한국소음진동공학회 2008년 추계학술대회논문집, pp.71~81

스펙트럼 요소법을 이용한 판 구조물의 램파 전달 해석

Analysis of Lamb wave propagation on a plate using the spectral element method

임기룡*·김은진**·최광규***·박현우****

Lim, Ki Lyong· Kim, Eun Jin ·Choi, Kwang Kyu ·Park, Hyun Woo

Key Words : Spectral element method (스펙트럼 요소법), Lamb wave(램파), PZT(압전소자), Euler-Bernoulli beam theory (오일러-베르누이 보 이론), Timoshenko beam theory (티모셴코 보 이론), Mindlin-Herrmann theory (민들린-허만 이론), Linear piezoelectricity (선형압전성), Hamilton's principle (해밀턴 정리), Finite element method (유한요소법)

ABSTRACT

This paper proposes a spectral element which can represent dynamic responses in high frequency domain such as Lamb waves on a thin plate. A two layer beam model under 2-D plane strain condition is introduced to simulate high-frequency dynamic responses induced by piezoelectric layer (PZT layer) bonded on a base plate. In the two layer beam model, a PZT layer is assumed to be rigidly bonded on a base beam. Mindlin-Herrmann and Timoshenko beam theories are employed to represent the first symmetric and anti-symmetric Lamb wave modes on a base plate, respectively. The Bernoulli beam theory and 1-D linear piezoelectricity are used to model the electro-mechanical behavior of a PZT layer. The equations of motions of a two layer beam model are derived through Hamilton's principle. The necessary boundary conditions associated with electro-mechanical properties of a PZT layer are formulated in the context of dual functions of a PZT layer as an actuator and a sensor. General spectral shape functions of response field and the associated boundary conditions are formulated through equations of motions converted into frequency domain. A detailed spectrum element formulation for composing the dynamic stiffness matrix of a two layer beam model is presented as well. The validity of the proposed spectral element is demonstrated through comparison results with the conventional 2-D FEM and the previously developed spectral elements.

1. 서 론

센서기술 및 IT 기술의 비약적인 발전 덕분에 사용중인 구조물로부터 실시간으로 측정된 동적 응답을 이용하여 구조물의 이상 유무를 판단해내는 구조물 건전성 감시(structural health monitoring)에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다. 특히, 가진(actuation)과 탐지(sensing)를 동시에 수행할 수 있는 능동 소자를 통해 미세균열과 같은 조기손상에 민감한 유도파(guided wave)를 발생시켜 손상을 탐지해 내는 기술이 주목을 받고 있다. 대표적 능동 소자인 Lead zirconate titanate (이하 PZT)를 두께가 얇은 판형 구조물 위에 부착할 경우, 국부손상에 민감한 동시에 먼거리까지 전파될 수 있는 유도파인 램파를 발생시킬 수 있다[1-3].

램파는 상면과 하면이 자유경계면을 가지는 무한판에서 발생하는 탄성 유도파로서 입력주파수에 따라 속도분산과 다중모드 특성을 가지고, 이러한 특성들로 인해 램파 전달 기작은 복잡한 양상을 띠게 된다[4]. 따라서, 램파가 원래 가지고 있는 고유특성과 손상이 램파에 미치는 영향을 구분하기 위해 램파의 속도분산과 다중모드 특성을 정확히 모델링 해야 한다. 특히, 판에 부착된 PZT 를 이용하여 램파를 발생시키는 경우 PZT 와 판간의 상호작용을 적절히 모델링하는 것이 중요하다.

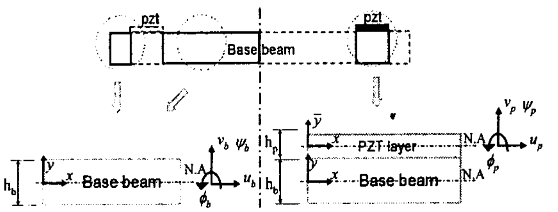
기존의 PZT 를 통해 발생한 램파를 해석할 수 있는 방법으로는 크게 해석적 기법과 수치적 기법으로 나눌 수 있다. 해석적 기법은 동탄성 지배방정식으로부터 직접 해를 구하는 방법으로 정확도가 높지만 해를 구하기 위해 판이 무한하다는 가정이 필요하다[5]. 반면, 수치적 기법은 동탄성 지배방정식의 해를 유한요소법, 경계요소법, 스펙트럼 요소법 등과 같은 근사해석기법을 이용하여 해를 구하는 방법으로 판의 경계면 및 다양한 형상에 대한 고려가 가능하다[1,6]. 구조 동역학의 관점에서 램파가 발생하는 주파수 대역은 경우에 따라 수십 kHZ 에서 수백 kHZ 의 고주파 영역이고 주파수 대역이 높아질수록 램파의 파장 길이는 수 cm 단위로 짧아진다. 이 때, 유한요소법과 경계요소법을 사용하여 정확한 해석결과를 얻기 위해 램파의 파장길이 대비 요소망을 매우 조밀하게 구성해야 한다. 왜냐하면, 임의의 형상함수를 통해 가정된 변위장을 사용하는 두 방법에서 계산되는 구조물의 관성효과가 고주파 대역으로 갈수록 점점 부정확해지기 때문이다[7]. 반면, 스펙트럼 요소법에서는 주파수 영역으로 변환된 지배방정식에서 구한 균일해를 변위장을 위한 형상함수로 사용한다. 따라서, 적은 수의 요소를 사용하더라도 고주파 영역에서 구조물의 정확한 질량 관성효과를 계산할 수 있기 때문에 정확한 해석결과를 얻을 수 있다[7].

이러한 장점을 갖는 스펙트럼 요소법을 이용하여 봉, 보 및 판 구조물의 동적 해석에 관한 연구들은 최근 꾸준히 진행되어 왔다[8-12]. 그러나 PZT 와 판의 동적상호작용을

*동아대학교 토목공학부 석사과정
**동아대학교 토목공학부 박사과정
***정회원 · 동아대학교 토목공학부 교수 · 공학박사
****정회원 · 동아대학교 토목공학부 조교수 · 공학박사 · E-mail: hwpark@dau.ac.kr

고려할 수 있는 스펙트럼 요소 모델에 대한 연구는 드물었다. Lee 등이 최초로 압전소자층과 보로 구성된 복층 보 모델과 압전소자층, 접착층, 그리고 보로 구성된 삼층 보 모델을 스펙트럼 요소로 정식화하였다[8-9]. 여기서 압전소자층과 보로 구성된 복층 모델에서 보와 압전소자층을 베르누이 보로 가정하였고 압전소자층은 1 차원 선형압전이론을 따른다고 가정하였다. 베르누이 보의 경우 저주파 대역에서 무시할 수 있지만 고주파 대역에서 무시할 수 없는 보의 질량 회전 관성 효과와 전단변형효과를 고려할 수 없다[16]. 따라서, 램파와 같은 고주파 대역의 동적거동의 경우 이러한 효과들을 적절하게 고려할 수 있는 모델이 필요하다.

이 연구에서는 압전소자층와 보로 이루어진 복층 보모델에 기반을 두고 PZT 와 보의 상호작용에 의한 고주파 대역의 동적 거동을 적절하게 모델링 할 수 있는 스펙트럼 요소를 제안한다. 판에서 발생할 수 있는 기본 램파 모드인 1 차 대칭모드(S_0모드)와 1 차 역대칭모드(A_0 모드)를 각각 잘 나타낼 수 있는 근사이론인 민들린-허만 (Mindlin-Herrmann) 이론[12]과 티모셴코 (Timoshenko) 보이론[14]을 2 차원 평면변형상태의 기저보 (base beam)에 적용한다. 판에 부착된 PZT 층의 두께가 상대적으로 얇은 것을 고려하여 PZT 층은 2 차원 평면 변형상태에서 오일러-베르누이(Euler-Bernoulli) 보이론과 1 차원 선형압전이론[15]을 적용한다. 또한, 판 위에 부착된 능동형 센서의 가진과 탐지 두가지 역할을 모두 정식화 과정에서 경계조건으로서 고려하여 스펙트럼 요소를 정식화 한다. 간단한 수치예제를 통해 제안된 스펙트럼 요소법과 유한요소법의 해석결과를 비교 검증한다.



(a) Single beam part

(b) Two layer beam part (PZT layer rigidly bonded on a base beam)

Fig. 1. Schematic illustration of a plate with surface bonded PZT patches

2. 운동 방정식

그림 1 에서는 얇은 판에 부착된 PZT 를 이용하여 램파를 가진하고 탐지할 수 있는 모델을 개념적으로 나타냈다. 전체 모델은 그림 1(a)과 같이 기저보 (base beam)로만 이루어진 단일보 모델과 그림 1(b)와 같이 기저보 모델에 램파의 가진과 탐지를 동시에 수행할 수 있는 PZT 가 강접합된 복층 보 (two-layer beam) 모델로 나눌 수 있다. 이 연구에서는 그림 1 의 전체 모델이 2 차원 평면변형상태에 놓여 있는 것으로 가정하여 기저보의 축방향거동과 휨거동을 각각 민들린 허만 이론과 티모센코 보이론을 각각 적용하여 모사한다. 여기서, 민들린-허만 이론은 기저보의 축방향과 직각방향으로 발생하는 변형을 추가로 고려할 수 있고 티모센코 보이론은 휨변형에 의해 발생하는 회전 관성효과와 전단변형을 고려할 수 있다[7,16]. 따라서 두방법이 각각 램파의 1 차 대칭모드(S_0 모드) 파와 1 차 역대칭모드(A_0 모드)를 적절하게 모사할 수 있는 것으로 알려져 있다. 그림 1(b)의 기저보에 부착된 PZT 층은 기저보에 비해 두께가 상대적으로 얇다고 가정하고 축방향 거동과 휨거동을 각각 기본 봉이론 (elementary rod theory)과 오일러-베르누이 보이론을 이용하여 모사한다[8]. PZT 의 전기역학적 재료특성은 1 차원 선형압전 이론을 따른다고 가정한다[15]. 그림 1(a)의 기저보로만 이루어진 단일보의 경우 기존 연구에 의해 스펙트럼 요소의 정식화가 수행된 바 있다[11,12]. 따라서, 이 연구에서는 기존에 수행되지 않았던 그림 1(b)의 복층 보 모델에 대한 정식화 과정을 중점적으로 다루기로 한다.

그림 1(b)의 기저보 모델에 발생하는 변위는 민들린-허만 이론과 티모센코 보이론에 의해 다음과 같이 정의된다 [7].

$$u_{base}(x,y) = u_b(x) - y\phi_b(x), \quad v_{base}(x,y) = v_b(x) + y\psi_b(x) \tag{1}$$

여기서 u_b, ψ_b, v_b, ϕ_b 는 보의 중립축에서의 x-축 방향 변위, y-축 방향 수축변형도, y-축 방향 변위 및 회전각이다. x 와 y 는 각각 그림 1 (a) 와 (b) 의 기저보 중립축의 왼쪽 끝점을 원점으로 한다.

그림 1(b)의 복층 보모델에서 PZT 층에 발생하는 변위는 베르누이 보이론과 기본 봉이론에 의해 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} u_{pzt}(x,\bar{y}) &= u_p(x) - \bar{y}\phi_p, \quad v_{pzt}(x,\bar{y}) = v_p(x), \\ \phi_p &= \frac{dv_p}{dx} \end{aligned} \tag{2}$$

여기서 u_p, v_p, ϕ_p 는 PZT 층의 중립축에서의 x-축 방향 변위, y-축 방향 변위, 그리고 회전변위이다. $\bar{y}$ 는 PZT 층의 중립축을 기준으로 한다.

그림 1(b)에서 PZT 층의 밑면과 기저보의 윗면이 강접합되었다고 가정했을때 적합조건을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} u_{pzt}(x,-\frac{h_p}{2}) &= u_{base}(x,\frac{h_b}{2}) \\ v_{pzt}(x,-\frac{h_p}{2}) &= v_{base}(x,\frac{h_b}{2}) \end{aligned} \tag{3}$$

여기서, h_b 와 h_p 는 각각 기저보와 PZT 층의 높이이다.

기저보와 PZT 층의 변위를 각각 나타내는 식(1)과

식(2)를 PZT 층과 기저보의 경계면 적합조건을 나타내는 식(3)에 대입하면 PZT 중립축에서 정의되는 응답변수를 기저보의 중립축에서 정의되는 응답변수를 이용하여 다음과 나타낼 수 있다.

$$u_p(x)=u_b(x)-\frac{h_p}{2}\cdot v_b'(x)-\frac{h_b}{2}[\frac{h_p}{2}\cdot\psi_b'(x)+\phi_b(x)]$$
$$v_p(x)=v_b(x)+\frac{h_b}{2}\psi_b(x) \tag{4}$$
$$\phi_p(x)=v_b'(x)+\frac{h_b}{2}\cdot\psi_b'(x)$$

여기서 변수 위에 (′)는 x 에 대한 미분을 의미한다. 이후 수식 전개의 편의를 위해 특별한 언급이 없는 한 x 를 생략하기로 한다.

PZT 층의 전기역학적 특성을 운동방정식에 반영하기 위해 다음과 같은 1 차원 전기역학적 구성방정식이 사용된다[8,15].

$$\begin{Bmatrix}\sigma(x)\\E(x)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11}^D & -h_{31}\\-h_{31} & B_{33}^S\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon(x)\\D(x)\end{Bmatrix} \tag{5}$$

여기서, $\sigma,\varepsilon,C_{11}^D,E,B_{33}^S,h_{31}$, 그리고 D 는 각각 PZT 층의 x-방향 응력, 변형도, 탄성계수, 전기장, 유전상수, 압전상수, 그리고 전기적 변위를 나타낸다. C_{11}^D 와 B_{33}^S 의 위첨자 D 와 S 는 각각 전기적 변위와 변형도가 0 인 상태에서 측정된 물성치를 의미한다[15]. 식 (4)와 마찬가지로 수식전개의 편의상 x 를 생략하기로 한다.

식(1), 식(2), 그리고 식(5)를 등방형 탄성체의 변위-변형도 관계식과 구성방정식과 함께 적용하여 복층 보모델에 발생되는 변형에너지를 구하면 다음과 같다[8,16].

$$\begin{aligned}U=&\frac{1}{2}\int_0^L\left[E_bI_b\phi_b'^2+\mu A_bK_1(v_b'-\phi_b)^2\right]dx\\&+\frac{1}{2}\int_0^L\begin{bmatrix}(2\mu+\lambda)A_b(u_b'^2+\psi_b^2)+2\lambda A_bu_b'\psi_b\\+\mu I_b\overline{K}_1\psi_b'^2\end{bmatrix}dx\\&+\frac{1}{2}\int_0^L\begin{bmatrix}C_{11}^DA_pu_p'^2+C_{11}^DI_p\phi_p'^2-2A_ph_{31}Du_p'\\+A_pB_{33}^SD^2\end{bmatrix}dx\end{aligned} \tag{6}$$

여기서 L, E_b, I_b , 그리고 A_b 는 각각 복층 보의 길이, 기저보의 탄성계수, 단면 2 차 모멘트, 그리고 단면적이다. 한편, I_p 와 A_p 는 각각 PZT 층의 2 차 단면모멘트와 단면적이고, μ,λ 는 기저보의 Lame 상수이다. $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$, K_1, K_2 는 각각 기저보에 사용된 민들린-허만 이론과 티모센코 이론에서 적용되는 조정계수이다[7,16].

변형에너지와 유사한 방법으로 복층 보모델의 운동에너지(T)와 포텐셜 에너지(Ω)는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}T=&\frac{1}{2}\int_0^L\left[\rho_b(I_bK_2\dot{\phi}_b^2+A_b\dot{v}_b^2)\right]dx\\&+\frac{1}{2}\int_0^L\left[\rho_b(A_b\dot{u}_b^2+I_b\overline{K}_2\dot{\psi}_b^2)\right]dx\\&+\frac{1}{2}\int_0^L\left[\rho_pA_p(\dot{u}_p^2+\dot{v}_p^2)\right]dx\end{aligned} \tag{7}$$

여기서 ρ_b,ρ_p 는 각각 기저보와 PZT 층의 밀도이고, 변수 위의 (˙)는 시간에 대한 미분을 의미한다.

$$\begin{aligned}\Omega=&-\int_0^Lq_uu_bdx-\int_0^Lq_\psi\psi_bdx-\int_0^Lq_vv_bdx-\int_0^Lq_\phi\phi_bdx\\&-\int_0^Lb\upsilon Ddx-Fu_b\Big|_0^L-Q\psi_b\Big|_0^L-Vv_b\Big|_0^L-M\phi_b\Big|_0^L\end{aligned} \tag{8}$$

여기서 q_u,q_ψ,q_v, 그리고 q_ϕ 는 각각 기저보의 중립축에 분포하는 단위길이당 축력, 수축력, 전단력, 그리고 모멘트를 나타낸다. 한편, F,Q,V, 그리고 M 은 각각 기저보의 중립축 양끝단에서 작용하는 축력, 수축력, 전단력, 그리고 모멘트를 나타낸다. υ 는 PZT 층에 발생하는 전압이다.

식 (6)-(8)에서 구한 변형에너지, 운동에너지 및 포텐셜 에너지를 다음의 해밀턴 정리에 대입하면 복층 보모델에 대한 운동방정식을 구할 수 있다[16].

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}[T-U-\Omega]dt=0 \tag{9}$$

변분원리를 적용한 식(9)의 유도과정에서 구한 복층 보모델에 대한 운동방정식은 다음과 같이 지배방정식과 힘 경계조건식으로 표시할 수 있다. 여기서 자세한 유도과정은 지면관계상 생략한다.

- 지배방정식 ($0<x<L,\quad t>0$)

$$\begin{aligned}&\rho_bA_b\ddot{u}_b+\rho_pA_p(\ddot{u}_p)-(2\mu+\lambda)A_b(u_b'')-\lambda A_b\psi_b'\\&-C_{11}^DA_pu_p''+A_ph_{31}D'=q_u\end{aligned} \tag{10a}$$

$$\begin{aligned}&\rho_bI_b\overline{K}_2\ddot{\psi}_b+\rho_pA_p(\frac{h_b}{2}\ddot{v}_p+\frac{h_bh_p}{4}\ddot{u}_p')+\lambda A_bu_b'\\&+(2\mu+\lambda)A_b\psi_b-\overline{K}_1\mu I_b\psi_b''-C_{11}^DA_p\frac{h_bh_p}{4}u_p'''\\&+A_ph_{31}(\frac{h_bh_p}{4}D'')+C_{11}^DI_p\phi_p'''=q_\psi\end{aligned} \tag{10b}$$

$$\begin{aligned}&\rho_bA_b\ddot{v}_b+\rho_pA_p(\frac{h_p}{2}\ddot{u}_p'+\ddot{v}_p)-GA_bK_1(-\phi_b'+v_b'')\\&-C_{11}^DA_p\frac{h_p}{2}u_p'''+A_ph_{31}(\frac{h_p}{2}D'')+C_{11}^DI_p\phi_p'''=q_v\end{aligned} \tag{10c}$$

$$\begin{aligned}&\rho_bI_bK_2\ddot{\phi}_b-\rho_pA_p\frac{h_b}{2}\ddot{u}_p-E_bI_b\phi_b''\\&-GA_bK_1(-\phi_b+v_b')+C_{11}^DA_p\frac{h_b}{2}u_p''-A_ph_{31}(\frac{h_b}{2}D')\\&=q_\phi\end{aligned} \tag{10d}$$

$$A_p h_{31}(u'_p) - A_p B_{33}^S D + b\upsilon = 0 \tag{10e}$$

여기서 식 (10a)-(10e)는 각각 경계조건을 만족시키는 변분 $\delta u_b, \delta\psi_b, \delta v_b, \delta\phi_b$, 그리고 δD에 대응한다.

- 힘 경계조건식 ($x=0$ or L, $t>0$)

$$(2\mu+\lambda)A_b u'_b + \lambda A_b \psi_b + C_{11}^D A_p u'_p - A_p h_{31} D = F \tag{11a}$$

$$\overline{K}_1 \mu I_b \psi'_b - \rho_p A_p \frac{h_b h_p}{4}\ddot{u}_p + C_{11}^D A_p \frac{h_b h_p}{4} u''_p - A_p h_{31}\frac{h_b h_p}{4} D' - C_{11}^D I_p \frac{h_b}{2}\phi''_p = Q \tag{11b}$$

$$GA_b K_1(-\phi_b + v'_b) - \rho_p A_p \frac{h_p}{2}\ddot{u}_p + C_{11}^D A_p \frac{h_p}{2} u''_p - A_p h_{31}\frac{h_p}{2} D' - C_{11}^D I_p \phi''_p = V \tag{11c}$$

$$E_b I_b \phi'_b - C_{11}^D A_p \frac{h_b}{2} u'_p + A_p h_{31}\frac{h_b}{2} D = M \tag{11d}$$

$$-C_{11}^D A_p \frac{h_p}{2} u'_p + A_p h_{31}\frac{h_p}{2} D + C_{11}^D I_p \phi'_p = 0 \tag{11e}$$

여기서 식 (11a)-(11e)는 각각 경계조건을 만족시키는 변분 $\delta u_b, \delta\psi_b, \delta v_b, \delta\phi_b$, 그리고 $\delta v'_b$에 대응한다.

식(5)에 $\varepsilon = u'_p$ 와 $E = \upsilon / h_p$ 를 대입하여 PZT 층의 전기적 변위를 전압과 PZT 층 중립축의 축방향 변위에 대해 나타낼 수 있다.

$$D = \frac{h_{31}}{B_{33}^S}u'_p + \frac{b\upsilon}{A_p B_{33}^S},\quad D' = \frac{h_{31}}{B_{33}^S}u''_p,\quad D'' = \frac{h_{31}}{B_{33}^S}u'''_p \tag{12}$$

여기서, PZT 층의 전압이 PZT 전체에 대해 일정하다는 조건을 적용했다.

식(12)를 식(10)에 대입하면 지배방정식에 포함되어 있는 전기적 변위에 대한 항을 소거한 4 개의 식으로 다시 표현할 수 있다. 특히, 식(10e)는 식(12)와 등가관계이다.

- 지배방정식 ($0<x<L$, $t>0$)

$$\rho_b A_b \ddot{u}_b + \rho_p A_p(\ddot{u}_p) - (2\mu+\lambda)A_b(u''_b) - \lambda A_b \psi'_b - E_p A_p u''_p = q_u \tag{13a}$$

$$\rho_b I_b \overline{K}_2 \ddot{\psi}_b + \rho_p A_p\left(\frac{h_b}{2}\ddot{v}_p + \frac{h_b h_p}{4}\ddot{u}'_p\right) + \lambda A_b u'_b + (2\mu+\lambda)A_b\psi_b - \overline{K}_1\mu I_b \psi''_b - E_p A_p \frac{h_b h_p}{4}u'''_p + C_{11}^D I_p \frac{h_b}{2}\phi'''_p = q_\psi \tag{13b}$$

$$\rho_b A_b \ddot{v}_b + \rho_p A_p\left(\frac{h_p}{2}\ddot{u}'_p + \ddot{v}_p\right) - GA_b K_1(-\phi'_b + v''_b) - E_p A_p \frac{h_p}{2}u'''_p + C_{11}^D I_p \phi'''_p = q_v \tag{13c}$$

$$\rho_b I_b K_2 \ddot{\phi}_b - \rho_p A_p \frac{h_b}{2}\ddot{u}_p - E_b I_b \phi''_b - GA_b K_1(-\phi_b + v'_b) + \frac{h_b}{2}E_p A_p u''_p = q_\phi \tag{13d}$$

여기서 $E_p = C_{11}^D - h_{31}^2 / B_{33}^S$, $d_{31} = h_{31}/(E_p B_{33}^S)$ 이다.

마찬가지 방법으로 식 (12)를 식 (11)에 대입하면 힘 경계조건식에 포함되어 있는 전기적 변위를 소거하고 전압에 대한 항으로 다음과 같이 다시 나타낼 수 있다.

- 힘 경계조건식 ($x=0$ or L, $t>0$)

$$(2\mu+\lambda)A_b u'_b + \lambda A_b \psi_b + E_p A_p u'_p - E_p b d_{31}\upsilon = F \tag{14a}$$

$$\overline{K}_1 \mu I_b \psi'_b - \rho_p A_p \frac{h_b h_p}{4}\ddot{u}_p + E_p A_p \frac{h_b h_p}{4}u''_p - C_{11}^D I_p \frac{h_b}{2}\phi''_p = Q \tag{14b}$$

$$GA_b K_1(-\phi_b + v'_b) - \rho_p A_p \frac{h_p}{2}\ddot{u}_p + E_p A_p \frac{h_p}{2}u''_p - C_{11}^D I_p \phi''_p = V \tag{14c}$$

$$E_b I_b \phi'_b - E_p A_p \frac{h_b}{2}u'_p + E_p b d_{31}\frac{h_b}{2}\upsilon = M \tag{14d}$$

$$-E_p A_p \frac{h_p}{2}u'_p + E_p b d_{31}\frac{h_p}{2}\upsilon + C_{11}^D I_p \phi'_p = 0 \tag{14e}$$

힘 경계조건 식(14a), 식(14d), 그리고 식(14e)에 포함된 전압(υ)은 PZT 가 가진소자(actuating transducer)로 사용되는지 탐지소자(sensing transducer)로 사용되는지의 여부에 따라 각각 기지값이 될 수도 있고 미지값이 될 수도 있다.

먼저, 가진소자로 사용되는 경우 외부의 전원에 의해 전압이 주어지기 때문에 식 (14)의 전압(υ)은 기지값이 된다. 따라서 전압이 포함된 항을 식의 우변으로 넘기면 일종의 고정단력 또는 고정단 모멘트로서 작용하게 된다.

반면, 탐지소자로 사용되는 경우 가진소자의 경우와 달리 전압은 미지수가 되고 추가적인 조건식이 필요하다. 일반적으로 탐지소자로 사용되는 PZT 의 경우 전기회로 이론상으로 매우 높은 임피던스를 갖게 되고 이 경우 회로를 따라서 흐르는 자유전하량의 값을 0 으로 가정할 수 있다. 따라서, PZT 층이 탐지소자로 사용되는 경우 전기적 변위에 대해 다음의 식을 만족해야 한다[15].

$$\int_0^L D dx = 0 \tag{15}$$

식(12)의 D 를 식(15)에 대입하여 PZT 층이 탐지소자의 역할을 할 때 전압을 다음과 같이 PZT 층의 중립축 양 끝단의 축방향 변위로 표현할 수 있다.

$$\upsilon = -\frac{h_p h_{31}}{L}[u_p(L) - u_p(0)] \tag{16}$$

식(16)을 식(14)에 대입하면 PZT 소자가 탐지소자의 역할을 할 때 복층 보모델의 힘의 경계조건식을 구할 수

있다.

3. 스펙트럼 요소 정식화

PZT 층과 기저보가 강접합된 복층 보모델에 대한 스펙트럼 요소를 정식화하기 위해 먼저 2 장에서 유도된 지배방정식 식(13)과 힘의 경계조건 식(14)를 시간 영역에서 주파수 영역으로 변환해야 한다. 이를 위해 기저보 중립축에서 정의된 응답변수들을 다음의 스펙트럼 식으로 표시한다[7].

$$
\begin{aligned}
u_b(x,t) &= \sum_n \hat{u}_n(x,\omega_n)e^{i\omega_n t}, \\
\psi_b(x,t) &= \sum_n \hat{\psi}_n(x,\omega_n)e^{i\omega_n t} \\
v_b(x,t) &= \sum_n \hat{v}_n(x,\omega_n)e^{i\omega_n t}, \\
\phi_b(x,t) &= \sum_n \hat{\phi}_n(x,\omega_n)e^{i\omega_n t}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

여기서 $\hat{u},\hat{\psi},\hat{v}$, 그리고 $\hat{\phi}$ 는 이산화된 n 번째 각주파수 ω_n 에서 각 응답변수들에 대응하는 스펙트럼 계수들(또는 Fourier coefficients)이다. 식 (17)의 스펙트럼 계수들의 일반해의 형태는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\hat{u}_n &= u_0 e^{-ik(\omega_n)x}, \quad \hat{\psi}_n = \psi_0 e^{-ik(\omega_n)x} \\
\hat{v}_n &= v_0 e^{-ik(\omega_n)x}, \quad \hat{\phi}_n = \phi_0 e^{-ik(\omega_n)x}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

여기서 k 는 ω_n 에 대응하는 파수이다.

지배방정식 식(13)에 식 (4)를 대입하여 식 (13)을 기저보의 중립축의 응답변수들로 나타낸 후, 여기에 식 (17)을 대입하면 u_0,ψ_0,v_0,ϕ_0 에 대한 행렬식을 유도할 수 있다.

$$
\mathbf{C}\begin{bmatrix} u_0 \\ \psi_0 \\ v_0 \\ \phi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_0 \\ \psi_0 \\ v_0 \\ \phi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\tag{19}
$$

여기서 행렬 $\mathbf{C}$ 의 각 성분들은 부록(A1)을 참조하기 바란다. 식(19)의 해가 무의미한 해가 되지 않기 위해서 $\det(\mathbf{C})=0$ 이 성립해야 한다. 이 조건을 이용하여 파수 k 에 대해 짝수차 항만 존재하는 10 차 다항식을 구할 수 있다. 특성방정식이 k 에 대한 일반해가 존재하지 않는 고차방정식이므로 동반행렬(companion matrix)방법을 이용하여 해를 수치적으로 계산한다[17]. 이 경우 절대값은 같고 부호가 다른 두 쌍의 실수해와 세 쌍의 켤레복소수 해를 얻을 수 있다. 특성방정식을 만족시키는 각각의 k 값에 대응되는 응답변수들의 고유벡터를 식 (19)로부터 계산할 수 있다. 여기서는, 고유벡터를 ϕ_0 에 대해 기준화시킨다.

각주파수 ω_n 에서 계산된 5 쌍의 k 값과 각 응답변수에 대응하는 고유벡터를 식 (18)에 대입하면 식 (17)의 스펙트럼 계수를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\hat{u}_n &= \sum_{i=1}^{5} a_i R_i e^{-ik_i x} + \sum_{i=1}^{5} a_{i+5} R_i e^{-ik_i(L-x)} \\
\hat{\psi}_n &= \sum_{i=1}^{5} a_i S_i e^{-ik_i x} - \sum_{i=1}^{5} a_{i+5} S_i e^{-ik_i(L-x)} \\
\hat{v}_n &= \sum_{i=1}^{5} a_i T_i e^{-ik_i x} - \sum_{i=1}^{5} a_{i+5} T_i e^{-ik_i(L-x)} \\
\hat{\phi}_n &= \sum_{i=1}^{5} a_i e^{-ik_i x} + \sum_{i=1}^{5} a_{i+5} e^{-ik_i(L-x)}
\end{aligned}
\tag{20}
$$

여기서 R_i,S_i,T_i 는 식(19)에서 ϕ_0 에 의해 기준화된 u_0,ψ_0, 그리고 v_0 에 대응되는 고유벡터들이고, a_i 는 미지의 상수로서 경계조건에 의해 결정된다.

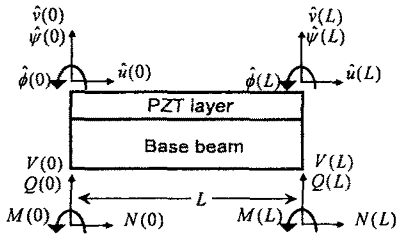


Fig. 2 Spectral element for a two-layer beam with a PZT layer and a base beam

그림 2 는 복층 보모델의 2 절점 스펙트럼 요소를 도시하였다. 그림 2 와 같이 스펙트럼 요소의 변위벡터와 힘벡터는 각각 주파수 영역으로 변환된 응답변수들과 절점력들로 구성된다. 이중, 스펙트럼 요소의 변위벡터는 식 (20)에 $x=0$ 과 $x=L$ 을 대입하여 다음과 같은 행렬식으로 나타낼 수 있다.

$$
\mathbf{d} = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{A} \tag{21}
$$

여기서 $\mathbf{d},\mathbf{H}(\omega)$ 와 $\mathbf{A}$ 는 각각 2 절점 스펙트럼 요소의 변위벡터, 형상함수 행렬 및 계수벡터이며 다음과 같다. $\mathbf{H}(\omega)$ 의 각 성분들은 부록(A2)을 참조하기 바란다.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{d} &\equiv \left[\hat{u}(0),\hat{\psi}(0),\hat{v}(0),\hat{\phi}(0),\hat{u}(L),\hat{\psi}(L),\hat{v}(L),\hat{\phi}(L)\right]^T \\
\mathbf{A} &\equiv \left[a_1,a_2,\cdots,a_8,a_9,a_{10}\right]^T
\end{aligned}
\tag{22}
$$

또한, 그림 2 에서 정의된 스펙트럼 요소의 절점력은 식(14)에 식(20)을 대입하여 구할 수 있다.

$$
\mathbf{F} = \mathbf{G}(\omega)\mathbf{A} - \mathbf{F}_{\upsilon} \tag{23}
$$

여기서 $\mathbf{F},\mathbf{F}_{\upsilon}$ 와 $\mathbf{G}(\omega)$ 는 경계조건에 대응하는 힘벡터, 외부 전원에 의한 고정단력 벡터, 그리고 경계조건 행렬

이고 다음과 같다. $\mathbf{G}(\omega)$ 의 각 성분들은 부록(A3)과 (A4)를 참조하기 바란다.

$$\mathbf{F}=\left[-F(0)\quad -Q(0)\quad -V(0)\quad -M(0)\quad F(L)\quad Q(L)\quad V(L)\quad M(L)\quad 0\quad 0\right]^T \tag{24a}$$

- PZT 층이 가진소자로 작용할 때:

$$\mathbf{F}_\upsilon=\left[-E_p b d_{31}\nu\quad 0\quad 0\quad E_p b d_{31}\frac{h_b}{2}\upsilon\quad E_p b d_{31}\upsilon\quad 0\quad 0\quad -E_p b d_{31}\frac{h_b}{2}\upsilon\quad E_p b d_{31}\frac{h_p}{2}\upsilon\quad -E_p b d_{31}\frac{h_b}{2}\upsilon\right]^T \tag{24b}$$

- PZT층이 탐지소자로 작용할 때:

$$\mathbf{F}_\upsilon=0 \tag{24c}$$

2 장에서 기술한 것과 같이 PZT 층이 가진소자로 작용하는지 탐지소자로 작용하는지에 따라 전압에 의한 고정단력 벡터 $\mathbf{F}_\upsilon$ 와 경계조건 행렬 $\mathbf{G}(\omega)$ 가 달라지는 것에 유의해야 한다. 만약 PZT 층이 가진소자로 작용하는 경우 외부전원에 의해 기지의 전압이 공급되기 때문에 $\mathbf{F}_\upsilon$ 는 식 (24b)와 같이 쓸 수 있다. 하지만, PZT 층이 탐지소자로 작용하는 경우 식 (16)에 따라서 전압은 외부에서 주어지지 않고 미지의 응답변수에 대해 표현되므로 $\mathbf{F}_\upsilon$ 는 식 (24c)와 같이 된다.

식(21)의 $\mathbf{H}(\omega)$ 가 정방행렬이 아니므로 식 (21)을 바로 식 (23)에 대입하여 힘벡터와 변위벡터의 강성도 관계식을 유도할 수 없다. 힘벡터과 변위벡터의 스펙트럼 강성도 행렬식을 유도하기 위해서 다음과 같은 응축(condensation)과정을 적용한다.

먼저, 식(23)의 $\mathbf{F}_\upsilon$ 를 좌변으로 이항시킨 후 좌변 벡터를 다음과 같이 크기가 다른 두개의 벡터 $\boldsymbol{\phi}_1$ 와 $\boldsymbol{\phi}_2$ 로 나타낼 수 있다.

$$[\boldsymbol{\phi}_1\quad \boldsymbol{\phi}_2]^T\equiv\mathbf{F}+\mathbf{F}_\upsilon=\mathbf{G}(\omega)\mathbf{A} \tag{25}$$

여기서, $\boldsymbol{\phi}_1$ 과 $\boldsymbol{\phi}_2$ 는 크기가 각각 (8×1)과 (2×1)인 벡터를 나타낸다.

마찬가지 방법으로 식(22)의 계수벡터 $\mathbf{A}$ 를 다음과 같이두개의 벡터 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 와 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 로 다시 쓸 수 있다.

$$\mathbf{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2]^T \tag{26}$$

여기서 $\boldsymbol{\alpha}_1\equiv(a_1,a_2,\cdots,a_8)^T,\boldsymbol{\alpha}_2\equiv(a_9,a_{10})^T$.

식(21)과 식(26)을 이용하면 다음과 같은 관계식을 세울 수 있다.

$$\begin{pmatrix}\mathbf{d}\\ \boldsymbol{\alpha}_2\end{pmatrix}=\tilde{\mathbf{H}}(\omega)\mathbf{A} \tag{27}$$

여기서,

$$\tilde{\mathbf{H}}(\omega)=\begin{bmatrix} & & & & \mathbf{H}(\omega) & & & & & \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix} \tag{28}$$

식 (27)을 식 (25)에 대입하여 $\mathbf{A}$ 를 소거하면 식 (25)를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\phi}_1\\ \boldsymbol{\phi}_2\end{pmatrix}=\tilde{\mathbf{K}}(\omega)\begin{pmatrix}\mathbf{d}\\ \boldsymbol{\alpha}_2\end{pmatrix} \tag{29}$$

여기서 $\tilde{\mathbf{K}}(\omega)\equiv\mathbf{G}(\omega)\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\omega)$ 이다.

식(29)의 $\tilde{\mathbf{K}}(\omega)$ 를 $\mathbf{d}$ 와 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 에 연관된 행렬들로 분할하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\phi}_1\\ \boldsymbol{\phi}_2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{K}}_{dd}(\omega) & \tilde{\mathbf{K}}_{d\alpha}(\omega)\\ \tilde{\mathbf{K}}_{\alpha d}(\omega) & \tilde{\mathbf{K}}_{\alpha\alpha}(\omega)\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{d}\\ \boldsymbol{\alpha}_2\end{pmatrix} \tag{30}$$

식(30)을 $\mathbf{d}$ 에 대한 식으로 정리하기 위해 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 를 소거시키면 다음과 같이 스펙트럼 동적 강성도 행렬 $\mathbf{S}(\omega)$ 를 구할 수 있다.

$$\mathbf{S}(\omega)\mathbf{d}=\mathbf{f} \tag{31}$$

여기서 $\mathbf{S}(\omega)\equiv\tilde{\mathbf{K}}_{dd}-\tilde{\mathbf{K}}_{d\alpha}\tilde{\mathbf{K}}_{\alpha\alpha}^{-1}\tilde{\mathbf{K}}_{\alpha d}$ 이고 $\mathbf{f}\equiv\boldsymbol{\phi}_1-\tilde{\mathbf{K}}_{d\alpha}\tilde{\mathbf{K}}_{\alpha\alpha}^{-1}\boldsymbol{\phi}_2$ 이다.

4. 수치 예제

제안된 스펙트럼 요소를 검증하기 위해 두가지 예제에 대한 수치해석을 수행하였다. 첫번째 예제는 그림 3 의 2 차원 평면변형조건의 예제 모델에 대해 주파수 응답함수를 구하는 문제이다. 이 예제에서 제안된 방법을 Lee 등에 의해 제안된 스펙트럼 요소법(이하 Lee 의 방법)[8]과 2 차원 유한요소법의 결과와 비교하였다. 사용된 예제모델의 제원은 평면변형조건만 제외하면 Lee 등이 사용한 제원과 동일하다[8]. 계산한 주파수 응답함수는 그림 3 의 PZT 층에 단위전압이 가해졌을 때 기저보 중립축 오른쪽 끝단에서 발생하는 수직방향 변위에 관한 것이다.

먼저 제안된 방법과 Lee 등에 의한 방법이 동일하게 예제 모델을 2 개의 기저보 스펙트럼 요소와 1 개의 가진 복층 보 스펙트럼 요소를 사용하여 구성하였다. 예제 모델에 대한 해석해를 직접 구하는 것이 불가능하다. 해석해에 근접한 결과를 얻기 위해 2 차원 유한요소법에서 매우 조밀한 요소망을 사용하였다. 구체적으로, PZT 층은 406 개(요소당 약 0.5mm × 0.38mm) 의 8 절점 평면변형 압전요소를 사용하였고, 기저보는 2615 개(요소당 약 0.5mm × 0.5mm) 8 절점 이차 평면변형 고체요소를 사용하였다. 유한요소해석은 KISTI 슈퍼컴퓨팅 센터의 IBM p595 에 설치된 ABAQUS 6.7-4 의 Steady-state dynamic analysis, direct 을 이용해서 수행하였다[18].

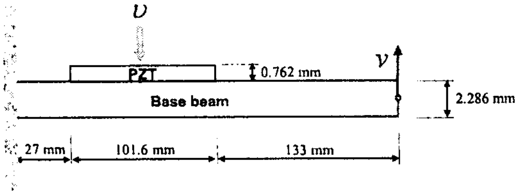
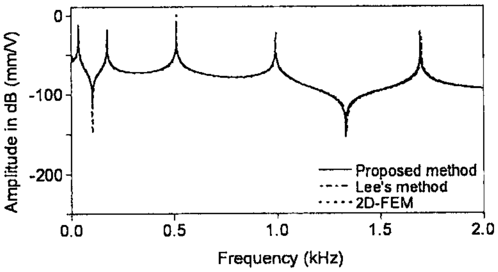
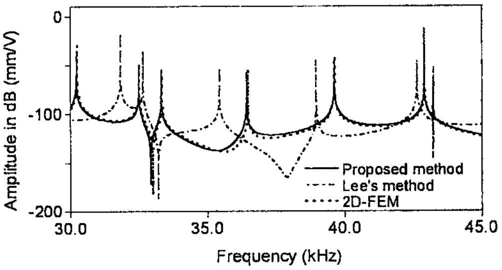


Fig. 3 A beam with partially bonded PZT layer[8]

그림 4 는 제안된 방법, Lee 의 방법, 그리고 2 차원 유한요소법에 의한 방법에 의해 계산된 주파수 응답함수의 크기를 데시벨로 나타냈다. 그림 4(a)는 전체 구조물 규모에서 모드형상이 결정되는 비교적 낮은 주파수 대역인 0 에서 2kHz 에서의 주파수 응답함수를 보여준다. 세가지 방법이 모두 일치하는 결과를 보여주고 있다. 그림 4(b)는 구조물의 국부적인 모드형상이 두드러지는 비교적 높은 주파수 대역인 30kHz 에서 45kHz 에서 주파수 응답함수를 나타낸다. 제안된 방법과 2 차원 유한요소법에 의해 계산된 주파수 응답함수를 비교했을 때 그림 4(a)에 비해 약간 차이가 발생하지만 전체적으로 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 한편, Lee 의 방법의 경우 그림 4(a)과 달리 2 차원 유한요소법 결과와 비교했을 때 주파수 전영역에 걸쳐서 큰 차이가 발생한다. 이 현상은 Lee 의 방법에서 사용된 스펙트럼 요소에서 기저보에 대한 질량 회전 관성 효과와 전단변형효과를 무시하기 때문에 발생하는 현상이다. 제안된 방법에서는 이러한 효과들이 스펙트럼 요소 정식화에서 고려되었기 때문에 그림 4(b)와 같이 정확한 결과를 보여준다.



(a) Frequency range (0 to 2kHz)



(b) Frequency range (30-45kHz)

Fig. 4 Frequency response function of vertical displacement at the free end of a base beam in Fig 3.

그림 5 은 제안된 방법과 Lee 의 방법에서 각각 계산된 구한 공진주파수값들과 유한요소해석에서 구한 공진주파수값들의 상대오차(%)를 나타냈다. 여기서, 공진주파수값들은 각각의 방법에서 계산된 기저보 자유단의 수직 및 수평 주파수 응답함수의 최대 정점들로부터 구하였다. 그림 5 의 오른쪽 축은 40 차 모드까지 2 차원 유한요소법에서 구한 공진주파수를 나타냈다. 제안된 방법의 경우 40 차 모드까지 2 차원 유한요소법과 비교하여 최대 ±0.2%의 오차범위내의 정확한 결과를 보여주었다. 반면, Lee 의 방법의 경우 저차모드에서는 비교적 정확하지만 고주파수 대역으로 올라갈수록 상대오차가 점점 더 증가하여 40 차 모드에서는 상대오차가 10%을 초과하고 있다. 그림 5 에서 화살표로 표시한 지점들이 바로 축방향 변형이 지배적으로 나타나는 모드들로서 휨방향 변형 모드에 비해 30 차 모드 이하에서는 비교적 작은 오차를 보여준다. 하지만, 30 차 모드(약 40kHz) 이상으로 올라가면서 축방향 모드에 대응하는 공진주파수의 상대오차도 점차 증가하는 것을 알 수 있다.

그림 4 와 그림 5 의 결과로부터 제안된 방법이 고주파수 대역으로 갈수록 기존의 스펙트럼 요소법에 비해 해석결과가 정확한 것을 알 수 있다.

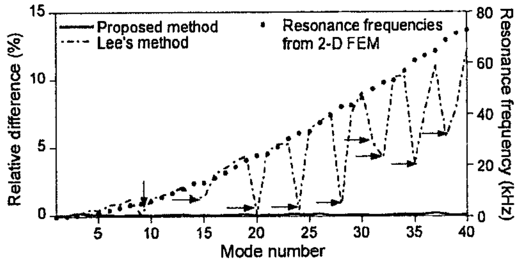


Fig. 5 Relative difference of the resonance frequencies between spectral element methods [proposed method and Lee' s methods] and 2-D FEM up to the 40^{th} mode. Note that the arrows indicate the axial deformation dominant modes.

그림 6 은 고주파 대역에서 판에 부착된 가진소자(PZT A)에 의해 기저보를 통해 전달된 램파가 탐지소자 (PZT B)에서 발생시키는 출력전압을 구하기 위한 예제모델이다. 앞의 예제와 마찬가지로 2 차원 평면변형조건을 가정했으며 기저보의 두께는 6mm 이며, 탄성계수가 70GPa 이고 포아송비는 0.33 이다. PZT A 와 B 모두 길이가 1cm 이고, 두께가 0.507mm 인 PSI-5A4E 유형[19]을 사용했다. 그림 7 과 같이 가진소자인 PZT A 에 1 차 대칭모드(S_0 모드)와 역대칭모드(A_0 모드)만 나타날 수 있도록 중앙주파수 100kHz 협대역(narrowband) 입력 전압을 가했다.

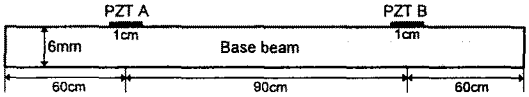


Fig. 6 A beam model with actuating and sensing PZT transducers for transient Lamb wave propagation in time domain

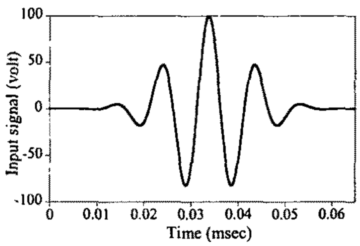


Fig. 7 100kHz Input tone burst signal exerted at PZT A

제안된 방법에서 스펙트럼 요소는 3 개의 기저보 요소와 1 개의 가진 복층 보요소 (PZT A 부분), 그리고 1 개의 탐지 복층 보요소 (PZT B 부분)을 사용했다. 첫번째 예제와 마찬가지로 해석해를 직접 구하는 것이 불가능하므로 해석해에 근접한 결과를 얻기 위해 2 차원 유한요소법의 경우 매우 조밀한 요소망을 사용하였다. 유한요소법은 20 개의 8 절점 이차 평면변형 압전요소(1mm × 0.507mm 크기)와 12600 개의 8 절점 이차 평면변형 고체요소(1mm × 1mm 크기)를 사용하였다. 시간영역에서 PZT B 에 발생하는 출력전압을 정확하게 계산하기 위해 ABAQUS 6.7-4 의 중앙차분법을 이용한 내연적 시간적분 기법을 적용하였다.

그림 8 은 제안된 스펙트럼 요소법과 유한요소법에 의한 해석결과를 보여주고 있다. 해석에 소요된 시간은 제안된 방법이 유한요소법에 비해 월등히 적었다. 반면 제안된 방법에 의한 해석결과가 유한요소법에 의한 결과와 비교했을 때 출력신호의 크기는 다소간의 차이가 있지만, 각 모드의 도달시간과 분산특성은 매우 잘 일치하고 있음을 확인할 수 있다.

이와 같이 제안된 방법은 유한요소법에 비해 매우 적은 개수의 요소를 사용하면서도 PZT 층에 의해 발생하는 램파의 가진, 전달 그리고 탐지 문제를 시간영역에서 적절하게 예측할 수 있음을 알 수 있었다.

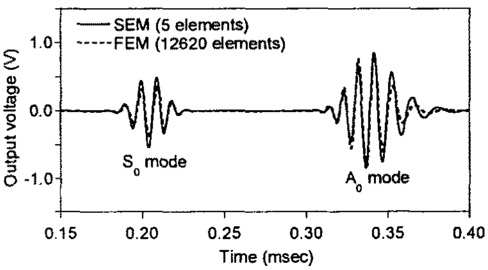


Fig. 8 Comparison results between the proposed method and 2-D FEM

5. 결론 및 향후 연구 방향

이 연구에서는 2 차원 평면변형조건에서 PZT 층과 기저보가 강접한 된 복층 보 모델에 대한 스펙트럼 요소를 제안하였다. 특히, 고주파 영역에서 복층 보모델에서 기저보의 거동을 정확하게 모사하기 위해 민들린 허만 이론과 티모센코 보이론을 도입하였다. 복층 보모델의 PZT 층이 가지는 가진소자와 탐지소자의 기능을 고려하여 이에 맞는 적절한 경계조건을 제시하고 스펙트럼 요소 정식화에 반영하였다. 또한, 응축과정을 통해 복층 보 모델을 위한 2 절점 스펙트럼 요소의 동적 강성도 행렬 유도하였다.

수치예제에서 제안된 방법을 2 차원 유한요소법과 기존의 스펙트럼 요소법과 비교했다. 먼저, PZT 층이 기저보에 일부 부착된 내민보 문제에서는 PZT 층에 가해진 전압에 의해 내민보의 자유단에서 발생한 수직변위에 대한 주파수 응답함수를 해석하였다. 그 결과 기존의 스펙트럼 요소법의 경우 고주파대역으로 갈수록 2 차원 유한요소법과 큰 차이를 보이는 반면 제안된 방법은 모든 주파수 대역에서 고르게 정확한 결과를 보여주었다. 특히, 이러한 차이는 축방향 변형 모드보다 휨변형 모드에서 두드러지게 나타났다. 이는 기존의 스펙트럼 요소법이 기저보의 휨변형 모드의 회전관성효과와 전단변형효과를 고려하지 못했기 때문이 발생한 현상이다.

두번째 예제에서는 PZT 층에 의해 기저보에 발생하는 램파의 전달 및 탐지문제에 제안된 방법을 적용하였다. 그 결과 제안된 방법은 시간영역에서 램파의 고유 특성인 분산특성을 잘 나타내는 것을 알 수 있었다. 제안된 방법은 조밀한 요소망을 사용해야 하는 유한요소법에 비해 적은 개수의 요소로 PZT 에 의한 램파의 가진, 전달, 탐지를 적절하게 모델링할 수 있었다.

향후 고주파 대역에서 중요한 역할을 하는 것으로 알려져 있는 PZT 층과 기저보 사이의 접착층의 상호작용 고려해야 할 예정이다. 또한, 노치형태의 균열 및 박리와 같은 손상이 램파와 같은 고주파 대역에서 구조물의 과도 응답에 주는 영향을 모사할 수 있는 스펙트럼 요소의 개발도 진행중에 있다.

후 기

이 논문은 정부재원(과학기술부 방사선 기술개발사업비)으로 한국과학재단의 지원을 받아 연구되었음 (M20703000015-07N0300-01510).

참 고 문 헌

(1). Raghavan, A., Cesnik, C.E.S., 2007, " Review of Guided-wave Structural Health Monitoring" , The Shock and Vibration Digest, Vol. 39, No. 91, pp.91-114.

(2) Giurgiutiu, V., 2003, " Embedded NDE with piezoelectric wafer active sensors in aerospace

applications" . Journal of Materials (http://www.tms.org/pubs/journals/JOM/0301/Giurgiutiu/Giurgiutiu-0301.html).

(3) Park, S.H., Lee, J.J., Yun, C-B. and Roh, Y., 2005, " Application of Lamb Waves and Probabilistic Neural Networks for Health Monitoring of Joint Steel Structures" , Journal of KSNVE Vol.15, No.1, pp.53~62

(4) Rose, J.L., 1999, Ultrasonic Waves in Solid Media, Cambridge University Press.

(5) Raghavan, A., Cesnik, C.E.S., 2005, " Finite-dimensional piezoelectric transducer modeling for guided wave based structural health monitoring" , Smart Materials Structures, Vol. 14, pp 1448-1461

(6). Lee, U., Kim, J. and Leung, A.Y.T., 2000, " The Spectral Element Method in Structural Dynamics" , The Shock and Vibration Digest, Vol. 32, No. 6, pp.451-465.

(7). Doyle, J.F., 1997, " Wave Propagation in structure: Spectral Analysis Using Fast Discrete Fourier Transforms-2nd ed" , Springer-Verlag.

(8). Lee, U., Kim, J., 2000, " Dynamics of elastic-piezoelectric two-layer beams using spectral element method" , International Journal of Solids and Structures, Vol. 37, No. 32, pp.4403-4417.

(9) Lee, U., Kim, J., 2001, " Spectral element modeling for the beams treated with active constrained layer damping" , Int. Journal of Solids and Structures, Vol. 38, Iss 32, pp 5679-5702

(10). Chakraborty, A., Gopalakrishnan., S., 2005, " A spectrally formulated plate element for wave propagation analysis in anisotropic material" , Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 194, pp4425-4446.

(11) Krawczuk, M., Grabowska, J., Palacz, M., 2006, " Longitudinal wave propagation. Part I-Comparison of rod theories" , Journal of Sound and Vibration, Vol. 295, Iss. 3-5, pp 461-478

(12) Krawczuk, M., Palacz, M, Ostachowicz, W., 2003, " The dynamic analysis of cracked Timoshenko beam by the spectral element method" , Journal of Sound and Vibration, vol. 264, Iss.5, pp. 1139-1153.

(13) Mindlin, R.D., Herrmann, G., 1951, " A one-dimensional theory of compressional waves in an elastic rod" , Proc. 1st. U.S. Nat. Congress Appli. Mech., Chicago. Pp 187-191.

(14) Timoshenko, S.P., 1922, " On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section" , Phi. Mag. Ser. 6, Vol. 43, pp.125-131.

(15) Ikeda, T., Fundamentals of Piezoelectricity, Oxford Science Publications.

(16) Fung, Y.C., 1965, Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall Inc.

(17) Chakraborty, S., Gopalakrishnan, 2005, " A spectrally formulated plate element for wave propagation analysis in anisotropic material" , Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 194, pp4425-4446.

(18) KISTI Supercomputer Center (http://www.ksc.re.kr/)

(19) Piezo Systems, Inc. (http://www.piezo.com/)

부록 A

$$
\begin{aligned}
c_{11} &= \left[\omega^2 \rho A_b - k^2(2\mu+\lambda)A_b - k^2 E_p A_p\right], c_{12} = \left[ik\frac{h_p}{2}(\omega^2\alpha_b - k^2\beta_b) - ik\lambda A_b\right], c_{13} = \left[ik(\omega^2\alpha_p - k^2\beta_p)\right] \\
c_{14} &= \left[-(\omega^2\alpha_b - k^2\beta_b)\right] \\
c_{22} &= \left[-\omega^2\rho_b I_b \overline{K}_2 - k^2\frac{h_b h_p}{4}\frac{h_p}{2}(\omega^2\alpha_b - k^2\beta_b) - \omega^2\frac{h_b}{2}\alpha_b + (2\mu+\lambda)A_b + k^2\overline{K}_1\mu I_b + k^4 C_{11}^D I_p \frac{h_b}{2}\frac{h_b}{2}\right], \\
c_{23} &= \left[-\omega^2\alpha_b - k^2\frac{h_b h_p}{4}(\omega^2\alpha_p - k^2\beta_p) + k^4 C_{11}^D I_p \frac{h_b}{2}\right], c_{24} = \left[-ik\frac{h_b h_p}{4}(\omega^2\alpha_b - k^2\beta_b)\right] \\
c_{33} &= \left[-\omega^2[\rho A] - k^2\frac{h_p}{2}(\omega^2\alpha_p - k^2\beta_p) + k^2 G A_b K_1 + k^4 C_{11}^D I_p\right], c_{34} = \left[-ik\frac{h_b}{2}(\omega^2\alpha_p - k^2\beta_p) - ikGA_b K_1\right] \\
c_{44} &= \left[-k^2 E_b I_b + \omega^2\rho_b I_b K_2 + \frac{h_b}{2}(\omega^2\alpha_b - k^2\beta_b) - GA_b K_1\right]
\end{aligned}
\tag{A1}
$$

여기서

$$
\begin{aligned}
&\rho A = \rho_b A_b + \rho_p A_p, \alpha_b = 0.5\rho_p A_p h_b \\
&\alpha_p = 0.5\rho_p A_p h_p, \beta_b = 0.5 E_p A_p h_b \\
&\beta_p = 0.5 E_p A_p h_p
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{H}(\omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_{\hat{u}}(0) \\ \mathbf{\Phi}_{\hat{\psi}}(0) \\ \mathbf{\Phi}_{\hat{v}}(0) \\ \mathbf{\Phi}_{\hat{\phi}}(0) \\ \mathbf{\Phi}_{\hat{u}}(L) \\ \mathbf{\Phi}_{\hat{\psi}}(L) \\ \mathbf{\Phi}_{\hat{v}}(L) \\ \mathbf{\Phi}_{\hat{\phi}}(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & R_5 & R_1P_1 & R_2P_2 & R_3P_3 & R_4P_4 & R_5P_5 \\
S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & -S_1P_1 & -S_2P_2 & -S_3P_3 & -S_4P_4 & -S_5P_5 \\
T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & -T_1P_1 & -T_2P_2 & -T_3P_3 & -T_4P_4 & -T_5P_5 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\
R_1P_1 & R_2P_2 & R_3P_3 & R_4P_4 & R_5P_5 & R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & R_5 \\
S_1P_1 & S_2P_2 & S_3P_3 & S_4P_4 & S_5P_5 & -S_1 & -S_2 & -S_3 & -S_4 & -S_5 \\
T_1P_1 & T_2P_2 & T_3P_3 & T_4P_4 & T_5P_5 & -T_1 & -T_2 & -T_3 & -T_4 & -T_5 \\
P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\tag{A2}
$$

여기서 $P_i = e^{-ik_i L}(i = 1,2,3,4,5)$

PZT 가 가진소자일 경우:

$$
\mathbf{G}(\omega) = \begin{bmatrix}
-(2\mu+\lambda)A_b\mathbf{\Phi}'_{\hat{u}}(0) - \lambda A_b\mathbf{\Phi}_{\hat{\psi}}(0) - E_pA_p\mathbf{M}'_1 + E_p b d_{31}\nu \\
-\overline{K}_1\mu I_b\mathbf{\Phi}'_{\hat{\psi}}(0) - \omega^2\rho_pA_p\frac{h_bh_p}{4}\mathbf{M}_1 - E_pA_p\frac{h_bh_p}{4}\mathbf{M}''_1 + C_{11}^D I_p\frac{h_b}{2}\mathbf{M}'_2 \\
-GA_bK_1(-\mathbf{\Phi}_{\hat{\phi}}(0) + \mathbf{\Phi}'_{\hat{v}}(0)) - \omega^2\rho_pA_p\frac{h_p}{2}\mathbf{M}_1 - E_pA_p\frac{h_p}{2}\mathbf{M}''_1 + C_{11}^D I_p\mathbf{M}'_2 \\
-E_bI_b\mathbf{\Phi}'_{\hat{\phi}}(0) + E_pA_p\frac{h_b}{2}\mathbf{M}'_1 - E_p b d_{31}\frac{h_b}{2}\nu \\
(2\mu+\lambda)A_b\mathbf{\Phi}'_{\hat{u}}(L) + \lambda A_b\mathbf{\Phi}_{\hat{\psi}}(L) + E_pA_p\mathbf{M}'_3 - E_p b d_{31}\nu \\
\overline{K}_1\mu I_b\mathbf{\Phi}'_{\hat{\psi}}(L) + \omega^2\rho_pA_p\frac{h_bh_p}{4}\mathbf{M}_3 + E_pA_p\frac{h_bh_p}{4}\mathbf{M}''_3 - C_{11}^D I_p\frac{h_b}{2}\mathbf{M}'_4 \\
GA_bK_1(-\mathbf{\Phi}_{\hat{\phi}}(L) + \mathbf{\Phi}'_{\hat{v}}(L)) + \omega^2\rho_pA_p\frac{h_p}{2}\mathbf{M}_3 + E_pA_p\frac{h_p}{2}\mathbf{M}''_3 - C_{11}^D I_p\mathbf{M}'_4 \\
E_bI_b\mathbf{\Phi}'_{\hat{\phi}}(L) - E_pA_p\frac{h_b}{2}\mathbf{M}'_3 + E_p b d_{31}\frac{h_b}{2}\nu \\
E_pA_p\frac{h_p}{2}\mathbf{M}'_1 - C_{11}^D I_p\mathbf{M}_2 - E_p b d_{31}\frac{h_p}{2}\nu \\
-E_pA_p\frac{h_p}{2}\mathbf{M}'_3 + C_{11}^D I_p\mathbf{M}_4 + E_p b d_{31}\frac{h_p}{2}\nu
\end{bmatrix}
\tag{A3}
$$

PZT 가 탐지소자일 경우:

$$\mathbf{G}(\omega)=\begin{bmatrix} -(2\mu+\lambda)A_b\Phi'_{\hat{u}}(0)-\lambda A_b\Phi_{\hat{\psi}}(0)-E_pA_p\mathbf{M}'_1-\dfrac{E_pA_pd_{31}h_{31}}{L}(\mathbf{M}_3-\mathbf{M}_1) \\ -\overline{K}_1\mu I_b\Phi'_{\hat{\psi}}(0)-\omega^2\rho_pA_p\dfrac{h_bh_p}{4}\mathbf{M}_1-E_pA_p\dfrac{h_bh_p}{4}\mathbf{M}''_1+C_{11}^DI_p\dfrac{h_b}{2}\mathbf{M}'_2 \\ -GA_bK_1[-\Phi_{\hat{\phi}}(0)+\Phi'_{\hat{v}}(0)]-\omega^2\rho_pA_p\dfrac{h_p}{2}\mathbf{M}_1-E_pA_p\dfrac{h_p}{2}\mathbf{M}''_1+C_{11}^DI_p\mathbf{M}'_2 \\ -E_bI_b\Phi'_{\hat{\phi}}(0)+E_pA_p\dfrac{h_b}{2}\mathbf{M}'_1+\dfrac{h_b}{2}\dfrac{E_pA_pd_{31}h_{31}}{L}(\mathbf{M}_3-\mathbf{M}_1) \\ (2\mu+\lambda)A_b\Phi'_{\hat{u}}(L)+\lambda A_b\Phi_{\hat{\psi}}(L)+E_pA_p\mathbf{M}'_3+\dfrac{E_pA_pd_{31}h_{31}}{L}(\mathbf{M}_3-\mathbf{M}_1) \\ \overline{K}_1\mu I_b\Phi'_{\hat{\psi}}(L)+\omega^2\rho_pA_p\dfrac{h_bh_p}{4}\mathbf{M}_3+E_pA_p\dfrac{h_bh_p}{4}\mathbf{M}''_3-C_{11}^DI_p\dfrac{h_b}{2}\mathbf{M}'_4 \\ GA_bK_1[-\Phi_{\hat{\phi}}(L)+\Phi'_{\hat{v}}(L)]+\omega^2\rho_pA_p\dfrac{h_p}{2}\mathbf{M}_3+E_pA_p\dfrac{h_p}{2}\mathbf{M}''_3-C_{11}^DI_p\mathbf{M}'_4 \\ E_bI_b\Phi'_{\hat{\phi}}(L)-E_pA_p\dfrac{h_b}{2}\mathbf{M}'_3-\dfrac{h_b}{2}\dfrac{E_pA_pd_{31}h_{31}}{L}(\mathbf{M}_3-\mathbf{M}_1) \\ E_pA_p\dfrac{h_p}{2}\mathbf{M}'_1-C_{11}^DI_p\mathbf{M}_2+\dfrac{h_p}{2}\dfrac{E_pA_pd_{31}h_{31}}{L}(\mathbf{M}_3-\mathbf{M}_1) \\ -E_pA_p\dfrac{h_p}{2}\mathbf{M}'_3+C_{11}^DI_p\mathbf{M}_4-\dfrac{h_p}{2}\dfrac{E_pA_pd_{31}h_{31}}{L}(\mathbf{M}_3-\mathbf{M}_1) \end{bmatrix} \tag{A4}$$

여기서

$$\mathbf{v}=-\frac{h_ph_{31}}{L}(\mathbf{M}_3-\mathbf{M}_1)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_1=\Phi_{\hat{u}}(0)-\dfrac{h_p}{2}\Phi'_{\hat{v}}(0)-\dfrac{h_b}{2}[\dfrac{h_p}{2}\Phi'_{\hat{\psi}}(0)+\Phi_{\hat{\phi}}(0)] \\ \mathbf{M}_2=\Phi''_{\hat{v}}(0)+\dfrac{h_b}{2}\Phi''_{\hat{\psi}}(0) \\ \mathbf{M}_3=\Phi_{\hat{u}}(L)-\dfrac{h_p}{2}\Phi'_{\hat{v}}(L)-\dfrac{h_b}{2}[\dfrac{h_p}{2}\Phi'_{\hat{\psi}}(L)+\Phi_{\hat{\phi}}(L)] \\ \mathbf{M}_4=\Phi''_{\hat{v}}(L)+\dfrac{h_b}{2}\Phi''_{\hat{\psi}}(L) \end{pmatrix}$$