2008년도 대한전기학회 하계학술대회 논문집 2008. 7. 16 - 18

맥스웰 응력텐서
II. 대안 : 가상공극법에 의한 응력텐서의 발산값 구하기

최홍순*, 박일한**, 이세희*
경북대*, 성균관대**

Maxwell Stress Tensor
II. It's Divergence Calculation based on Virtual Air-gap Scheme

Hong-Soon Choi*, Il-Han Park**, Se-Hee Lee*
Kyungpook National University*, Sungkyunkwan University**

Abstract - 맥스웰 응력텐서 $\mathbf{T}$와 맥스웰 응력 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{T}$는 물리적인 의미가 없는 가상적인 양이라는 것을 논문 I에서 논하였다. 본 논문II 에서는 물리적 실체를 가지는 맥스웰 응력텐서의 발산양인 $\nabla\cdot\mathbf{T}$의 계산을 위하여 가상공극을 도입하고, 그 것의 계산법에 대하여 제시한다. 가상공극법은 기존의 여러 전자기력 계산법의 상위개념으로 적용할 수 있는 접근법으로서 매체간에 접촉시에 전자기력 계산을 위하여 개발이 된 것이다. 이 방법을 각 유한요소에 적용함으로서 체적력밀도를 구할 수 있음을 보인다.

1. 서 론

연작논문 I에서, 맥스웰 응력텐서는 물리적 실체가 없는 것으로 증명되었다. 그렇다면 전자기적인 원인에 의한 진동현상이나 기계적인 변형은 어떻게 구해낼 수 있을까? 앞에서도 언급했지만, 전자기력을 체적력으로 보아야 하고, 그 값의 분포는 맥스웰 응력텐서의 발산으로 구할 수 있다. 수치해석적으로 볼 때, 체적력을 구하기 위해서는 물체내의 작은 체적에 대해 그에 작용하는 전체 전자기력을 구하고, 그 체적을 나누어 줌으로해서 그 체적에서의 평균 체적력 밀도 $\mathbf{f}$를 구할 수 있게 된다. 이러한 과정은 발산divergence의 정의와 일치하고, 다만 관심체적의 크기를 무한소로 가져가지 않는 수치해석적인 타협인 것이다. 그러나 여기서도 여전히 문제점이 존재하는 데, 맥스웰 응력법에 의한 전체 전자기력을 구하기 위해 적분하는 과정에서 표면으로 표현 된 적분경로를 따라 적분을 행할 때, 그 경로를 따라 반드시 공극 또는 진공이어야 한다는 것이 지금까지 일반적으로 받아들이는 원리이다. 공기층이 아닌 곳으로 표면 적분을 행하게 되면 자성체나 유전체의 경우, 그 내부에서 거의 0 에 가까운 값이 도출이 되고, 결국 표면근처에서만 0 이 아닌 값이 나타나게 된다. 이러한 원인은 매체내에서 장field의 표현자인 B와 H에 대한 개념상의 불분명한 정의가 그 원인으로도 지목될 수 있다. 이러한 불분명성에 대한 엄밀한 논의는 본 논문의 의도와 벗어나고, 아직 명백한 결론을 내릴 수 있는 단계가 아니다.

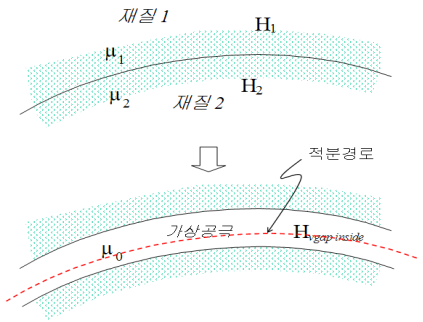
본 논문의 저자들은 실용적인 관점에서 이 문제에 대한 성공적인 해결책을 제시한 바 있는 데, 바로 가상공극virtual air-gap적인 접근법[1]이다. 이 접근법에 의하면 두 개의 자성체가 적당한 거리를 두고 특정 자계하에 있을 때, 상호간에 전자기력이 발생이 되는 데, 그 간격 거리를 줄여나가 완전한 접촉이 되었을 때도, 각 매체의 전체 전자기력을 계산해 낼 수 있는 방법이다. 물론, 유전체의 경우도 동일하게 적용이 가능하다. 접촉면에서도 마치 공극이 미소하게 존재하는 것으로 가정된 방법이며 다음 절과 참고문헌 [1]-[4]등을 참고하기 바란다. 맥스웰 응력을 면적 적분할 때, 어떠한 B, H, 투자율을 취하는가의 문제가 가상공극하에서는 분명해지게 되는 데, 바로 가상공극에서의 그 값들을 취하면 되는 것이다. 가상공극을 유한요소의 각 요소의 변에서 적용하면 요소에서의 전체전자기력을 구할 수 있는 데, 이를 요소의 크기로 나누면 그 요소에서의 평균적인 체적력 밀도가 나오게 된다[5]. 이렇게 구한 체적력 밀도는 그 요소에서의 맥스웰 응력텐서의 평균적인 발산을 의미한다. 이러한 체적력 밀도는 $\nabla\cdot\mathbf{T}$를 의미하는 것이고, 논문 I에서 언급했듯이 물리적 실체를 획득한 양으로 간주된다. 가상공극법에 의한 $\nabla\cdot\mathbf{T}$의 계산은, 맥스웰응력텐서 $\mathbf{T}$와 맥스웰 응력 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{T}$의 무효화에 따른 대안으로서의 의미가 있음을 본 논문에서 강조하고자 한다.

가상공극적인 방법은 모든 전자기력 계산법에 통용되는 상위적인 개념의 접근법으로서, 지금까지 자하법[2], 자화전류법[3], 맥스웰 응력법[1], 가상일법[4]등에 모두 성공적으로 적용이 된바 있다.

2. 본 론

2.1 가상공극에 의한 매체간 접촉시 힘구하기

지금까지는 두 개의 자성체가 접하고 있을 경우, 각 자성체에 미치는 전자기력을 구하려면 그 접촉면 사이에 공기층을 만들어 주어야 수치적인 계산이 가능하였었다. 공기층을 실제적으로 만들지 않더라도, 가상적으로 공기층을 두어서 자성체가 서로 접하고 있는 경우라도 전자기력을 계산할 수 있는 방법은 일반화된 자하법generalized magnetic charge method[2]을 통해 개발이 되었는데, 가상공극에서의 자계값 B 또는 H를 전자기적 경계조건을 만족하면서 수식으로 유도될 수 있었다. 즉, 한번 풀이된 해를 가지고, 후처리 과정에서 가상공극에서의 자계값을 얻어낸다는 것이다. 일반화된 자하법에서는 등가적인 자하가 접촉하고 있는 면에서도 서로 상쇄되어 없어지지 않는다는 가정을 도입하여 접촉상태에서도 각 자성체의 전체 전자기력을 계산 한 것이다. 자하가 자화magnetization을 모델링하기 위한 가상적인 방법이고, 이러한 등가 소스가 분자 또는 원자 내부에서 발생한다고 할 때, 두 원자 간에 완전한 접촉이 이루어져 표면으로 등가화 된 자하가 서로 상쇄 된다고 보는 것은 애초에 무리가 있는 가정이라 볼 수 있다. 상쇄된다고 보기 보다는 서로 일정한 거리를 두고 모두 존재하되, 그 효과가 일정 거리 이상에서 상쇄된다고 보는 것이 더욱 합리적이라 볼 수 있는 것이다. 일반화되는 과정을 관찰해보면 마치 두개의 자성체가 접촉 후에도 그 사이에 가상적으로 공극(가상공극)이 있는 것과 같은 수식이 유도됨을 보였던 것이다. 두 개의 자성체가 서로 끌리는 전자기력에 의해 접근해갈 때, 그 전자기력이 접촉시에 가장 큰 값을 유지한다는 직관적인 상식과 본 방법에 의한 결과는 정확히 일치한다. 기존의 방법에서는 접촉시의 계산은 불능상태라 보고 계산을 회피하거나 실제공극을 두는 임시방편적인 수단을 사용한다. 이러한 가상공극은 일반화된 자화전류법 generalized magnetizing current method을 통해서도 동일하게 유도가 될 수 있었다[3].



<그림 1> 두 재질간의 사이에 가상공극의 생성과 맥스웰 응력을 위한 적분경로

가상공극은 등가소스법인 자하법과 자화전류법으로 접근할 때 동일한 형태로 나타나고, 에너지 접근법인 맥스웰 응력법과 가상일virtual work 법에서 다르게 표현이 된다. 자세한 유도과정은 참조문헌을 참고하고 여기서는 맥스웰 응력과 가상일법을 위한 가상공극상의 $\mathbf{H}_{vgap\ inside}$ 값의 최종식을 다음과 같이 나타낸다. 우선, 그림 1에서 재질 1에서부터 B값의 면수직성분의 연속과 H값의 면수평성분 연속의 원리로부터 다음의 가상공극 $\mathbf{H}_{vgap\ from\,1}$ 식을 얻어낼 수 있다.

$$\mathbf{H}_{vgap\ from\,1} = (\mu_{1r}H_{1n} + M_{01n})\mathbf{n}_1 + H_{1t}\mathbf{t}_1 \tag{1}$$

여기서, 각 변수의 색인 1은 재질 1을 뜻하고, μ_r은 비투자율, H_n, H_t은 각각 자계 세기의 수직, 수평성분, M_{0n}은 영구자화의 수직성분을 뜻한다. 재질 2로부터 가상공극을 구하면,

$$\mathbf{H}_{vgap\ from\,2} = (\mu_{2r}H_{2n} + M_{02n})\mathbf{n}_2 + H_{2t}\mathbf{t}_2 \tag{2}$$

와 같다. 색인 2는 재질 2를 뜻한다. 맥스웰 응력은 가상공극의 중간을 지나는 적분경로를 취하므로, (1)와 (2)의 평균을 취한 값이 중간 적분경로의 가상공극값으로 유도가 된다[4].

$$\mathbf{H}_{vgap\ inside} = \frac{\mathbf{H}_{vgap\ from\ 1} + \mathbf{H}_{vgap\ from\ 2}}{2} \tag{3}$$

(3)식을 사용하여 가상공극에서의 맥스웰 응력을 구하고(응력 자체는 물리적 의미가 없음을 논문I에서 언급하였다), 접촉면과 나머지 폐곡면에 대해 적분을 하면, 폐곡면이 감싸는 매체에 대해 물리적 의미를 가지는 전체 전자기력을 구할 수 있게 되는 것이다.

2.2 체적력 밀도 $\nabla \cdot \mathbf{T}$ 의 계산

어떤 자성체 덩어리(또는 유전체)에 전자기력이 작용하여, 그에 의한 변형을 구하려면 그 덩어리의 전자기적인 체적력을 구할 필요가 있다. 이 체적력을 구하기 위한 개념적인 접근을 우선 살펴보자.

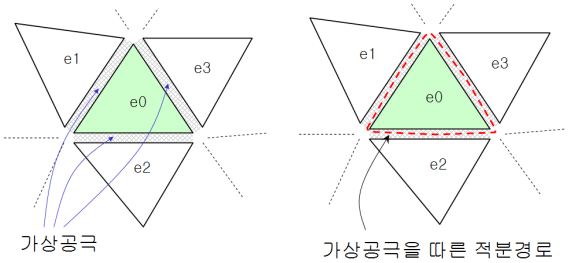
주어진 자계하에서 어떠한 자성체 덩어리에 미치는 전자기력은 밖에서 주어지는 외력과 덩어리 내부의 자성체 질점간에 서로 작용하는 힘인 내력이 있다. 체적력 밀도의 의미는 바로 이런 질점에 미치는 모든 영향을 고려한 전자기력 밀도인 것인데, 이러한 체적력과 더불어 기계적 구속경계조건을 부여하면 자성체 덩어리의 변형을 구할 수 있게 되는 것이다. 어떤 질점에 미치는 내력은 자신의 질점을 제외한 모든 질점과의 상호 작용으로부터 힘을 모두 더해야 하고, 모든 절점에 대해 이러한 적분을 행하는 것은 무한대의 시간이 걸리게 된다. 만약, 유한요소와 같이 N개의 체적으로 덩어리를 분할한다고 하면, 그 덩어리의 내부 힘을 구하기 위해 N(N-1)번의 유한요소 해석을 요구하게 되며, 이는 현실적인 방법이 되지 못한다. 덩어리 관점에서 외력과 내력을 구분하기 보다는, 관점을 덩어리 내부의 질점으로 옮길 필요가 있는 데, 질점에서 미치는 모든 힘은 모두 외력으로 보는 것이다. 이 질점에 미치는 힘이 바로 체적력 밀도로 표현이 된다.

가상공극적인 관점에서는 특정 질점을 유한한 크기로 보고, 그 유한한 부위를 감싸는 가상공극을 생각할 수 있으며, 이 공극 안쪽의 체적에 대해 전체 전자기력을 구하게 된다. 이러한 유한체적에 대한 전체 전자기력의 의미는 덩어리 밖의 모든 상황과 덩어리 내부에서 일부분인 유한체적과 그 유한체적을 제외한 다른 모든 부위와의 관계를 반영한 것이라 할 수 있다. 즉, 가상공극에서의 자계값은 앞에서 언급한 모든 관계를 반영한 최종 결과물로 간주할 수 있다. 이렇게 구한 전체 전자기력을 그것의 유한체적으로 나누어 주게 되면 그 유한체적내에서의 평균적인 체적력 밀도로 간주할 수 있다. 유한한 체적은 그 부피를 무한소로 가져감으로 해서 하나의 질점을 표현 할 수 있게 되는데, 무한소의 전자기력을 무한소 부피로 나눈, 즉, 질점에서의 평균적 개념의 체적력 밀도를 구하게 되는 것이다. 이와 같은 과정은 다음과 같이 맥스웰 응력의 발산인 체적력 밀도 $\nabla \cdot \mathbf{T}$ 의 정의로 표현 된다.

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \lim_{V \to 0} \frac{\oint_{\partial V} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} dS}{V} \tag{4}$$

여기서, 현실적인 수치해석적 타협을 통해, 무한소의 부피 대신에 유한한 크기의 요소를 하나의 커다란 질점으로 보고 거기에서의 평균적인 체적력 밀도를 구하는 방식으로 귀착이 될 수 있다. (4)식에서 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ 는 가상공극에서의 맥스웰 응력에 해당하고, 물리적 실체가 없는 맥스웰 응력 또는 표면전자기력 밀도 $\mathbf{f}_s$ 이다. 한 요소내의 무한소 질점들에서의 체적력 밀도는 한 요소 전체에서 구한 체적력 밀도와 동일하다고 봐도 수치해석적으로 무방할 것이다. 위와 같은 개념적 접근에 의해 가상공극을 사용하여, 자성체 덩어리내의 임의의 질점에서의 자기적 외력을 후처리과정에서 완전하게 구해낼 수 있다고 볼 수 있다.

하나의 요소에 대한 가상공극과 맥스웰 응력의 실제적인 적용은 그림 2와 같이 할 수 있다. e0에 대한 전체 전자기력에 그 부피를 나누어 줌으로 해서, 전자기 체적력 밀도를 구할 수 있게 된다. 이렇게 구한 체적력 밀도는 요소 e0 내의 모든 질점의 체적력 밀도에 대한 평균값으로 간주되어야 한다.



<그림 2> 체적력밀도를 구하기 위해, 요소 e0 주위에 가상공극 만들어 맥스웰 응력 적분하기.

그림 3에서는 영구자석 표면부착형 전동기SPM-motor내의 체적력을 보여주고 있다. 본 해석은 유한요소법에 의해 수행이 되었고, 각 요소별로 가상공극과 맥스웰 응력법을 사용하여 각 요소별 전자기력을 표시한 것이다. 그림에서 보듯이 표면에 치우치지 않은, 자성체 내부에 비교적 골고루 분포하고 있는 전자기력 밀도를 보여주고 있다. 체적력 분포가 국소적인 부위에서 일정치 못하고 들쑥날쑥한 것은 요소의 모양과 방향성에 의존적인 체적력의 특성 때문이다. 부드러운 체적력분포를 얻으려면 추가적인 정규화 과정등이 필요하다. 체적력의 적분과 기존의 전체 전자기력 계산방법의 비교를 통해 체적력 밀도의 타당성은 확보 될 수 있었다[5].

분포적인 전자기 체적력을 입력으로하여 기계구조해석이 가능한 상용 소프트웨어를 사용하려면, 전자기 체적력을 각 요소별로 구조해석 소프트웨어 입력이 되거나, 요소의 모양과 개수가 일치하지 않는 경우에는 보간법에 의해 체적력 밀도를 입력하여야 할 것이다. 전자기 체적력을 각 절점에서의 양으로 변환하여, 입력하는 방법도 가능할 것이다. 기계적 변형의 크기가 전자기적 변화를 초래할 정도로 크다면, 변경된 형상으로 전자기 해석을 재수행하는 절차가 가미되어야 하며, 이러한 비선형적 해법과정은 특정 오차 이내까지 반복적으로 수행되어야 한다.

<그림 3> 가상공극과 맥스웰 응력텐서의 발산으로부터 계산한 4극 SPM 전동기 내부의 체적력 분포도

3. 결 론

본 논문에서는, 물리적 의미를 부여할 수 있는 전자기 체적력 $\nabla \cdot \mathbf{T}$ 의 계산을 위한 방법론으로 가상공극법이 유용함을 제시하였다. 각 요소에 대해 가상공극을 적용함으로 해서, 요소별 전자기력을 구할 수 있는 것이며, 이 값에 요소의 체적값을 나누어 줌으로해서 체적력 밀도값을 얻어 낼 수 있다. 가상공극에 의한 전자기 체적력 계산은 맥스웰 응력법 뿐 아니라, 기존의 자하법, 자화전류법, 가상일법등에 모두 적용이 가능하며, 본 논문에서 언급한 참고문헌을 참조하기 바란다.

무효화된 맥스웰 응력의 직접적인 기계적 가진원으로서의 사용은 향후 지양되어야 하며, 대안으로 본 논문이 제시한 체적력을 사용하기를 강력히 권고하는 바이다.

[참 고 문 헌]

[1] H. S. Choi, I. H. Park, and S. H. Lee, "Concept of virtual air gap and its application for force calculation," *IEEE Trans. Magn.*, vol.42, no.4, pp. 663-666, April 2006.

[2] H. S. Choi , S. H. Lee, and I. H. Park, "General formulation of equivalent magnetic charge method for force density distribution on interface of different materials," *IEEE Trans. Magn.*, vol.41, no.5, pp. 1420-1423, May 2005.

[3] H. S. Choi, S. H. Lee, and I. H. Park, "Generalized Equivalent Magnetizing Current Method for Total Force Calculation of Magnetized Bodies in Contact," *IEEE Trans. Magn.*, vol.42, no.4, pp.531-534, April 2006.

[4] H. S. Choi, S. H. Lee, Y. S. Kim, K. T. Kim, and I. H. Park, "Implementation of Virtual Work Principle in Virtual Air Gap," *IEEE Trans. on Magn*, vol.44, no.6, June 2008.

[5] H. S. Choi, S. H. Lee, and I. H. Park, "Electromagnetic body force calculation based on virtual air-gap," *Journal of Applied Physics 99*, 08H903, 2006.