다이나믹 스케일링을 이용한 과소 작동 불안정 기계 시스템의 제어

서상보*, 심형보*, 서진헌*
서울대학교 전기컴퓨터공학부*

Control of Underactuated Unstable Mechanical System Using Dynamic Scaling

Sangbo Seo*, Hyungbo Shim*, Jin Heon Seo*,
ASRI, School of Electrical Engineering and Computer Science, Seoul National University*

Abstract - 이 논문에서는 자유도보다 엑츄에이터가 부족한 과소 작동 기계 시스템의 지수적 안정을 보장하는 다이나믹 제어기법을 제시한다. 이 시스템의 원점에 대한 자코비안 선형화는 제어불능이므로 기존의 시불변 상태궤환 기법으로 안정화가 불가능하다는 특징을 가지고 있다. 이 논문에서는 추가 다이나믹스를 이용한 다이나믹 스케일링 기법과 수정된 역진 기법을 사용하여 제어목적을 달성한다.

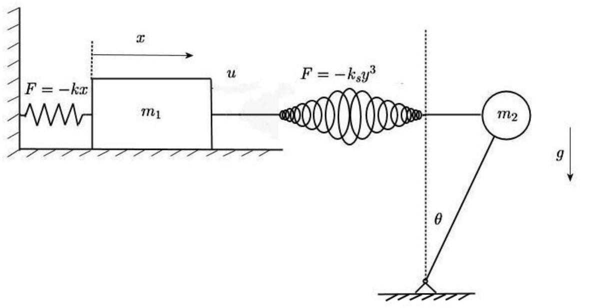
1. 서 론

자유도보다 입력의 수가 적은 과소 작동 기계 시스템은 우주와 해저 로봇, 자율 이동 로봇, 유연성 로봇 등에서 그 실례를 찾아볼 수 있다. 본 논문에서는 역진자와 선형 탄성-질량 시스템이 비선형 스프링을 통해 약결합(weak coupling)을 이루고 있는 기계 시스템을 다루고자 한다. 이 시스템 또한 단일 입력에 대해 2개의 자유도를 가지므로 과소 작동 시스템이라고 할 수 있다. 더욱이 이 시스템은 역진자의 평형점에 대한 자코비안 선형화가 제어불가능(uncontrollable)이며, 안정화가능(stabilizable)하지도 않다.

Brockett의 정리[1]에 따르면, 이 시스템은 어떤 static smooth 궤환 입력으로도 안정화 할 수 없으므로, nonsmooth나 시변(time-varying) 제어기의 설계에 의한 안정화가 필요하다. [2]에서는 이 시스템을 안정화하기 위해서 동차(homogeneous) 벡터장의 개념을 이용한 nonsmooth 동차 궤환 제어기를, [3]에서는 'adding a power integrator'기법을 사용하여 연속인 제어기를 설계하였다. 본 논문에서 다루는 시스템은 [3]에서 power integrator 시스템의 한 예제로 제시되었는데, 이 시스템에 대해서 [4]에서는 시간함수에 대한 스케일링 기법으로 시변 궤환 제어기를 설계하였다. [3]과 [4]에서 제시된 결과는 domination방법에 기반한 역진(backstepping) 기법을 사용하므로 최종입력이 커질 수 있는 단점을 가지고 있다. 본 논문에서 제시하는 방법은 [4]의 결과와 유사한 면을 가지지만 [4]의 결과보다 더 구체적이며 domination 방법과 calcellation 방법을 적절히 조화함으로써 제어 입력을 줄일 수 있는 장점을 지니고 있다.

2. 과소 작동 기계 시스템에 대한 다이나믹 제어기의 설계

2.1 과소 작동 불안정 기계 시스템



<그림 1> 약결합을 가지는 과소 동작 시스템

그림 1과 같은 약결합을 가지는 과소 동작 기계 시스템의 운동 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}&=\frac{g}{l}\sin\theta+\frac{k_s}{m_2 l}(x-l\sin\theta)^3\cos\theta\\ \ddot{x}&=-\frac{k}{m_1}x-\frac{k_s}{m_1}(x-l\sin\theta)^3+\frac{u}{m_1}\end{aligned}\tag{1}$$

여기서 x는 질량의 변위, θ는 수직선으로부터의 진자의 각도이며, 각 값들이 0일 경우 스프링은 변형이 없는 상태이다. 그리고 $k, k_s>0$는 스프링 상수이고 제어입력 u가 m_1에 작용하지만 m_2에 직접적으로 작용하는 힘은 없으므로 이 시스템은 과소 동작 시스템임을 알 수 있다.

(1) 식을 $(\theta,\dot{\theta},x,\dot{x})\in(-\pi/2,\pi/2)\times R^3$에서 정의되는 변환[4]

$$x_1=\theta, x_2=\dot{x}_2,\ x_3=(x-l\sin\theta)\sqrt[3]{\frac{k_s}{m_2 l}\cos\theta},\ x_4=\dot{x}_3 \tag{2}$$

을 통하면

$$\dot{x}_1=x_2, \dot{x}_2=x_3^3+\frac{g}{l}\sin x_1,\ \dot{x}_3=x_4,\ \dot{x}_4=v \tag{3}$$

의 식으로 유도가 된다. 이식의 자코비안 선형화는 양의 고유값을 가지므로 제어불능임을 명심하자. 그리고 u와 v는 다음의 관계를 가진다.

$$\begin{aligned}u=&\frac{m_1(v+x_2x_4\tan x_1)}{\sqrt[3]{k_s\cos x_1/m_2 l}}+\frac{kx_3}{\sqrt[3]{k_s\cos x_1/m_2 l}}+kl\sin x_1\\ &+\frac{(m_1\tan x_1)\left[x_3\left(x_3^3+g\sin x_1/l\right)+x_2x_4\right]}{3\sqrt[3]{k_s\cos x_1/m_2 l}}\\ &+\frac{\left(m_1x_2^2x_3\right)\left(1+\sin^2x_1/3\right)}{3\cos^2x_1\sqrt[3]{k_s\cos x_1/m_2 l}}+\frac{x_3^3 m_2 l}{\cos x_1}\\ &+m_1 l\left[\left(x_3^3+g\sin x_1/l\right)\cos x_1-x_2^2\sin x_1\right]\end{aligned}\tag{4}$$

2.2 추가 다이나믹스와 변환

양의 초기값을 가지는 추가 다이나믹스와 변환을

$$\dot{z}_0=-k_0z_0,\quad z_i=x_i/z_0^{a_i},\ i=1,2,3,4 \tag{5}$$

와 같이 정의하면, 시스템 (3)을 다음과 같이 변환 가능하다.

$$\begin{aligned}&\dot{z}_1=\frac{z_2}{z_0^{b_1}}+a_1k_0z_1,\quad \dot{z}_2=\frac{z_3^3}{z_0^{b_2}}+\frac{g\sin\left(z_1z_0^{a_1}\right)}{lz_0^{a_2}}+a_2k_0z_2,\\ &\dot{z}_3=\frac{z_4}{z_0^{b_3}}+a_3k_0z_3,\quad \dot{z}_4=\frac{v}{z_0^{b_4}}+a_4k_0z_4\end{aligned}\tag{6}$$

여기서 $b_1=a_1-a_2,\ b_2=a_2-3a_3,\ b_3=a_3-a_4,\ b_4=a_4$의 관계를 가진다. 이 변환의 이유는 설계된 제어입력이 z_0를 분모로 갖지 않고 유한함을 보장하기 위함이다.

2.3 다이나믹 스케일링을 이용한 제어기의 설계

다음은 이 논문의 주요정리이다.

정리 1. 과소 작동 불안정 기계 시스템 (1)에 대해서 변환 (2)와 (5)에 의한 시스템 (6)에서 설계된 매끈한 제어입력 v는 (6)의 원점을 지수적으로 안정하게 하고, 이는 θ와 x가 0으로 지수적으로 수렴함을 보장한다.

정리 1의 증명: 역진 기법은 각 하위 시스템을 안정화하기 위한 가상의 제어를 각 단계에서 설계하고 최종적으로 제어입력을 설계하는 제어기법이다. 하지만 기존의 역진 기법과 달리 (3)의 시스템에서 가상 제어부분인 x_3의 지수가 3이므로 시불변 궤환 제어입력의 설계가 불가능하게 된다[2,3,4]. 그러므로 이 논문에서는 추가 다이나믹스와 다이나믹 스케일링에 기반을 둔 다이나믹 제어입력을 설계하고자 한다.

단계 1: 이 단계에서는 z_1하위 시스템에 대하여 가상의 입력을 설계하고자 한다. 리아푸노프 함수 $V_1=z_1^2/2\gamma_1$($\gamma_{i,}\ i=1,2,3,4$:조정 이득값)을 미분하면

$$\dot{V}_1=\frac{z_1z_2}{\gamma_1 z_0^{b_1}}+\frac{a_1k_0z_1^2}{\gamma_1} \tag{7}$$

가 되고, $b_1=0$으로 정한 후, 가상의 입력 z_2^*을 설계할 수 있다.

$$z_2^*=-z_1(k_1\gamma_1+a_1k_0)=:-z_1\alpha_1,\ \bar{z}_2=z_2-z_2^* \tag{8}$$

단계 2: z_2하위 시스템에 대한 가상입력을 설계하기 위하여 이 단계에서는 다이나믹 스케일링 방법을 사용할 것이다. 우선 리아푸느프 함수 $V_2 = \bar{z}_2^2/2\gamma_2$의 미분을 하고 $k_2\bar{z}_2^2$의 합차를 더하면

$$\dot{V}_2 = -k_1 z_1^2 + \frac{z_1\bar{z}_2}{\gamma_1} + \frac{\bar{z}_2}{\gamma_2}\left(\dot{z}_2 - \frac{\partial z_2^*}{\partial z_1}\dot{z}_1\right) \pm k_2\bar{z}_2^2 \qquad (9)$$

가 된다. 이 단계에서 설계할 가상입력 z_3^*은 지수 3을 가지고 있으므로 매끈한 함수로 설계할 수가 없다. 그러므로 각 항들에 대해서 아래와 같이 스케일링 방법을 적용한다.

식 (6)과 (8)과 $|\sin x| \le |x|,\ a_1 = a_2(b_1 = 0)$을 이용하면

$$\begin{aligned}&\frac{z_1\bar{z}_2}{\gamma_1} + \frac{\bar{z}_2}{\gamma_2}\left[\frac{g\sin(z_1 z_0^{a_1})}{l z_0^{a_2}} + a_2 k_0 z_2 - \frac{\partial z_2^*}{\partial z_1}(z_2 + a_1 k_0 z_1)\right] + k_2\bar{z}_2^2 \\ &\le z_1\bar{z}_2\left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{\alpha_1(a_2k_0 + k_1\gamma_1)}{\gamma_2}\right) + \frac{\bar{z}_2^2}{\gamma_2}(a_2k_0 + \alpha_1) + \frac{g|z_1\bar{z}_2|}{\gamma_2 l} + k_2\bar{z}_2^2\end{aligned} \qquad (10)$$

가 되고, 영의 부등식($|xy| \le x^a/a + y^b/b,\ 1/a + 1/b = 1$)을 이용하여

$$\begin{aligned}&\frac{z_1^2}{8} + \bar{z}_2^2\sigma_2 \times \frac{2z_0}{2z_0} \le \frac{z_1^2}{8} + 2z_0^2 + \frac{\bar{z}_2^4}{8z_0^2}\sigma_2^2, \\ &\sigma_2 = \left[4\left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{\alpha_1(a_2k_0 + k_1\gamma_1)}{\gamma_2}\right)^2 + \frac{(a_2k_0 + \alpha_1)}{\gamma_2} + 4\left(\frac{g}{\gamma_2 l}\right)^2 + k_2\right]\end{aligned} \qquad (11)$$

에 도달하게 된다. 우리는 위의 부등식을 *'다이나믹 스케일링'* 방법으로 부르기로 한다. 이 방법은 추가 상태변수 z_0가 0에 도달하는 것이 불가능하므로 잘 정의된다고 할 수 있다.

그러므로 $b_2 = 2$로 설정한 후 가상입력이

$$z_3^* = -\bar{z}_2\left(\gamma_2\frac{\sigma_2^2}{8}\right)^{1/3} =: -\bar{z}_2\alpha_2,\quad \bar{z}_3 = z_3 - z_3^* \qquad (12)$$

로 설계되고, 이를 (9)식에 적용하면 아래의 결과가 나온다.

$$\dot{V}_2 \le -\left(k_1 - \frac{1}{8}\right)z_1^2 - k_2\bar{z}_2^2 + 2z_0^2 + \frac{\bar{z}_2(z_3^3 - z_3^{*3})}{\gamma_2 z_0^{b_2}} \qquad (13)$$

단계 3: 이 단계의 리아푸노프 함수 $V_3 = V_2 + \bar{z}_3^2/2\gamma_3$에서

$$\dot{V}_3 = \dot{V}_2 + \frac{\bar{z}_3}{\gamma_3}\left(\dot{z}_3 - \frac{\partial z_3^*}{\partial z_2}\dot{z}_2 - \frac{\partial z_3^*}{\partial z_1}\dot{z}_1\right) \qquad (14)$$

가 유도되고, 이전 단계에서의 항은 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$\frac{\bar{z}_2(z_3^3 - z_3^{*3})}{\gamma_2 z_0^{b_2}} = \frac{\bar{z}_3\bar{z}_2(z_3^2 + z_3 z_3^* + z_3^{*2})}{\gamma_2 z_0^{b_2}} \qquad (15)$$

그리고 다음 단계에서의 편미분 계산의 편리성을 위해서 sin항을 다음과 같이 추정할 수 있다.

$$\left|\frac{\bar{z}_3}{\gamma_3}\frac{\partial z_3^*}{\partial z_2}\left(\frac{g\sin(z_1 z_0^{a_1})}{l z_0^{a_2}}\right)\right| \le \frac{z_1^2}{4} + \frac{\bar{z}_3^2}{\gamma_3^2}\left(\frac{\partial z_3^*}{\partial z_2}\frac{g}{l}\right)^2 \qquad (16)$$

식 (15)과 (16), 그리고 (13)의 나머지 항들에 대해서 함수

$$\begin{aligned}\alpha_3 = &\frac{\gamma_3\bar{z}_2(z_3^2 + z_3 z_3^* + z_3^{*2})}{\gamma_2 z_0^2} + a_3 k_0 z_3 - \frac{\partial z_3^*}{\partial z_2}\left(\frac{z_3^3}{z_0^{b_2}} + a_2 k_0 z_2\right) \\ &- \frac{\partial z_3^*}{\partial z_1}\dot{z}_1 + \gamma_3 k_3\bar{z}_3 + \frac{\bar{z}_3}{\gamma_3}\left(\frac{\partial z_3^*}{\partial z_2}\frac{g}{l}\right)^2\end{aligned} \qquad (17)$$

와 함께 가상의 함수가

$$z_4^* = -z_0^{b_3}\alpha_3,\quad \bar{z}_4 = z_4 - z_4^* \qquad (18)$$

와 같이 설계된다. 위의 단계에서 $b_2 = 2$로 결정되었으므로 b_3은 이 항들을 고려하여 $b_3 = b_2$로 결정된다.

단계4: 이 단계는 전체 구성의 마지막 단계이므로 전체 리아푸노프 함수를 $V = V_3 + \bar{z}_4^2/2\gamma_4 + z_0^2/2\gamma_0$로 설정한다. 시스템 (5)와 (6)에 대한 이 함수의 미분은

$$\begin{aligned}\dot{V} \le &-\left(k_1 - \frac{3}{8}\right)z_1^2 - k_2\bar{z}_2^2 - k_3\bar{z}_3^2 - \left(\frac{k_0}{\gamma_0} - 2\right)z_0^2 + \frac{\bar{z}_3\bar{z}_4}{\gamma_3 z_0^{b_3}} \\ &+ \frac{\bar{z}_4}{\gamma_4}\left(\frac{v}{z_0^{b_4}} + a_4 k_0 z_4 - \sum_{i=0}^{3}\frac{\partial z_4^*}{\partial z_i}\dot{z}_i\right)\end{aligned} \qquad (19)$$

이 된다. 그러므로 최종적으로 $b_4 = b_3$의 설정으로 제어입력 v을 아래와 같이 설계할 수 있다.

$$v = -z_0^{b_4}\left(k_4\gamma_4 + \frac{\gamma_4\bar{z}_3}{\gamma_3} + a_4 k_0 z_4 - \sum_{i=0}^{3}\frac{\partial z_4^*}{\partial z_i}\right) \qquad (20)$$

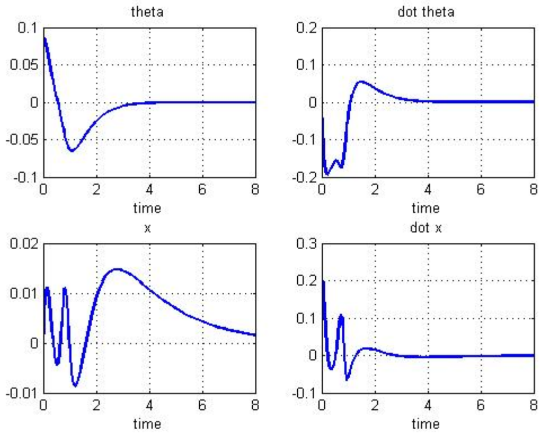
그리고 리아푸노프 함수는

$$\dot{V} \le -\left(k_1 - \frac{3}{8}\right)z_1^2 - k_2\bar{z}_2^2 - k_3\bar{z}_3^2 - k_4\bar{z}_4^2 - \left(\frac{k_0}{\gamma_0} - 2\right)z_0^2 \qquad (21)$$

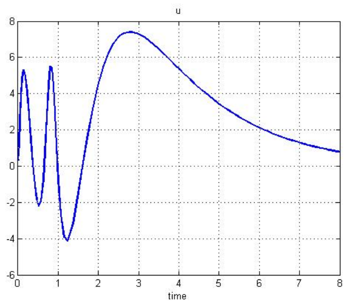
로 정리가 되므로 상수값을 $k_1 > 3/8,\ k_2 > 0,\ k_3 > 0,\ k_4 > 0,\ k_0 > 2\gamma_0$로 설정하면 $\dot{V} + kV \le 0$을 만족하여 지수적 안정(exponential stable)임을 알 수 있다. 여기서 γ_0는 k_0가 작아질수록 줄일 수 있는 조절값이다. 그러므로 우리는 정리1을 결론지을 수 있다.

3. 시뮬레이션

시뮬레이션 환경은 $m_1 = 1,\ m_2 = 0.2,\ l = 1,\ k_s = 1000,\ g = 9.8,\ k_0 = 0.1, k_i(i = 1,2,3,4) = 1, \gamma_0 = 1/21, \gamma_1 = 2, \gamma_2 = 14, \gamma_3 = 12, \gamma_4 = 1$이고 초기값은 $(\theta(0), \dot{\theta}(0), x(0), \dot{x}(0)) = (5^\circ, 0, 0, 0)$이다. 시뮬레이션은 시스템 (6)과 입력 (20)에서 이루어졌으며, 변환 (2)와 (5)에 의해서 역변환 되었다. 그 결과는 그림 2과 3와 같으며, 전체적으로 제어목표를 이루고 있음을 알 수 있다.



<그림 2> $\theta, \dot{\theta},\ x,\ \dot{x}$



<그림 3> 제어입력 u

4. 결 론

본 논문에서는 기존의 정적 궤환 제어법으로 제어 불가능한 과소 작동 기계 시스템 시스템의 지수적 안정을 보장하는 다이나믹 제어기법이 제시되었다. 이 기법은 추가 다이나믹스의 상태변수를 이용한 다이나믹 스케일링 방법과 cancellation, domination 역진 기법의 조화에 의해서 이루어졌다. 제시된 기법은 이 특정 시스템 뿐만이 아니라 다양한 과소 동작 약결합 불안정 기계 시스템에의 적용이 가능하다.

[참 고 문 헌]

[1] R. W. Brockett, "Asymptotic stability and feedback stabilization", In R. S. Millman and H. J. Sussman *Differential geometry control theory*, pp. 181-191, 1983.

[2] C. Rui, M. Reyhanoglu, I. Kolmanovsky, S. Cho, N. H. McClamroch, "Nonsmooth stabilization of an underactuated unstable two degrees of freedom mechanical system", Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control, pp. 3998-4003, 1997.

[3] C. Qian and W. Lin, "A continuous feedback approach to global strong stabilization of nonlinear systems", Vol. 46, No. 7, pp. 1061-1079, 2001.

[4] D. B. Dačić and P. V. Kokotović, "A scaled stabilization of power integrator triangular systems", Vol. 54, pp. 645-653, 2005.