2008년도 대한전기학회 하계학술대회 논문집 2008. 7. 16 - 18

불확실 시간지연 시스템을 위한 개선된 지연 종속적 안정성 조건

최현철, 심형보, 서진헌
서울대학교 전기·컴퓨터공학부

Improved Delay-Dependent Stability Conditions for Uncertain Time-Delay Systems

Hyoun-Chul Choi, Hyungbo Shim, and Jin Heon Seo
ASRI, School of Electrical Engineering and Computer Science, Seoul National University

Abstract - This paper proposes a new delay-dependent stability condition for uncertain time-delay systems, which is simple yet not as conservative as previous ones in the literature. The proposed condition, which is formulated in terms of linear matrix inequalities, does not employ any model transformation and therefore is free from the conservatism due to model transformations. Numerical examples are presented to show the usefulness of the proposed condition.

1. 서 론

그 동안 시간지연 시스템에 대한 많은 연구가 이루어졌다. 특히, 선형 행렬부등식(LMI: linear matrix inequality) 기법[1]의 개발과 함께 시간지연 시스템 제어에 대한 연구가 더욱 활발히 진행되었다. 시간지연 시스템 제어에 관한 대부분의 연구 결과는 지연에 무관한 안정성 조건[1]과 지연에 종속적인 안정성 조건[2-9,11,12]에 기반 하여 이루어져 왔다. 지연에 무관한 안정성 조건은 모든 범위의 지연에 대해 안정성을 보장해야 하므로 매우 보수적이다. 반면에, 지연에 종속적인 안정성 조건은 특정 범위의 시간지연에 대해 안정성을 보장하기 때문에 일반적으로 지연에 무관한 안정성 조건보다 덜 보수적이다.

Moon 등[8]은 Leibniz-Newton 공식을 이용한 시스템 모델 변환과 특정 교차항의 상한 추정을 위한 부등식을 통해 지연 종속적인 안정성 조건을 제안하였다. 특히, 이들이 제안한 교차항의 상한 추정을 위한 부등식은 Lyapunov 함수의 시간 도함수에서 특정 항을 소거하는데 매우 유용하기 때문에 그 후 여러 연구들[3,5]에 이용되었다. 그러나 시간지연 시스템의 안정성 조건 유도를 위해 시스템 모델 변환이나 상한 추정 부등식을 도입하면 보수성도 같이 유입된다는 단점이 있다. 시간지연 시스템을 위한 안정성 조건의 보수성을 줄이기 위해 현재 많은 연구가 진행되고 있으며, 여유변수를 도입하는 기법이 많이 적용되고 있다[7,11,12]. 그러나 다면체형(polytopic) 불확실성을 갖는 시스템의 경우나 T-S (Takagi-Sugeno) 퍼지 시스템의 경우는 여유변수(slack variable)를 도입하여 조건식의 자유도를 늘리는 방법을 통해 보수성을 줄일 수 있으나[7,12], 공칭 시스템이나 노옴한계형(norm-bounded) 불확실성을 갖는 시스템의 경우 그러한 여유변수 기법이 효과가 없기 때문에[10] 새로운 Lyapunov 함수를 찾거나 덜 보수적인 모델 변환이나 상한 추정 부등식을 찾아야 하는 실정이다.

이 논문에서는 노옴한계형 불확실성을 갖는 시간지연 시스템을 위한 지연 종속적 안정성 조건을 제안한다. 제안된 조건은 시스템 모델 변환을 이용하지 않고 얻은 것으로서 LMI 식으로 표현되는데 기존의 조건들보다 성능이 떨어지지 않으면서도 결정변수의 개수가 적다는 장점이 있다. 따라서 LMI 문제를 풀 때 기존의 조건들보다 수치적 복잡도가 낮아 큰 규모 시스템 적용에 유리하다. 수치 예제를 통해 제안된 조건의 유용을 보인다.

2. 문제 설정 및 예비 결과

상태에 시간지연이 있는 불확실 선형 시스템을 다음과 같이 고려하자.

$$\dot{x}(t) = (A + DF(t)E)x(t) + (A_1 + D_1F_1(t)E_1)x(t-h) \quad (1)$$

$$x(t) = \phi(t),\ t \in [-h, 0] \quad (2)$$

여기서 $x(t) \in R^n$는 시스템 상태, $h>0$ 는 시간지연, $\phi(\cdot)$는 초기조건, A, A_1, D, D_1, E, E_1은 상수행렬을 각각 나타낸다. 또한, $F(t)$와 $F_1(t)$은 시변행렬로서 다음 조건 $F^T(t)F(t) \le I$와 $F_1^T(t)F_1(t) \le I$를 각각 만족한다.

이 논문의 문제는 주어진 불확실 시간지연 시스템 (1)의 안정성을 위해 제안된 기존의 조건들을 개선하는 새로운 지연 종속적 안정성 조건을 찾는 것이다. 여기서 '개선'이라 함은 보수성을 줄이면서 수치적 복잡성을 줄이는 것을 의미한다.

다음 보조정리는 이 논문의 주요 결과를 얻기 위해 필요한 내용이다.

보조정리 1 [4]: 임의의 행렬 $R>0$ 및 스칼라 $h>0$에 대해 다음 부등식이 만족한다.

$$\begin{aligned}-h\int_{t-h}^{t} \dot{x}^T(\alpha)R\dot{x}(\alpha)\,d\alpha &\le -\left(\int_{t-h}^{t}\dot{x}(\alpha)d\alpha\right)^T R\left(\int_{t-h}^{t}\dot{x}(\alpha)d\alpha\right)\\ &= \left[x^T(t)\ \ x^T(t-h)\right]\begin{bmatrix}-R & R\\ R & -R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ x(t-h)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

3. 주요 결과

3.1 공칭 시스템을 위한 안정성 조건

다음과 같은 공칭 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) \quad (3)$$

$$x(t) = \phi(t),\ t \in [-h, 0] \quad (4)$$

위 시스템을 위한 새로운 지연 종속적 안정성 조건을 다음과 같이 제안한다.

정리 1: 조건 $0 < h \le h_M$을 만족하는 시간지연 h에 대해, 다음 부등식 (5)를 만족하는 행렬들 $P>0$, $Q>0$ 및 $R>0$이 존재하면 공칭 시스템 (3)은 점근적으로 안정하다.

$$\begin{bmatrix} A^TP+PA+Q-h_M^{-1}R & * & * \\ A_1^TP+h_M^{-1}R & -Q-h_M^{-1}R & * \\ h_MRA & h_MRA_1 & -h_MR \end{bmatrix} < 0 \quad (5)$$

여기서 *는 대칭행렬에서 대칭성으로 유추할 수 있는 요소를 줄여서 표시한 것이다.

증명: Lyapunov 함수를 다음과 같이 정의한다.

$$V(t,x_t) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-h}^{t} x^T(\alpha)Qx(\alpha)d\alpha + \int_{-h}^{0}\int_{t+\beta}^{t}\dot{x}^T(\alpha)R(\alpha)d\alpha d\beta$$

시스템 (3)의 상태궤적에 대한 이 함수의 시간 도함수를 구하면 다음과 같다.

$$\dot{V} = 2x^T(t)P(Ax(t)+A_1x(t-h)) + x^T(t)Qx(t) - x^T(t-h)Qx(t-h) + h\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) - \int_{t-h}^{t}\dot{x}^T(\alpha)R\dot{x}(\alpha)\,d\alpha$$

이 식에 보조정리 1을 적용하면 마지막 항을 $x(t)$와 $x(t-h)$에 관하여 나타낼 수 있고 그로부터 다음과 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{V} &\le 2x^T(t)P(Ax(t)+A_1x(t-h)) + x^T(t)Qx(t) - x^T(t-h)Qx(t-h)\\ &\quad + h_M\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) + 1/h_M\left[x^T(t)\ \ x^T(t-h)\right]\begin{bmatrix}-R & R\\ R & -R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ x(t-h)\end{bmatrix}\\ &= 2x^T(t)P(Ax(t)+A_1x(t-h)) + x^T(t)Qx(t) - x^T(t-h)Qx(t-h)\\ &\quad + h_M\left[x^T(t)\ \ x^T(t-h)\right]\begin{bmatrix}A^TRA & A^TRA_1\\ A_1^TRA & A_1^TRA_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ x(t-h)\end{bmatrix}\\ &\quad + 1/h_M\left[x^T(t)\ \ x^T(t-h)\right]\begin{bmatrix}-R & R\\ R & -R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ x(t-h)\end{bmatrix}\\ &= \left[x^T(t)\ \ x^T(t-h)\right]\Psi\begin{bmatrix}x(t)\\ x(t-h)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

여기서

$$\Psi := \begin{bmatrix} A^TP+PA+Q+h_MA^TRA-h_M^{-1}R & * \\ A_1^TP+h_MA_1^TRA+h_M^{-1}R & h_MA_1^TRA_1-h_M^{-1}R \end{bmatrix}$$

이다. 따라서 $0<h \le h_M$에 대해 $\Psi<0$ 이 만족하는 $P>0$, $Q>0$ 및 $R>0$이 존재하면 다음 식

$$\dot{V}(t,x_t) \le -\kappa \|\xi(t)\|^2$$

($\xi := [x^T(t)\ x^T(t-h)]^T$, $\kappa := \lambda_{\min}(-\Psi)>0$)이 만족하여 시스템 (3)이 점근적으로 안정하다. 한편, 식 (5)는 Schur 보수법[1]에 의해 $R>0$, $\Psi<0$와 동치이다. 그러므로 식 (5)를 만족하는 $P>0$, $Q>0$ 및 $R>0$이 존재하면 시스템 (3)은 점근적으로 안정하다. ■

주 1: 식 (5)에서 $R=\epsilon I$ (ϵ은 충분히 작은 양(positive)의 스칼라)로 놓으면 식 (5)는 이미 잘 알려진 시간지연에 무관한 안정성 조건[1]으로 귀결된다.

3.2 노옴한계형 불확실성을 갖는 시스템을 위한 안정성 조건

앞 절의 결과를 이용하여 다음과 같이 노옴한계형 불확실성을 갖는 시스템을 위한 지연 종속적 안정성 조건을 제안한다.

정리 2: 조건 $0<h \le h_M$을 만족하는 시간지연 h에 대해, 다음 부등식 (6)을 만족하는 행렬들 $P>0$, $Q>0$, $R>0$과 스칼라 $c_0>0$ 및 $c_1>0$이 존재하면 노옴한계형 불확실성 시스템 (1)은 점근적으로 안정하다.

$$\begin{bmatrix} \Xi & * & * & * & * \\ A_1^TP+h_M^{-1}R & -Q-h_M^{-1}R+c_1E_1^TE_1 & * & * & * \\ h_MRA & h_MRA_1 & -h_MR & * & * \\ D^TP & 0 & h_MD^TR & -c_0I & * \\ D_1^TP & 0 & h_MD_1^TR & 0 & -c_1I \end{bmatrix} < 0 \quad (6)$$

여기서 $\Xi := A^TP+PA+Q-h_M^{-1}R+c_0E^TE$ 이다.

증명: 식 (5)의 A, A_1을 각각 $A+DF(t)E$, $A_1+D_1F_1(t)E_1$으로 치환하고, S-절차(S-procedure)[1]를 이용한 노옴한계형 불확실성을 다루는 기법[8]을 적용하면 식 (5)로부터 식 (6)을 얻을 수 있다. 나머지 증명 과정은 정리 1의 증명을 따른다. ■

주 2: 식 (5)와 (6)은 결정변수에 대해 LMI 식이다. 따라서 Interior-Point 기법[1]과 같은 볼록최적화 수치해석 기법에 의해 효과적으로 그 해를 구할 수 있다.

주 3: 정리 1과 정리 2의 안정성 조건을 상태궤환 제어기 설계 조건으로 확장할 수 있다. 그러나 변수변환[1] 및 Schur 보수법과 같은 여러 기법을 동원해도 결과는 비볼록한(non-convex) 조건으로 귀결된다. 이러한 조건은 LMI 식이 아니기 때문에 특정한 알고리즘을 통해 해를 구해야 한다. 보수성을 감수하더라도 상태궤환 제어기 설계 조건을 LMI 식으로 만들려면, $P=R$ 로 놓는다. 참고문헌 [8]에 이와 비슷한 논의가 되어 있다.

4. 수치 예제

예제 1: 다음 값을 갖는 공칭 시간지연 시스템 (3)을 고려하자[6,11].

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0 \\ 0 & -0.9\end{bmatrix}, A_1=\begin{bmatrix}-1 & 0 \\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

이 예제는 여러 문헌에서 안정성 조건을 비교하는 데 사용된 예제로서 이 논문에서도 공칭 시간지연 시스템에 대한 기존 결과와 정량적 비교를 하기 위해 사용하였다. 표 1에 그 결과를 제시하였다. 그 결과, 이 논문에서 제안한 조건(정리 1)이 기존 조건들의 성능보다 같거나([2,11]) 더 좋을 수 있다고 판단할 수 있으며 결정변수 수의 비교를 통해 이 논문에서 제안한 조건이 간단하다는 것을 알 수 있다.

예제 2: 다음 값을 갖는 노옴한계형 불확실성을 갖는 시간지연 시스템 (1)을 고려하자[6,11].

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0 \\ 1 & -3\end{bmatrix},\ A_1=\begin{bmatrix}-1 & 0 \\ -0.8 & -1\end{bmatrix}$$

$$D=D_1=\begin{bmatrix}0.2 & 0 \\ 0 & 0.3\end{bmatrix}, E=E_1=\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

표 2에 이 시스템에 대한 여러 안정성 조건을 비교한 결과를 제시하였다. 이 결과에서도 이 논문에서 제안한 조건이 기존의 조건들[6,8]에 비해 좋은 성능을 보임을 알 수 있다.

5. 결 론

이 논문에서는 노옴한계형 불확실성을 갖는 시간지연 시스템을 위한 지연 종속적 안정성 조건을 제안하였고 그 유용성을 수치 예제를 통해 보였다. 제안된 조건이 시스템 모델 변환을 이용하지 않기 때문에 이로부터 유입되는 보수성을 방지할 수 있고, 기존의 조건들보다 성능이 떨어지지 않으면서도 결정변수의 개수가 적어 수치적 복잡도가 낮다는 장점이 있다. 따라서 큰 규모의 시간지연 시스템의 안정성을 다룰 때 유용할 것으로 판단된다.

<표 1> 지연 종속적 안정성 조건 비교 (예제 1)

안정성 조건	최대 허용 h_M	결정변수의 수
Li and de Souza [6]	0.8571	9
Niculescu *et al.* [9]	0.9999	11
Moon *et al.* [8]	4.3588	16
Fridman and Shaked [2]	4.47	27
Xu and Lam [11]	4.4721	17
정리 1	4.4721	9

<표 2> 지연 종속적 안정성 조건 비교 (예제 2)

안정성 조건	최대 허용 h_M
Li and de Souza [6]	0.4428
Moon *et al.* [8]	5.6312
Xu and Lam [11]	$+\infty$
정리 2	$+\infty$

감사의 글

이 논문의 연구는 BK21 연구지원으로 수행되었습니다.

[참 고 문 헌]

[1] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, 1994.

[2] E. Fridman and U. Shaked, "A descriptor system approach to H_∞ control of linear time-delay systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 47, no. 2, pp. 253-270, 2002.

[3] X.-P. Guan and C.-L. Chen, "Delay-dependent guaranteed cost control for T-S fuzzy systems with time delays," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 12, no. 2, pp. 236-249, 2004.

[4] Q.-L. Han and D. Yue, "Absolute stability of Lur'e systems with time-varying delay," *IET Control Theory Appl.* vol. 1, no. 3, pp. 854-859, 2007.

[5] L.-S. Hu, P. Shi, and Y.-Y. Cao, "Delay-dependent filtering design for time-delay systems with Markovian jumping parameters," *Int. J. Adapt. Control Signal Process.*, vol. 21, pp. 434-448, 2007.

[6] X. Li and C.E. de Souza, "Criteria for robust stability and stabilization of uncertain linear systems with state-delay," *Automatica*, vol. 33, pp. 1657-1662, 1997.

[7] C. Lin, Q.-G. Wang, T.H. Lee, and Y. He, "Fuzzy weighting-dependent approach to H_∞ filter design for time-delay fuzzy systems," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 55, no. 6. pp. 2746-2751, 2007.

[8] Y.S. Moon, P. Park, W.H. Kwon, and Y.S. Lee, "Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems," *Int. J. Control*, vol. 74, no. 14, pp. 1447-1455, 2001.

[9] S.I. Niculescu, A.T. Neto, J.M. Dion, and L. Dugard, "Delay-dependent robust stabilization of linear systems with delayed state: an LMI approach," in *Proc. IEEE Conf. Descision and Control (CDC),* pp. 1495-1496, 1995.

[10] D. Peaucelle and F. Gouaisbaut, "Discussion on: 'Parameter-dependent Lyapunov function approach to stability analysis and design for uncertain systems with time-varying delay," *European J. Control*, vol. 11, no. 1, pp. 69-70, 2005.

[11] S. Xu and J. Lam, "Improved delay-dependent stability criteria for time-delay systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 50, no. 3, pp. 384-387, 2005.

[12] W. Zhang, L. Yu, and X. Jiang, "Delay-dependent generalized H_2 filtering for uncertain systems with multiple time-varying state delays," *Signal Processing*, vol. 87, pp. 709-724, 2007.