

Level Set Method를 이용한 전자기 시스템의 다물질 최적설계

이장원, 심호경, 이현, 왕세명
광주과학기술원

Level Set based Optimization of Electromagnetic System using Multi-Material

Jangwon Lee, Hokyung Shim, Heon Lee, Semyung Wang
GIST(Gwangju Institute of Science and Technology)

Abstract - This paper presents a topological shape optimization for electromagnetic system using a level set method. The optimization is progressed by updating the implicit level set function from the Hamilton-Jacobi equation. The up-wind scheme is used for numerical implementation of the Hamilton-Jacobi equation. In order to validate the proposed optimization, the core part of a C-core actuator is optimized by three cases using different materials; (single steel), (two steels), and (steel and magnet).

1. 서 론

위상최적설계 방법 중 SIMP(Solid Isotropic material with Penalization) 방법이 많이 알려져 있다[1]. 하지만, SIMP 방법을 포함한 기존의 위상최적설계는 설계영역에서 모호한 부분이 자주 나타나 실제 제작이 어려운 단점이 있어 이를 개선하기 위한 알고리즘의 개발이 요구되어 왔다.

1988년에 Osher와 Sethian에 의해서 Level set 방법이 소개됐다 [2]. Level set 방법을 이용한 최적설계기법은 소위 경계기준 설계라 명명되고, 이는 3차원 함수의 2차원 경계형상최적화를 통한 2차원 위상최적설계이다. 구조의 경계로부터 물질이 있는 영역과 없는 영역이 명확히 구분됨으로써 모호한 영역은 배제된다. 위상 최적설계의 단점을 극복할 수 있다는 점으로부터 구조의 최적설계에서 먼저 연구됐다[3-4]. 전자기 문제에서는 level set 방법을 이용한 최적설계 연구가 미진한 점과 기존 위상최적설계기법의 단점을 극복하기 위해 본 연구의 필요성이 부각된다.

본 논문에서는 level set 방법을 이용하여 전자기 시스템을 최적설계 함으로써 그 적용영역과 실용성을 확장하였다. 특히, 하나의 설계 영역에서 여러 개의 물질들을 동시에 고려한 최적설계를 수행하여 하나의 물질만을 고려한 경우에 비해 설계 영역을 넓혔으며, 설계 물질들은 다른 재질의 철과 자석을 고려하였다.

2. 본 론

2.1 지배방정식

이 논문에서는 지배방정식을 위해 정전자계에서의 맥스웰 방정식이 고려됐으며 다음과 같다.

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s, \tag{1}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}), \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{3}$$

여기에서 \mathbf{H} 는 자기장세기, \mathbf{J}_s 는 전류밀도, \mathbf{B} 는 자속밀도, \mathbf{M} 은 자석의 잔류자화, \mathbf{A} 는 벡터 포텐셜, μ 는 물질의 투자율, 그리고 μ_0 는 진공상태에서 투자율이다. 식 (2)를 식 (1)에 대입하였을 때 다음과 같은 방정식을 유도할 수 있다.

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) = \mathbf{J}_s + \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{\mu} \mathbf{M} \right). \tag{4}$$

식 (4)에서 양변에 가상 벡터 포텐셜 \bar{A} 를 곱하여 전체해석영역 Ω 에 대해 적분을 취한 후, 자체에서의 경계조건을 부여하면 다음과 같은 최종 변분식을 구한다.

$$\iint_{\Omega} \left[(\nabla \times \bar{A}) \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{A} \right) \right] d\Omega = \iint_{\Omega} \left[\mathbf{J}_s \cdot \bar{A} + \frac{\mu_0}{\mu} \mathbf{M} \cdot (\nabla \times \bar{A}) \right] d\Omega \quad \text{for all } \bar{A} \in \bar{A}, \tag{5}$$

여기에서 \bar{A} 는 \bar{A} 가 정의되는 허용 공간을 나타낸다. 이 식의 좌

항은 에너지 쌍선형 형태 $a_\Phi(A, \bar{A})$ 이고, 우항은 힘 선형 형태 $l_\Phi(\bar{A})$ 이다.

2.2 Level set 방법을 이용한 최적설계

2.2.1 최적설계문제

문제설정은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && f_\Phi(A, \Phi) = \iint_{\Omega} g(A, \nabla A, \Phi) d\Omega, \\ &\text{subject to} && a_\Phi(A, \bar{A}, \Phi) = l_\Phi(\bar{A}), \\ &&& V(\Phi) \leq V_{\max}, \end{aligned} \tag{6}$$

여기에서 Φ 는 level set 함수로 독립 설계변수, V 는 설계영역의 부피, V_{\max} 는 최대허용부피를 가리킨다. 부피 V 는 다음 식 (7)과 같다.

$$V(\Phi) = \iint_{\Omega} H(\Phi) d\Phi, \quad \text{where } H(\Phi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \Phi \geq 0 \\ 0 & \text{if } \Phi < 0. \end{cases} \tag{7}$$

즉, 설계 영역은 식 (7)의 level set 함수에 의한 Heaviside 함수로 나타내고, 이 함수의 Φ 에 대한 미분은 델타함수(δ : Dirac delta function)이다.

2.2.2 설계민감도

설계민감도를 계산하기 위해 본 연구에서는 보조변수법(Adjoint variable method)을 사용하였다. 목적함수, 에너지 쌍선형 형태와 힘 선형 형태에 대해 설계변수로 전미분하면 각각 다음과 같은 식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} f' &= \frac{d}{d\tau} \left[\iint_{\Omega} g(A(x; \Phi + \tau \delta \Phi), \nabla A(x; \Phi + \tau \delta \Phi), \Phi + \tau \delta \Phi) d\Omega \right]_{\tau=0} \tag{8} \\ &= \iint_{\Omega} [g_{,A} A' + g_{,\nabla A} \nabla A'] d\Omega + \iint_{\Omega} g_{,\Phi} \delta \Phi d\Omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a' &= \frac{d}{d\tau} a_{\Phi+\tau\delta\Phi}(A(x; \Phi + \tau \delta \Phi), \bar{A}) \Big|_{\tau=0} = a_\Phi(A', \bar{A}, \Phi) + a'_{\delta\Phi}(A, \bar{A}, \Phi) \tag{9} \\ &= a_\Phi(A', \bar{A}, \Phi) + \iint_{\Omega} J(A, \bar{A}) \delta \Phi d\Omega, \end{aligned}$$

$$l' = \frac{d}{d\tau} l_{\Phi+\tau\delta\Phi}(\bar{A}) \Big|_{\tau=0} = l'_{\delta\Phi}(\bar{A}) = \iint_{\Omega} F(\bar{A}) \delta \Phi d\Omega, \tag{10}$$

여기에서 τ 는 level set 경계에서 Fréchet derivative로 인한 방향 $\delta \Phi$ 로 변화하는 사이즈를 제어하는 파라미터, A 는 상태 변수, 그리고 x 는 독립변수이다. 식 (8)~(10)에서 설계변수에 대한 explicit 항의 미분은 level set 함수 또는 이를 포함한 변수에 대해 직접미분 된다. Implicit 함수는 직접적인 미분이 쉽지 않으므로 보조변수법으로부터 미분 식을 유도한다. 식 (8)과 식 (9)에서 나타나는 implicit 함수에 대해 보조변수법을 적용하면 다음과 같다[5].

$$f' = -a'_{\delta\Phi}(A, \lambda, \Phi) + l'_{\delta\Phi}(\lambda) + \iint_{\Omega} g_{,\Phi} \delta \Phi d\Omega, \tag{11}$$

여기에서 λ 는 보조변수이고, 보조방정식에서 보조힘에 대한 반응으로 계산된다.

전체 설계영역의 부피에 대한 미분은 식 (12)과 같다.

$$V' = \frac{d}{d\tau} V_{\Phi+\tau\delta\Phi}(x; \Phi + \tau \delta \Phi) \Big|_{\tau=0} = \iint_{\Omega} \delta \Phi d\Omega. \tag{12}$$

구속조건문제는 Lagrange multiplier(u)를 적용하여 구속조건이 없는 식 (13)의 Lagrange 식으로 나타낼 수 있고, 이로부터 다음 식 (14)와 같이 Lagrange 식의 미분을 유도한다.

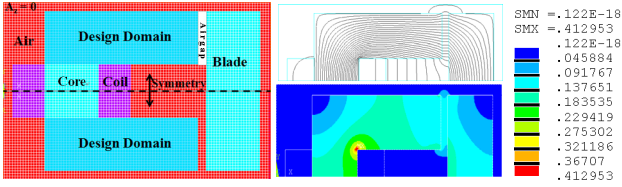
$$L(A, \Phi, u) = \iiint_{\Omega} g(A, \nabla A, \Phi) d\Omega + uV(\Phi), \quad (13)$$

$$L' = -a'_{\Phi\Phi}(A, \lambda, \Phi) + l'_{\lambda\lambda}(\lambda) + \iiint_{\Omega} g_{,\Phi} \delta\Phi d\Omega + u \iiint_{\Omega} \delta\Phi d\Omega = 0, \quad (14)$$

2.3 최적설계예제

본 연구는 Matlab 기반으로 구축하였으며, ANSYS를 해석기로 사용하여 최적설계를 진행하였다.

Level set 방법을 이용한 최적설계 기법을 C-core 액츄에이터에 적용하여 유효성을 검증하였다. Fig. 2는 C-core의 초기 형상과 해석 치를 나타내며, 대칭 구조로 인해 상부의 코어 부분만을 설계영역으로 지정하고 최적설계를 진행하였다.



(a) Initial design (b) Magnetic flux line and Magnetic flux density

<그림 1> Initial design and FEA result of C-core

Table 1에서 초기설계의 사양을 보여주고 있다. 초기설계에서는 철1을 사용하였고, 공극에서의 자기에너지는 $0.2365(\text{J/m}^2)$ 이다.

<표 1> 초기설계사양

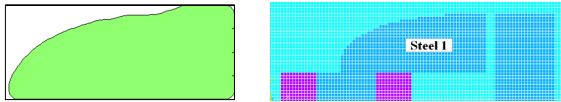
종류	비투자율 (μ_r)	전류밀도 (A/m^2)
코어(철1)	3000	0
블레이드(철1)	3000	0
코일	0.95	2000000

본 연구는 세 가지 경우에 대해 최적설계를 수행하였다.

2.3.1 하나의 철을 고려한 최적설계

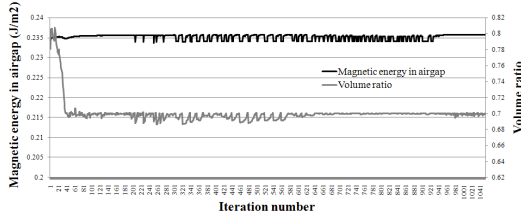
설계문제: 공극에서 자기에너지 최대화

구속조건: 철1(μ_r : 3000)의 부피 \leq 초기설계의 70%



(a) Optimized level set design (b) FE reanalysis design

<그림 2> Optimized core and FEA result (one steel)



<그림 3> History diagram of Magnetic energy and volume ratio using one steel

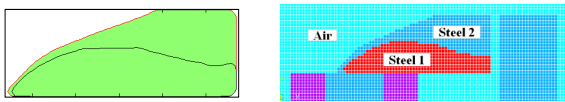
그림 2는 최적설계 된 코어 형상과 해석결과를 보여준다. 그림 3과 같이 초기설계에 비해 최적형상의 부피는 30% 줄었으며, 자기 에너지는 $0.2357(\text{J/m}^2)$ 로 초기설계의 0.34% 감소하였다.

2.3.2 두 개의 철을 고려한 최적설계

설계문제: 공극에서 자기에너지 최대화

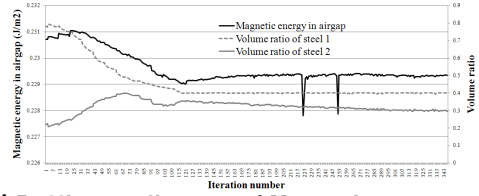
구속조건: 철1(μ_r : 3000)의 부피 \leq 초기설계의 40%

철2(μ_r : 1000)의 부피 \leq 초기설계의 30%



(a) Optimized level set design (b) FE reanalysis design

<그림 4> Optimized core and FEA result (two steels)



<그림 5> History diagram of Magnetic energy and volume ratio using two steels

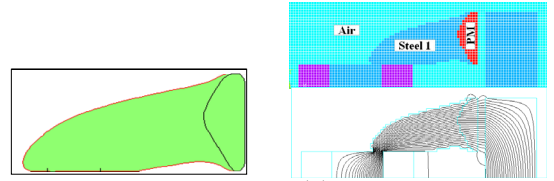
그림 4 (b)에서 투자율이 상대적으로 높은 철1이 안쪽으로 자리 잡은 것을 확인할 수 있었고, 초기설계에 비해 자기 에너지가 $0.2293(\text{J/m}^2)$ 로 3.04% 감소하였다. 하지만 본 설계는 저가 철질을 사용하여 가격 면에서 장점이 부각된다.

2.3.3 하나의 철과 자석을 고려한 최적설계

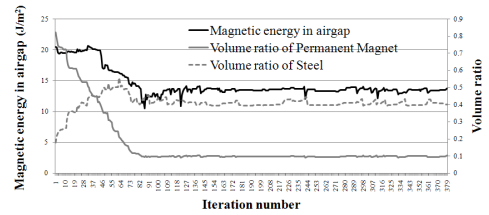
설계문제: 공극에서 자기에너지 최대화

구속조건: 철1(μ_r : 3000)의 부피 \leq 초기설계의 40%

자석(μ_r : 1.05, H_c : 951808 (A/m))의 부피 \leq 초기설계의 10%



(a) Optimized level set design (b) FE reanalysis design
<그림 6> Optimized C-core actuator and FEA result (steel and magnet)



<그림 7> History diagram of Magnetic energy and volume ratio using steel and magnet

그림 6 (b)에서 자석과 철의 위치를 확인할 수 있고, 초기설계와 자기 에너지를 비교하였을 때, 최적형상으로부터 자기 에너지가 $13.75(\text{J/m}^2)$ 로 5800% 증가 하였다. 그림 6 (b)로부터 자석이 누설되지 않고 공극에 집중하는 것을 볼 수 있다. 이것으로부터 자석의 최적설계가 잘 이루어졌음을 알 수 있다.

3. 결 론

본 연구에서는 level set 방법을 이용하여 전자기 시스템의 자기 에너지를 최대화하기 위한 최적설계를 진행하였다. 본 논문에서 제안하는 최적설계기법을 검증하기 위해, C-core 액츄에이터의 코어를 설계영역으로 하여 세 가지 다른 경우의 최적설계를 수행하였다. 하나의 철만을 고려한 경우, 투자율이 다른 두 가지 철을 이용한 경우, 그리고 철과 자석을 동시에 고려하여 최적설계를 하였다.

[참 고 문 헌]

- [1] M. P. Bendsoe, O. Sigmund, Topology Optimization: Theory, Methods and Applications, Springer, 2003.
- [2] S. Osher, J.A. Sethian, Fronts Propagating with Curvature Dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations, Journal of Computational Physics, 1988, 79, 12-49.
- [3] G. Allaire, F. Jouve, A.M. Toader, Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method, Journal of Computational Physics, 2004, 194, 363-393.
- [4] M. Y. Wang, X. Wang, A level set method for topological optimization applying to structure, mechanism and material designs. Chin J Mech. Eng., 2004, 2, 43-52.
- [5] J. Haug, K. Choi, V. Komkov, Design Sensitivity Analysis of Structural Systems. Academic Press, INC, 1986.