\mathbf{a}$ 는 모달 속도 벡터,  $\boldsymbol{\phi}$ 는 모드 형상 벡터이다. 식(11)에 의하여 진동하는 구조물의 total kinetic energy는 정규화된 모드벡터의 직교성을 이용하면 식(14)와 같다.

$$E(\omega) = \frac{\rho A}{2L} \mathbf{a}^H \mathbf{a} \quad (14)$$

여기서 위첨자  $H$ 는 Hermitian conjugate를 나타낸다.

## 2.2 속도 되먹임 제어

본 연구에서 능동진동제어를 위하여 Fig. 2에서 보인 바와 같이 속도 되먹임 제어 루프(loop)를 구성하였다<sup>(3)</sup>. 외란으로써 집중하중  $f_p$ 와 제어 모멘트  $T_s$ 가 동시에 가해질 때 센서 위치에서 구조물의 속도 응답  $v_r$ 은 식 (15)와 같이 표현된다.

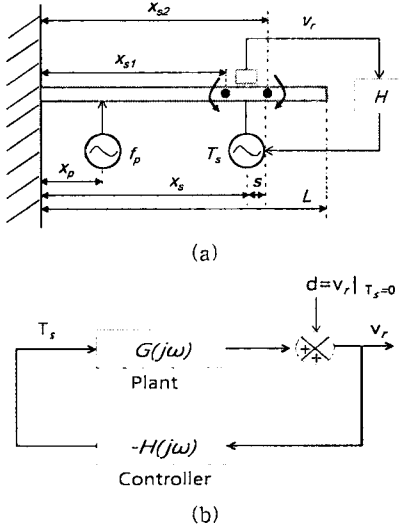


Fig. 2 Active feedback control system using a PZT actuator (a) Schematic arrangement (b) Block diagram

$$v_r(x_r, \omega) = Y_{pr}(j\omega)f_p + Y_{sr}(j\omega)T_s[\delta(x-x_{s2}) - \delta(x-x_{s1})] \quad (15)$$

단,

$$Y_{pr}(j\omega) = \sum_{n=1}^N A_n(j\omega)\phi_n(x_p)\phi_n(x_r) \quad (16)$$

$$Y_{sr}(j\omega) = \sum_{n=1}^N A_n(j\omega) \left[ \frac{\partial\phi_n(x_{s1})}{\partial x} - \frac{\partial\phi_n(x_{s2})}{\partial x} \right] \phi_n(x_r) \quad (17)$$

이며  $x_r = x_s$ ,  $x_{s1} = x_s - s$ ,  $x_{s2} = x_s + s$ 이다.

외란에 의한 센서의 출력력을  $d(j\omega) = Y_{pr}f_p$ , plant의 전달함수를  $G(j\omega) = Y_{sr}(j\omega)$ 로 표현하면 식(15)는 식 (18)과 같이 쓸 수 있다.

$$v_r = d(j\omega) + G(j\omega)T_s \quad (18)$$

Block diagram에 의해  $T_s = -v_r(j\omega)H(j\omega)$ 이며, 여기서  $H(j\omega)$ 는 feedback gain이다. Gain이 상수라면  $H(j\omega) = h$  이므로따라서 제어 모멘트는 식(19)과 같이 표

현된다.

$$T_s = \frac{-h Y_{pr}(j\omega)f_p}{1 + h Y_{sr}(j\omega)} \quad (19)$$

식(14)에 주어진 total kinetic energy는 feedback gain  $h$ 의 함수이므로  $E(\omega, h)$ 로 표현한다.  $E(\omega, h)$ 의 주파수에 대한 적분 값을 특정 비교 대상의 total kinetic energy의 적분 값에 대한 비로 나타내는 값을 normalized total kinetic energy라 지칭한다. 이는 식 (20)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\overline{KE}(h) = 10 \log_{10} \frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} E(\omega, h) d\omega}{\int_{\omega_1}^{\omega_2} E_p(\omega) d\omega} \quad (20)$$

여기서  $E_p$ 는 특정 비교대상의 total kinetic energy이며 본 연구에서는 제어 전 구조물의 total kinetic energy로 적용하였다.

## 3. Plant response 및 안정성

외팔보 구조물에 대하여 PZT actuator와 속도센서를 이용한 속도 되먹임 제어기의 안정성을 해석하기 위해 식(17)에서 보인 plant response를 계산하였다. 이때 센서의 위치는 Fig 2.에서 보인바와 같이 PZT actuator의 중점 위치를 설정하였다. 외팔보 구조물에 적용된 물성치는 Table 1에서 보인 바와 같다. 센서 및 PZT actuator의 위치가 안정성에 미치는 영향을 고찰하기 위해 센서/PZT actuator를 보의 고정단으로부터 전체 길이의 10%, 20% 50% 및 80% 위치에 대하여 plant response를 구하였다. Fig. 3은 PZT actuator의 각 위치에 대한 Plant response를 Nyquist diagram으로 나타내었다. 좌반면에 존재하는 응답은 불안정성을 야기하는 모드이며 실수축을 교차하는 최대 값의 역수

Table 1 Geometric data and material properties of beams

Parameters	Values	Unit	Symbol
Length	1	m	$L$
Width	0.0086	m	$b$
Thickness	0.0086	m	$h$
Density	2700	kg/m <sup>3</sup>	$\rho$
Young's Modulus	71	GPa	$E$
Poisson's ratio	0.33		$\nu$
loss factor	0.02		$\eta$

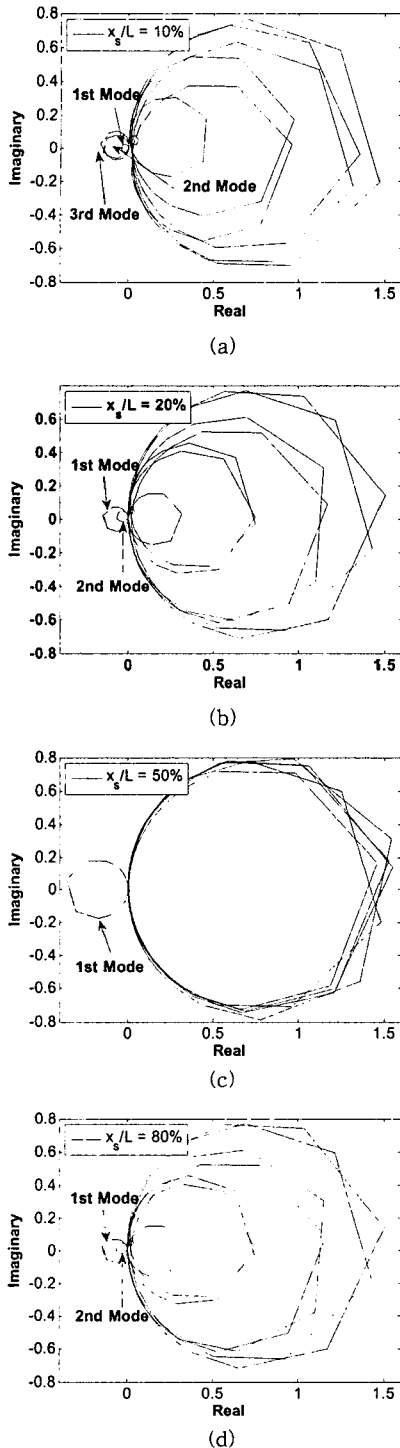


Fig. 3 Nyquist diagram of frequency response functions(0~2kHz) between the velocity sensor and moment pair with space of  $4\%L$  on cantilever beams : (a) at  $0.1L$ , (b) at  $0.2L$ , (c) at  $0.5L$ , and (d) at  $0.8L$

가 plant의 안정성을 확보할 수 있는 gain이 된다. PZT actuator의 위치가 고정단 및 자유단에 가까울수록 불안정한 모드가 많아지고 최대 gain은 증상으로 갈수록 낮음을 알 수 있다. PZT actuator 위치에 따른 최대 gain의 변화를 알아보기 위해 PZT actuator를 구조물의 전체 길이 대비 고정단에서부터 2%~98%까지 2%씩 이동하며 각 위치에서 최대 gain을 구하였다. Fig. 4에서 보인바와 같이 구조물의 제어 안정성을 보장하는 최대 gain은 50% 지점을 중심으로 좌우 대칭적인 모습을 나타내고 있다. 또한 18%, 82% 지점에서 가장 높은 최대 gain을 확보할 수 있었고 50% 지점에서 가장 낮았다. 구조물의 경계조건은 비대칭인 반면 최대 gain이 보의 중심 위치에 대하여 대칭적으로 나타난다. 왜냐하면 PZT actuator가 생성하는 모멘트 쌍이 모드와 연성되는 특성 때문이다. 외팔보 구조물의 전달함수식(17)에서 PZT의 크기  $2s$ 가 외팔보 상에 존재하는 과장보다 매우 작다고 가정하면 모멘트 차는 미분 형태로 표현할 수 있으며 식(21)과 같이 쓸 수 있다.

$$Y_{sr}(j\omega) = G(j\omega) = -2s \sum_{n=1}^N A_n(j\omega) \phi_n(x_r) \frac{\partial^2 \phi_n(x_r)}{\partial x^2} \quad (21)$$

$A_n(j\omega)$ 의 위상이 항상  $\pm 90^\circ$  내에 존재하므로 모드형상과 모드형상의 이차미분의 곱이 plant response의 안정성을 결정하게 된다. 식(21)에 의하면 모드형상과 모드형상의 이차미분 곱이 음수이면 안정하고, 양수이면 불안정을 야기하게 된다. Fig. 5은 모드형상, 모드형상의 이차미분, 모드형상과 모드형상의 이차 미분 곱을 보여주고 있다. 모드형상과 모드형상의 이차 미분 곱의 그림에서 고정단과 자유단 가장자리 부분에서 안정성을 심각하게 해칠 수 있는 양의 값이 외팔보의 중심을 기준으로 대칭적으로 나타난다.

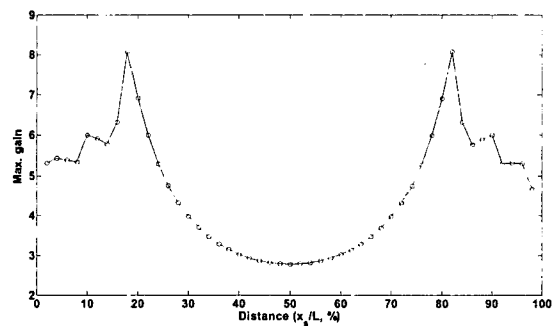


Fig. 4 Variation of the maximum gain with the locations of the pair of velocity sensor and PZT actuator with length of  $4\%L$  of active velocity feedback control systems for cantilever beams

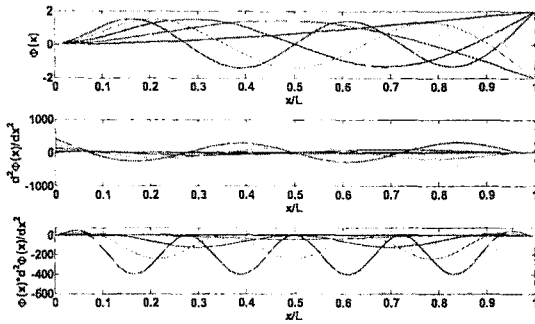


Fig. 5 Mode shape functions, second derivatives and their multiplications for a cantilever beam

#### 4. 성능분석

##### 4.1 제어력 위치 변화의 영향

Fig. 6은 PZT actuator의 위치별 gain에 대한 normalized total kinetic energy를 보이고 있다. 외란은 1N의 집중하중을 20% 지점에 가하였으며, PZT actuator 위치는 고정단으로부터 보의 길이에 대하여 2%부터 98%까지 2% 간격으로 변경하였다. Fig. 4에서 보인 바와 같이 최대 gain을 획득할 수 있는 PZT actuator의 위치가 18% 및 82%인 반면 normalized total kinetic energy를 최소화 하는 PZT actuator 위치는 32% 및 68% 지점으로 나타났다. 이는 PZT actuator의 위치에 따라 고주파 대역 모드와 제어모멘트의 연성되는 정도가 차이 있기 때문인 것으로 판단된다. Fig. 3에서 보인 Nyquist diagram을 보면 PZT actuator 위치가 중앙으로 갈수록 고주파 대역 응답이 크게 나타남을 알 수 있다. 그러나 이 경우 저주파 대역의 불안정 모드의 응답도 크게 나타나므로 최대 gain을 얻을 수 있는 18% 지점과 중앙점 사이인 32% 지점에서 가장 우수한 성능을 보인 것으로 판단된다. 이때 진동 저감의 크기는 5.7dB였다. Fig. 7은 PZT actuator가 보에 대해 18%

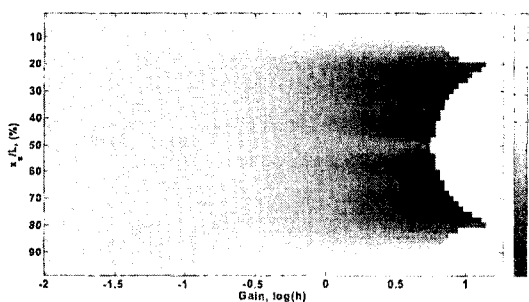


Fig. 6 Normalized control performances of active feedback control systems for cantilever beams with a external concentrated force at  $0.2L$  and a moment pair with length of  $4\%L$  from  $2\%L$  to  $98\%L$  by  $2\%L$ .

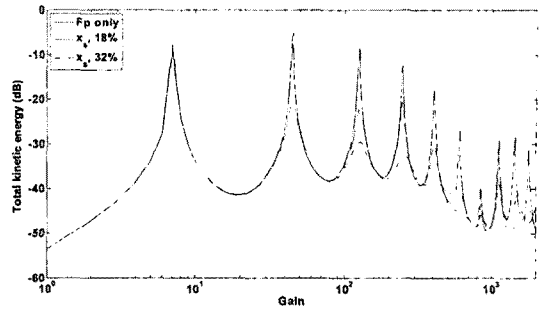


Fig. 7 Comparison of total kinetic energy of cantilever beams disturbed by an external concentrated force at  $x_p = 0.2L$  with that subjected to the direct velocity feedback control moment pair of length of  $4\%L$  at  $x_s = 0.18L$  and  $x_s = 0.24L$ .

및 32% 지점에 설치되었을 때의 total kinetic energy를 보이고 있다. PZT actuator가 보의 길이에 대하여 18%, 32% 지점에 설치되었을 때 1차, 2차 모드는 두 경우 모두 거의 변화가 없는 반면 다른 여타 모드의 경우 PZT actuator가 보의 길이에 대하여 32% 지점에 설치된 경우 18% 지점에 비하여 더 좋은 진동저감 성능을 보이고 있다.

##### 4.2 외란 위치 변화의 영향

외란은 1N의 집중하중을 적용하였으며 입력위치( $x_p$ )는 보의 길이에 대하여 10%, 20%, 50% 그리고 80%로 설정하였다. PZT actuator의 위치( $x_s$ )는 최적의 PZT actuator로 확인된 32% 지점에 고정시켰다. Fig. 8은 외란 입력 위치를 변화시켰을 때 gain에 의한 normalized total kinetic energy를 보이고 있다. 이를 통하여 외란의 입력 위치가 자유단에 가까울수록 능동진동제어가 되지 않는 것을 확인할 수 있다. 반면 PZT actuator의 위치를 변경하더라도 외란의 입력 위치가 고정단에 가까운 10%일 경우 진동 저감 효과가 높게 나타난다. 본 결과를 통하여 외란의 입력 위치가 고정단에 가까울수록 진동저감 효과가 높을 것으로 유추할 수 있다. Fig. 9는 외란의 위치별 gain에 대한 normalized total kinetic energy를 보이고 있다. 외란의 입력 위치는 고정단으로부터 보의 길이에 대하여 2%부터 98%까지 2% 간격으로 설정하였으며 PZT actuator는 32% 지점에 고정하였다. 외란의 입력 위치가 고정단으로부터 자유단 방향으로 이동할수록 진동저감 효과가 떨어지는 것을 확인할 수 있다. Normalized total kinetic energy가 최소가 되는 외란의 위치는 2% 지점이었으며 진동저감 크기는 PZT actuator의 위치가 32%의 경우 6.5dB로 계산되었다. 이것을 통하여 외란의 위치가 고정단에 가까울수록 능동진동제어를 통한 진동감소효과가 뛰어나지만 외란의 위치가 자유단에 가까이 위치할수록 능동진동제어를 통한 진동감소가 불가능하다는 것을 알 수 있다.

## 참 고 문 헌

(1) J. E. Oh, J. Shin, S. H. Park, H. S. Kim, J. S. Hong, 1996, Active Vibration Control of Flexible Cantilver Beam Using Filtered-X LMS Algorithm, KSME

(2) S. O. Reza Moheimani, Dunant Halim, Andrew J. Fleming, 2003, Spatial Control of Vibration Theory and Experiments, World Scientific

(3) Chinsuk Hong, 2005, Active Control of Resiliently-Mounted Flexible Structures, Ph.D Thesis, Institute of Sound and Vibration Research, University of Southampton

(4) Chinsuk Hong, 2006, Multichannel Active Control of Honeycomb Trim Pannels for Aircrafts, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering. Vol. 16, No. 12, pp. 1252~1253.

(5) Robert D. Blevins, 1979, Formulas for Natural Frequency and Mode Shapes, Krieger.

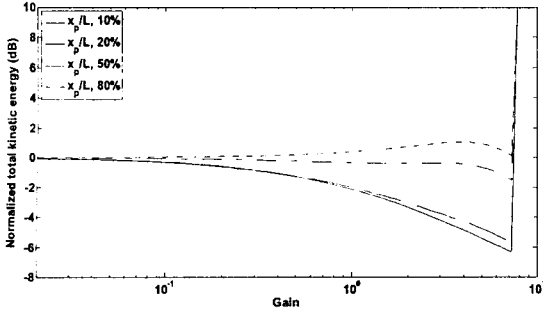


Fig. 8 Effect of the locations of primary forces at  $10\%L$ ,  $20\%L$ ,  $50\%L$  and  $80\%L$  on the normalized control performances of direct velocity feedback control systems with a secondary moment pair

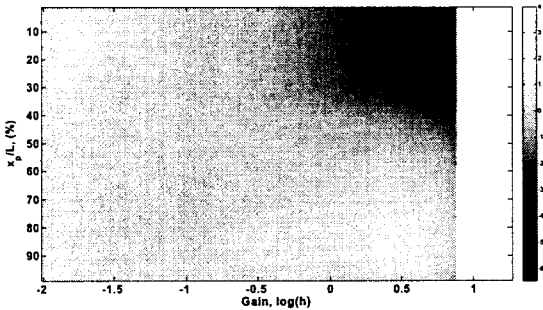


Fig. 9 Effect of the locations of primary forces from  $2\%L$  to  $98\%L$  by  $2\%L$  on the normalized control performances of direct velocity feedback control systems with a secondary moment pair

## 5. 결론

본 연구에서는 PZT actuator를 이용하여 외팔보의 능동진동제어를 적용하였다. 이를 통하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) PZT actuator의 위치에 따라 안정성을 해석한 결과 최대 gain은 PZT actuator 위치를 따라 외팔보 구조물의 중심을 기준으로 대칭적으로 나타나고 최대 gain은 PZT actuator의 위치가  $0.18L$ (또는  $0.82L$ )일 때 얻을 수 있었다.

(2) 외팔보에 속도 되먹임 제어를 적용했을 때 normalized total kinetic energy를 최소로 하는 PZT actuator 위치는  $0.32L$ (또는  $0.64L$ ) 이었으며 외란의 위치가 고정단에 가까울수록 제어성능은 우수하였다.

(3) PZT actuator 위치에 상관없이 외란의 위치가 자유단에 가까울수록 속도 되먹임 제어를 이용한 진동감소 효과가 낮아진다.