

# 종동력을 받는 크랙 보의 고유진동수에 미치는 세장비의 영향

## Influence of Slenderness Ratio on Natural Frequency of Cracked Beams with Crack

손인수†·윤한익\*·안성진\*\*·안태수\*\*

In Soo Son, Han Ik Yoon, Sung Jin Ahn and Tae Soo Ahn

### 1. 서 론

일반적으로 보의 길이에 비하여 그 단면적이 매우 작은 경우 전단변형 및 회전관성 효과는 무시할 수 있음이 잘 알려져 있다. 보의 단면적과 길이에 대한 비는 세장비(slenderness ratio)로 정의할 수 있으며, 이를 이용하여 보의 기하학적 형상과 관심 있는 모드가 어떤 것인지, 그리고 몇 개의 모드를 고려할 것인지에 따라 오일러-베르누이 보 모델과 티모센코 보 모델 중 어느 모델을 사용할지를 결정할 수 있다. 보 구조물의 진동해석 및 연구에 있어서 이 두 이론의 선택 및 적용은 연구 결과의 정확도에 있어서 중요한 문제라 할 수 있다. 참고문헌 (1), (2)에는 세장비 혹은 회전 반경(radius of gyration)과 전단변형 및 회전관성의 영향에 의한 외팔보의 고유진동수비(오일러 보에 대한 티모센코 보의 고유진동수)를 잘 나타내 주고 있다. 하지만 보에 종동력이 작용하는 경우에 대한 결과는 예시되어 있지 않다. Kounadis와 Katsikadelis는 회전관성과 전단효과가 부분적으로 고정되어진 Beck 기둥의 안정성에 미치는 영향에 대하여 연구하였으며, Saito와 Otomi<sup>(3)</sup>는 양단에 탄성 지지되고 부가질량이 존재하는 티모센코 보가 축압축력과 종동력을 받는 경우 지지된 탄성계수의 영향에 의한 보의 안정성 평가를 수행하였다. 또, Chen과 Ku는 유한요소법을 이용하여 종동력을 받는 보의 고유진동수와 동적안정성에 미치는 끝단질량의 영향에 대하여 연구하였다. 선행 연구들을 종합해 보면 종동력을 받는 보 구조물에 대한 연구들에서 그 모델들이 가지는 파라미터들은 종동력과 탄성 지지 스프링 상수, 끝단질량, 그리고 티모센코 보인 경우 세장비등이며, 대부분의 연구 결과들은 동적 안정성 해석에 관한 연구들임을 알 수 있다. 즉, 수치해석 예제의 선택에 있어서 세장비의 영향에 의하여 오일러 보 이론의 적용이 가능한지, 또는 티모센코 보 이론으로 얻은 결과

와의 오차(error)가 어느 정도인지에 대한 판단 근거가 되는 연구결과는 찾아보기 힘들다. 특히, 크랙이 존재하는 경우 크랙과 세장비가 임계 종동력 및 계의 고유진동수에 미치는 영향에 대한 결과는 찾아보기 힘들다. 따라서 이 연구의 목적은 기존에 연구되었던 많은 결과들을 바탕으로 크랙을 갖는 보에 있어서 세장비와 크랙의 영향에 따른 보의 고유진동수 및 임계 종동력의 변화를 살펴보았다.

### 2. 종동력을 받는 티모센코 보

Fig. 1 (a), (b)는 보종력과 비보종력을 받는 보를 나타낸 것이다. 여기서  $L$ 은 보의 전체 길이를 나타내며,  $M$ 과  $J$ 는 각각 끝단질량과 그의 관성 모멘트를 나타낸다. 또,  $P_a$ 와  $P_t$ 는 압축력과 종동력을 각각 나타내며,  $\eta$ 는 힘의 경사계수를 나타낸다. 만약 경사계수  $\eta=0$ 인 경우는 순수 압축력이 되어 보는 오일러 좌굴문제가 되며,  $\eta=1$ 일 때는 순수 종동력이 되어 Beck의 플러터 문제가 된다. 이 연구에서는  $\eta=1$ , 그리고 끝단질량의 영향은 고려하지 않았다. 또  $x_c$ 는 크랙의 위치를 나타낸다. Fig. 1에 보인 티모센코 보의 횡방향에 대한 무차원화 된 운동방정식은 다음과 같다.

$$Y^{iv} + \left[ \frac{(1 - \omega^2 \beta r^2) p + \omega^2 (\beta + r^2)}{(1 - p\beta)} \right] Y'' + \frac{\omega^2 (\omega^2 \beta r^2 - 1)}{(1 - p\beta)} Y = 0 \quad (1)$$

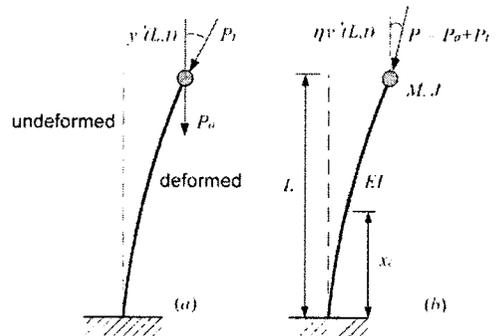


Fig. 1 Beams subjected to forces

† 교신저자; 동의대학교 기계공학과  
E-mail : isson92@deu.ac.kr  
Tel : (051) 890-2239, Fax : (051) 890-2232

\* 동의대학교 기계공학과

\*\* 동의대학교 대학원 기계공학과

여기서 (') 은 무차원 좌표  $\xi (=x/L)$ 에 대한 미분을 나타내며, 이 연구에 사용된 각 무차원 변수는 다음과 같다.

$$\omega^2 = \frac{mL^4\omega_f^2}{EI}, \quad \beta = \frac{Er^2}{\kappa G}, \quad r^2 = \frac{I}{AL^2}, \quad p = \frac{PL^2}{EI}, \quad (2)$$

$$\xi_c = \frac{x_c}{L}, \quad \alpha = \frac{a_c}{h}$$

여기서 세장비  $s$  는  $1/r$ 이다. 또, 무차원화 된 경계조건과 크랙위치에서의 연속조건은

$$Y_1(0) = \phi_1(0) = 0,$$

$$\frac{\partial \phi_2(1)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial Y_2(1)}{\partial \xi} - \phi_2(1) = \mu\omega^2\beta Y_2(1)$$

$$Y_1(\xi_c) = Y_2(\xi_c), \quad \frac{\partial^2 Y_1(\xi_c)}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 Y_2(\xi_c)}{\partial \xi^2}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^3 Y_1(\xi_c)}{\partial \xi^3} = \frac{\partial^3 Y_2(\xi_c)}{\partial \xi^3}, \quad k[\phi_2(\xi_c) - \phi_1(\xi_c)] = \frac{\partial \phi_2(\xi_c)}{\partial \xi}$$

이다. 여기서 아래첨자 1,2는 크랙에 의한 보의 분할 구간의 수이다. 식 (1~3)을 이용하여 계의 고유진동수 및 임계 종동력을 구할 수 있다.

### 3. 수치해석결과 및 고찰

이 연구에서는 수치해석에서 유도된 운동방정식을 이용하여 크랙을 가진 티모센코 보의 세장비와 크랙의 영향에 따른 임계 종동력과 고유진동수 변화에 대하여 수치해석하고 고찰 하였다.

Fig. 2는 크랙의 크기  $\alpha = 0.1$ 로 일정할 때 크랙의 위치와 세장비에 따른 보의 임계 종동력을 나타낸 것이다. 크랙 위치의 영향에 무관하게 세장비와 계의 임계 종동력은 서

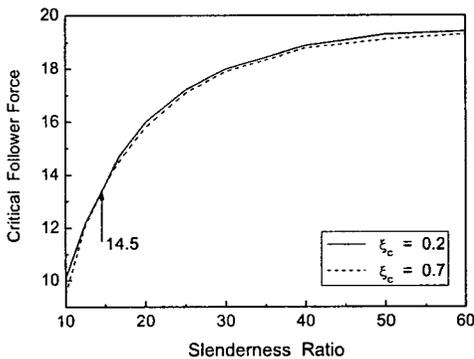


Fig. 2 Critical follower force of cracked beam

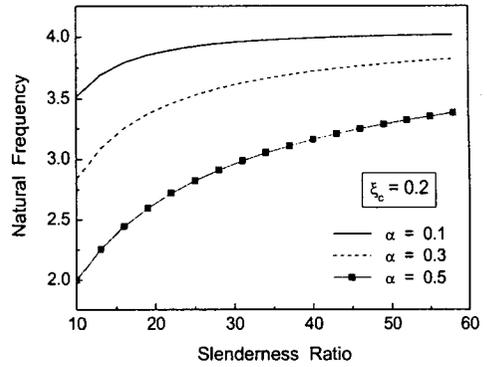


Fig. 3 Natural frequency of cracked beam

로 비례적인 경향을 보인다. 세장비가 10인 경우와 60인 경우 임계 종동력은 크랙의 위치에 관계없이 약 90%이상 증가함을 볼 수 있다.

Fig. 3은 크랙의 위치가 일정한 경우 크랙의 크기와 세장비의 영향에 따른 계의 1차 고유진동수 변화를 도시한 것이다. 세장비의 영향에 관계없이 크랙의 크기가 클수록 고유진동수는 감소하는 경향을 나타낸다. 또 세장비와 계의 고유진동수는 크랙과 무관하게 비례적임을 알 수 있다.

### 4. 결 론

이 연구에서는 외팔보에 종동력과 크랙이 존재하는 경우 보의 세장비와 크랙의 영향에 따른 계의 고유진동수비 및 임계 종동력의 변화를 살펴보았다. 전반적으로 세장비가 증가함에 따라 계의 고유진동수 및 임계 종동력은 증가하는 경향을 보인다.

### 참 고 문 헌

- (1) Harris, C. M., 1961, Shock and Vibration Handbook(Fourth Edition), McGraw-Hill, Chapter 7.
- (2) Igor, A. K. and Olga, I. L., 2001, Formulas for Structural Dynamics, McGraw-Hill, Chapter 11.
- (3) Saito, H. and Otomi, K., 1979, "Vibration and Stability of Elastically Supported Beams Carrying an Attached Mass Under Axial and Tangential Loads", Journal of Sound and Vibration, Vol. 62, No. 2, pp. 257~266.