

경계요소법(BEM)을 이용한 이물질이 내재된 물체의 응력해석에 관한 연구

A Study on Stress Analysis of an Object with Inclusion using the Boundary Element Method

*정일중¹, 이상훈¹, 박지원¹, #이석순²

*I. J. Jeong¹, S. H. Lee¹, J. W. Park¹, #S. S. Lee(leess@gsnu.ac.kr)²

¹경상대학교 대학원 기계공학과, ²경상대학교 기계항공공학부

Key words : Finite Element Method(FEM), Boundary Element Method(BEM), Orthotropic Material

1. 서론

공학문제의 수치적 해석법의 하나인 경계요소법(Boundary Element Method)은 이미 널리 사용되고 있는 유한요소법(Finite Element Method)에 비하여 프로그램 수행 시 데이터 준비량이 적고 계산 시간이 적게 걸린다는 기본적인 장점을 지니고 있다. 응용분야로서는 정적, 동적해석, 선형, 비선형해석, 고유치문제의 해석 등에 있어서 유한요소법과 동등하게 이용되고 있다.

본 연구에서는 이물질이 내재되어 있는 한 물체에 하중이 가해지는 경우 경계요소법을 이용한 응력해석을 수행하고 그 결과를 유한요소법을 이용한 응력해석결과와 비교하여 경계요소법을 우수함을 확인 하고자 한다.

2. 직교 이방성 재료의 응력-변형을 관계

2-D homogeneous 에서의 응력-변형률 관계에 의해서 직교 이방성 재료의 응력-변형률 관계는 식 (1)과 같다.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{26} \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (1)$$

여기서 σ_{ij} 와 ϵ_{ij} ($i,j=1,2$) 는 응력과 변형률을 각각 의미한다. 그리고 계수 S_{ij} 는 재료의 탄성 컴플라이언스를 나타낸다. 이러한 컴플라이언스는 탄성계수와 프와송비 항으로 바꾸어 쓸 수 있고, 식 (2)에 그 항을 표기 하였다.

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1}, \quad S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad S_{16} = \frac{\eta_{12,1}}{E_1} = \frac{\eta_{1,12}}{G_{12}} \\ S_{26} &= \frac{\eta_{12,2}}{E_2} = \frac{\eta_{2,12}}{G_{12}}, \quad S_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}} \end{aligned} \quad (2)$$

E_k 는 x_k 방향의 탄성계수를 나타내고, G_{12} 는 $x_1 - x_2$ 평면에서의 전단계수이다. 그리고 ν_{ij} 는 프와송비이다. 직교 이방성의 경우는 $S_{16} = S_{26} = 0$ 이 일반적이다. 일정한 각도를 지닌 직교 이방성 재료의 방향성을 고려한 응력-변형률 관계는 식 (3)과 같다.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (3)$$

식 (3)의 강성 행렬 요소들은 식 (4)의 관련 식들로 표현된다.

$$\begin{aligned} \bar{S}_{11} &= V_1 + V_2 \cos 2\gamma + V_3 \cos 4\gamma \\ \bar{S}_{12} &= V_4 - V_3 \cos 4\gamma \\ \bar{S}_{22} &= V_1 - V_2 \cos 2\gamma + V_3 \cos 4\gamma \\ \bar{S}_{16} &= V_2 \sin 2\gamma + 2V_3 \sin 4\gamma \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{26} &= V_2 \sin 2\gamma - 2V_3 \sin 4\gamma \\ \bar{S}_{66} &= 2(V_1 - V_4) - 4V_3 \cos 4\gamma \end{aligned}$$

또한 위의 식 (4)에서 불변치 (V_1, V_2, V_3, V_4) 는 식 (5)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{8}(3S_{11} + 3S_{22} + 2S_{12} + S_{66}) \\ V_2 &= \frac{1}{2}(S_{11} - S_{22}) \\ V_3 &= \frac{1}{8}(S_{11} + S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \\ V_4 &= \frac{1}{8}(S_{11} + S_{22} + 6S_{12} - S_{66}) \end{aligned} \quad (5)$$

3. 직교 이방성 재료의 경계요소법

직교 이방성 재료의 경계 요소법은 다음 식 (6)으로 표현할 수 있다.

$$C_{jk} u_j(P) + \int_S T_{jk}(P, Q) u_j(Q) ds(Q) = \int_S U_{jk}(P, Q) t_j(Q) ds(Q) \quad (6)$$

$j, k = 1, 2$

$P(x_1^0, x_2^0)$ 와 $Q(x_1, x_2)$ 는 직교 이방성 재료의 기본해이다. 그리고 상수 C_{jk} 는 P 에서의 국부적인 경계에 의해서 결정되는 수이다. 변위와 traction 의 기초해는 각기 다음 식 (7)과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} U_{jk} &= 2 \operatorname{Re}[r_{k1} A_{j1} \ln(z_1 - z_1^0) + r_{k2} A_{j2} \ln(z_2 - z_2^0)] \\ T_{j1} &= 2n_1 \operatorname{Re}[\mu_1^2 A_{j1} / z_1 + \mu_2^2 A_{j2} / z_2] - 2n_2 \operatorname{Re}[\mu_1 A_{j1} / z_1 + \mu_2 A_{j2} / z_2] \\ T_{j2} &= -2n_1 \operatorname{Re}[\mu_1 A_{j1} / z_1 + \mu_2 A_{j2} / z_2] + 2n_2 \operatorname{Re}[A_{j1} / z_1 + A_{j2} / z_2] \end{aligned} \quad (7)$$

상수 r_{ij} 는 다음 식 (8)을 이용하여 구할 수 있다.

$$r_{1j} = S_{11}\mu_j^2 + S_{12} - S_{16}\mu_j; \quad r_{2j} = S_{12}\mu_j + S_{22} / \mu_j - S_{26} \quad (8)$$

n_j 는 $x_1 - x_2$ 좌표와 관련되어 있는 Q에서의 외향 단위 법선 성분이다. 그리고 A_{jk} 는 식 (9)로부터 구해지는 복소수이다.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ \mu_1 & -\bar{\mu}_1 & \mu_2 & -\bar{\mu}_2 \\ r_{11} & -\bar{r}_{11} & r_{12} & -\bar{r}_{12} \\ r_{21} & -\bar{r}_{21} & r_{22} & -\bar{r}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{j1} \\ \bar{A}_{j1} \\ A_{j2} \\ \bar{A}_{j2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{j2} / 2\pi i \\ -\delta_{j1} / 2\pi i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

4. BEM Analysis

응력해석 비교를 위한 모델은 정사각형의 물체 내부에 육각형의 이물질이 내재된 형상이다. Fig. 1 에 Preview FOTRAN 프로그램을 통해 생성된 경계요소 형상을 나타내었다. A-A' 구간은 결과 비교 부분을 나타낸 것이다.

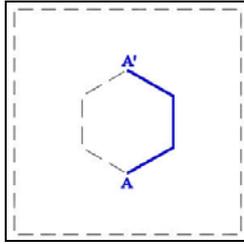


Fig. 1. Boundary Element Geometry

Table 1. Material Properties of each Region

Region	E ₁ (GPa)	E ₂ (GPa)	ν _{1,2}	G _{1,2} (GPa)
Interior	210	197	0.3	77.2
Exterior	168	157	0.3	61.8

각 영역에 적용시킨 재료 물성치는 Table 1 에 나타내었다. 외부의 값이 내부 값의 90%가 되도록 적용하였다.

경계조건은 좌측부위에 자유도 1, 2 를 구속하였으며 우측부위에 하중을 가하였다.

5. FEM Analysis

유한요소 해석을 위한 형상모델링은 CATIA V5 를 사용하였으며 Fig. 2 에 나타내었다. 형상의 크기 및 경계는 경계요소모델과 똑같이 적용하였다.

유한요소 생성과 경계조건 적용은 HyperMesh V8.0 을 사용하였으며 Fig. 3 에 나타내었다. 절점의 위치, 재료 물성치, 변위조건, 하중조건 등은 경계요소 모델과 똑같이 적용하였다.

유한요소 해석기는 ABAQUS V6.5 를 사용하였으며 해석 결과는 Fig. 4 에 나타내었다.

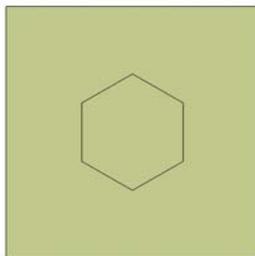


Fig. 2. Surface Model

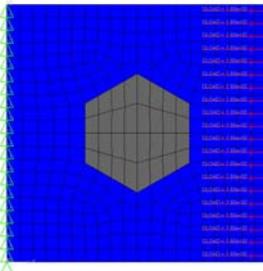


Fig. 3. FE Model and Boundary Conditions

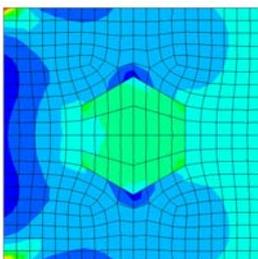


Fig. 4. Result of FE Analysis

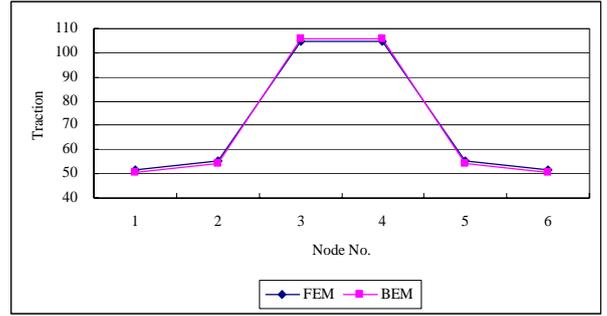


Fig. 5. Results of each Analysis

Table 2. Traction of each Analysis

Node No.	1	2	3	4	5	6
FEM	50.533	55.476	104.815	104.815	55.476	51.533
BEM	50.600	54.080	105.700	105.700	54.080	50.600

6. 해석 결과 비교분석

경계요소 해석의 결과값은 인력으로 나타나며 유한요소 해석의 결과값은 응력으로 나타난다. 두 해석 결과의 비교를 위해 유한요소 해석 결과에서 추출한 S₁₁, S₁₂와 각 절점의 위치 정보를 이용하여 X방향 인력으로 환산하였다.

Fig. 5 에 해석 결과값을 그래프로 나타내었고 Table 2 에 결과값을 수치로 나타내었다.

이와 같이 두 해석의 경우 모두 대칭의 값을 가지며 서로의 결과값도 매우 비슷한 것을 확인 할 수 있다.

7. 결론

이물질이 내재된 물체의 응력해석에 관한 연구의 결론은 유한요소 해석보다 해석시간을 단축 시킬 수 있으면서 유사한 결과를 확보할 수 있다는 것이다. 나아가 다양한 물성치 및 형상에 대한 이물질이 내재된 모델에 대해서도 경계요소법을 이용한 빠르고 정확한 응력해석이 가능할 것이다.

후기

본 연구는 2 단계 지역대학 육성 사업(BK21)과 첨단기계사업단(NURI)의 지원에 의해서 연구되었다. 모든 지원에 대해서 감사드린다.

참고문헌

1. N. Tosaka and T. Nakayama., 2006, "A Basic of Boundary Element Method", pp.1-6,184-189.
2. William. T. Vetterling, Saul A. Flannery, 1992 "Numerical Recipes Example Book (FORTRAN)" 2nd, pp.122-132.
3. Ronald F. Gibson, 1994. "Principles of composite material mechanics", pp.46-58.
4. Chon. M. S., Lee. H. I., 2002 "From Continuum Mechanics to Finite Element Method", pp.282-378.
5. J. W. Choi., "Statistical Approach to the Elastic Property Extraction and Planar Elastic Response of Polycrystalline Thin-Films".2004, pp.42-69.
6. 김동은, 이상환, 정일중, 한국남, 황영진, 이석순, "경계요소법에 의한 직교이방성 다결정 재료의 응력해석에 관한 연구", 한국정밀공학회 2007 년도 추계 학술대회 논문집, pp. 351-352.