

전자기 시스템에서 Level Set Method를 이용한 최적화

김영선*, 최홍순**, 박일한*, 이기식***
 성균관대학교*, 경북대학교**, 단국대학교***

Shape Optimization of Electromagnetic System using Level Set Method

Young Sun Kim*, Hong Soon Choi**, Il Han Park*, Ki Sik Lee***
 Sungkyunkwan University*, Kyungpook University**, Dankook University***

Abstract - We present a level set method for numerical shape optimization of electromagnetic systems. The level set method does not only lead to efficient computational schemes, but also is able to handle topological changes such as merging, splitting and even disappearing of connected components. The velocity field on boundaries is obtained by a shape derivative of continuum sensitivity analysis using the material derivative concept and an adjoint variable technique. Two numerical results of dielectric optimization between electrodes showed that the level set method is feasible and effective in solving shape optimization problems of electromagnetic systems.

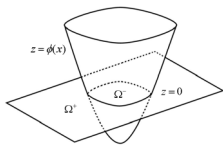
1. 서 론

LSM은 수학자인 Osher와 Sethian[1,2]에 의해서 처음 제안되었으며, fluid mechanics, material science image processing 및 computer vision 분야에서 변화하는 형상을 표현하는데 유용한 도구이다. 고전적인 형상 최적화 방법으로는 영역을 합하거나 분리하는 것이 불가능하였다. 최근 들어, 이 방법은 기계 구조나 영상처리 분야에서 형상 최적화에 활용되고 있다[6,7]. 본 논문에서는 전자기시스템의 형상최적화에 LSM를 적용하여 구현하였다. 경계의 속도는 연속체 민감도 해석에서 형상민감도를 이용하였다. 수치해석 사례로 두 개의 전극모형을 선정하여 전극사이의 유전체의 분포를 파악하는데 적용하였다.

2. 해석 이론

2.1 Level Set Method

LSM의 개념은 영역과 경계를 연속적인 함수인 level set 함수로 나타내는 것이다. 이 함수는 음함수이며 고차함수이고 이로 인해 경계의 변형을 추적할 수 있다. 형상 최적화에서 설계 경계는 목적함수를 증가 또는 감소시키는 방향으로 변화한다. 임의의 경계를 갖는 영역 Ω에 대하여 음함수 ϕ(x)는 다음과 같이 정의된다.



ϕ(x) > 0 x ∈ Ω⁺ : air
 ϕ(x) = 0 x ∈ ∂Ω : boundary
 ϕ(x) < 0 x ∈ Ω⁻ : material

<그림 1> 영역 Ω 과 level set 함수 ϕ(x)

함수가 영인 곳을 zero level set이라 하며, 이 함수는 1계 Hamilton-Jacobi 방정식으로 나타내어진다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{V}_n \cdot \nabla \phi = 0 \tag{1}$$

여기서, V_n는 형상의 변화에 영향을 미치는 경계에 대한 법선방향 속도를 나타낸다.

2.2 전자기시스템에서의 최적화

2차원 정전장 최적화문제는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \text{Min} : & F(V(\mathbf{x}, t)) \\ \text{Subject to} & \\ & \nabla^2 V = -\rho / \epsilon(\phi) : \text{정전장 지배방정식} \\ & \int_{\Omega} H(\phi) d\Omega = S^* : \text{영역 구속조건} \end{aligned} \tag{2}$$

여기서, Ω는 설계영역, S*는 초기 설계영역의 면적이다. 경계의 속도항이 형상변화를 결정하며 이는 목적함수의 변화방향을 알 수 있다. 목적함수를 감소시키는 속도항을 적절히 선택하는 것이 최적화

문제의 중요한 요소이다. 구속조건을 만족시키기 위하여 속도항을 다음과 같이 Lagrange multiplier를 이용하여 정의하였다.

$$\hat{V}_n = V_n - V_0 \tag{3}$$

여기서, V₀ = ∫_γ V_n dΓ, dΓ이다.

2.3 연속체 민감도 해석

임의의 목적함수의 전미분은 연속체 역학에서 매질변화와 보조변수법으로 유도된다. 정전계시스템에서 연속체 민감도는 다음과 같다.

$$\frac{dF}{dt} = \int_{\gamma} G(V, \lambda) V_n d\Gamma \tag{4}$$

여기서, G(V, λ) = (ε₁/ε₂ - 1)[ε₁ E_n(V*) E_n(λ*) + ε₂ E_t(V*) E_t(λ*)], λ는 보조변수 그리고 γ는 설계 경계이다[3-5]. 민감도 식은 목적함수와 속도항 사이의 관계로 표현된다. 그러므로 Hamilton-Jacobi 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - G(V, \lambda) |\nabla \phi| = 0 \tag{5}$$

위 식을 풀기위하여 최적화를 위한 반복계산이 시간영역에서의 편미분 방정식으로 변환된다. 이것을 최적화 과정에서 "pseudo time"이라 부른다.

3. 수치해석 기법

유한요소법을 이용하여 최적화문제에 LSM를 적용하기 위해서는 Hamilton-Jacobi 방정식의 변환이 필요하다. 임의의 확산 계수를 추가하여 1계 미분방정식을 2계 미분방정식으로 변환하였다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + V_n |\nabla \phi| = \alpha \nabla^2 \phi \tag{6}$$

경계적분을 하기 위하여 Dirac-Delta 함수를 이용하여 다음과 같이 정의하였다.

$$\int_{\gamma} f(\mathbf{x}) d\Gamma = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \delta(\phi(\mathbf{x})) |\nabla \phi(\mathbf{x})| d\Omega \tag{7}$$

또한, level set 함수의 초기치는 Distance function을 이용하여 zero level set를 설정하였다.

4. 사례 연구

제안한 방법을 검증하기 위하여 전극을 갖는 유전체모형을 채택하였다. 최적화 문제는 유전체가 분포를 그 시스템에너지를 최대화시키는 형상으로 재분포하는 것이다.

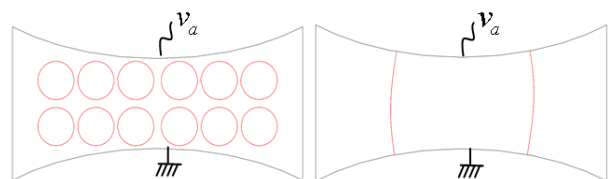
$$W = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{E}(\phi) \cdot \mathbf{D}(\phi) d\Omega \tag{8}$$

정전계에서 민감도해석을 하여 속도항을 구하면 다음과 같이 표현된다.

$$V_n = \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} - 1 \right) \left[\epsilon_1 E_n^2(V) + \epsilon_2 E_t^2(V) \right] \tag{9}$$

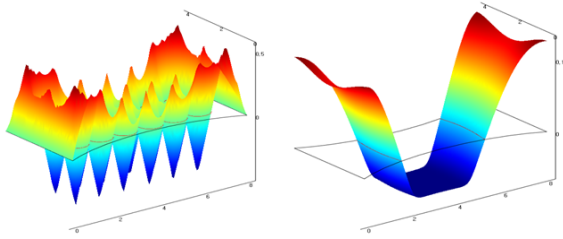
4.1 등근 전극사이의 유전체

그림 2는 초기형상과 최적화된 최종형상의 zero level set 함수를 나타내고 있다.

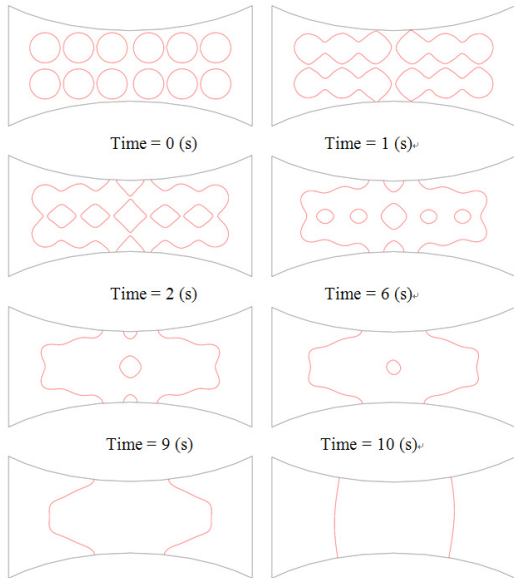


<그림 2> 초기형상과 최적화된 최종형상의 zero level set

그림 3은 초기형상과 최종형상에 대하여 level set 함수의 분포를 나타내고 있다. 그림 4에서는 형상의 변화 위상의 변화가 일어나는 zero level set를 매 스텝에 대하여 나타내고 있다.

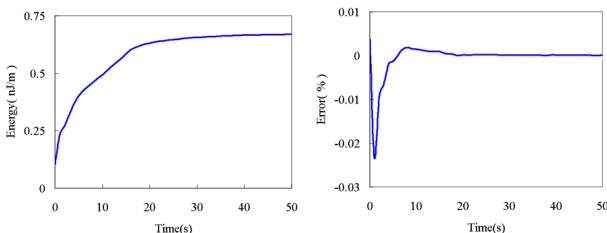


<그림 3> 초기형상과 최적화된 최종형상의 level set 함수의 분포



<그림 4> 등근 전극 모델의 최적화 과정

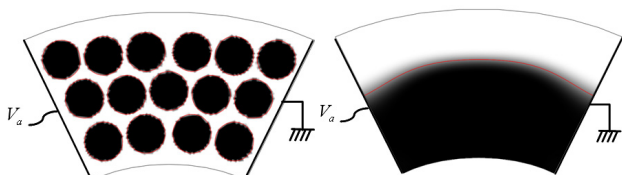
그림 5는 최적화 과정에서 정전장 시스템 에너지의 변화와 구속조건의 오차변화를 나타내고 있다. 여기서 약 30초 근처에서 최대치를 보이고 있다.



<그림 5> 시스템에너지와 구속조건의 오차변화

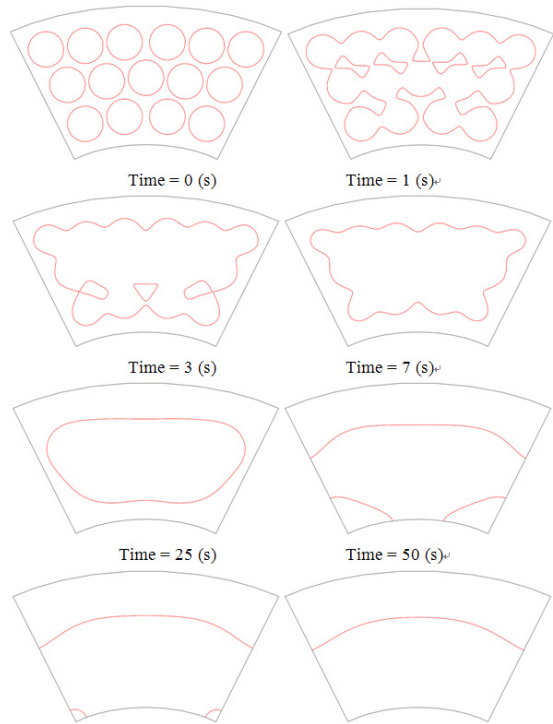
4.1 깔때기 모양의 전극사이의 유전체

그림6은 초기형상이 15개의 유전체가 분포되어 있다가 최적화 후 전계가 강한 아래 방향으로 유전체가 집중되는 최종형상을 나타내고 있다. 경계부분에서 다소 희미하게 된 것은 수치적으로 뭉개진 Heaviside 함수를 사용함에 기인한다.



<그림 6> 초기형상과 최종형상에 대한 유전체 분포

그림 9에서는 시간에 대하여 최적화 과정을 보이고 있다. 매질 영역에서 형상과 위상이 자유롭게 변화되는 것을 zero level set를 이용하여 나타내었다. 최적화 과정 초반부에 형상의 변화가 빠르고 후반부로 갈수록 형상의 변화가 없다.



<그림 7> 깔때기 전극 모델의 최적화 과정

3. 결 론

본 논문은 전자기시스템에서 LSM과 연속체 민감도 해석을 통하여 형상 최적화를 수행하였다. 사례연구를 통하여 LSM이 전자기 문제에 적합하고 효율적임을 다음과 같은 면에서 알 수 있었다.

- 형상이 변화하는 과정에서 고정된 유한요소를 사용하므로 수치해석시 적용이 용이하고 계산비용이 효율적이다.
- 기존의 유한요소 알고리즘을 적용할 수 있으므로 수치해석적으로 적용이 용이하다.
- 속도향에 해석적 형태의 연속체 형상민감도를 사용하므로 설계과정이 정확하게 모델링 된다.
- 설계변수가 주어진 구조에 의존하는 기존의 최적화 방법과 달리 설계형상이 음함수로 자연스럽게 level set 함수를 이용하여 표현된다.
- LSM은 위상최적화, 역문제(inverse problem), 운동체 모델, 유체형상 및 electrophoresis와 electrowetting 분야에도 확장이 가능하다.

[참 고 문 헌]

[1] Sethian, J. A., Level Set Methods and Fast Marching Methods : Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science, Cambridge University Press, 1999.

[2] Osher, S. and Fedkiw, R., Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces, Springer, New York, 2003.

[3] Il-han Park, Sensitivity Analysis for Shape Optimization of Electromagnetic Devices, Ph.D Dissertation, Seoul National University, Korea, 1990.

[4] Il-han Park, Jean Louis Coulomb and Song-yop Hahn, "Design Sensitivity Analysis for Nonlinear Magnetostatic Problems by Continuum Approach," Journal de Physique III, Vol. 2, No. 11, pp. 2045-2053, November 1992.

[5] Il-han Park, Jean Louis Coulomb and Song-yop Hahn, "Implementation of Continuum Sensitivity Analysis with Existing Finite Element Code", IEEE Trans. on Magnetics, Vol. 29, No. 2, pp. 1787-1790, March 1993.

[6] G. Allaire, F. Jouve, A.-M. Toader, "Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method," Journal of Computational Physics, 194, pp. 363-393, 2004.

[7] Jijun Xiao and Liu Yang, "Optimal Shape Design of the Electromagnetic Devices in a Level Set Based Implicit Moving Boundary Framework," PIERS, vol. 3, no. 1, pp. 101-105, 2007.