

맥스웰 응력텐서 I. 그 의미와 한계에 대하여

최홍순*, 박일한**, 문원규***
경북대*, 성균관대**, 포스텍***

Maxwell Stress Tensor I. It's Meaning and Inherent Limits

Hong-Soon Choi*, Il-Han Park**, Won-Kyu Moon***
Kyungpook National University*, Sungkyunkwan University**, Postech***

Abstract - 맥스웰 응력텐서는 전기기기의 전자기력을 해석함에 현재 가장 널리 사용되는 방법 중 하나이다. 본 논문에서는, 맥스웰 응력텐서 자체는 물리적인 의미가 없는 가상적인 응력텐서이며, 고체역학 또는 동역학적인 해석을 위해 이를 물리적인 기계력으로 취하면 안 된다는 것을 보이고자 한다. 물리적 의미를 부여할 수 있는 것은 응력텐서의 발산인 $\nabla \cdot \mathbf{T}$ 이며 이는 전자기 체적력을 의미하고, 중력과 같은 원격 힘이다. 맥스웰 응력텐서의 유도과정을 에너지적인 접근에서 관찰하여 그 과정으로부터 본 결론을 유도할 수 있음을 보인다. 본 논문은 두 개로 구성되는 데, 본 논문 I에는 유효성의 한계에 대한 논의, 별도의 연작 논문인 II에서는 대안으로서 가상공극을 사용한 체적력 계산법을 제시한다.

1. 서 론

자성체에 미치는 전자기력밀도 계산은 전기기기의 기계역학적인 현상, 즉, 진동 또는 변형의 관찰을 위해서는 필수적인 과정이라 할 수 있다. 전기 또는 기계분야 공학자들은 맥스웰 응력 텐서 Maxwell stress tensor와 같은 이미 기존의 확고하게 구축되어 졌다고 여겨지는 전자기력의 계산 방법들을 사용하여 기계역학적 분석과 응용을 하고 있다. 그러나, 현재까지도 자성체에서 기계역학적 해석의 기반이 되는 전자기력의 밀도의 계산식은 그 개념뿐 아니라 표현식에 대한 논란이 계속되고 있으며, 명확한 결론과 물리적인 개념의 정립이 제대로 이루어지지 않은 논란의 상태임을 인식하여야 한다. 진공 또는 공기 중에서의 전자기 전류에 미치는 힘에 관한 식은 오랜 동안 여러 확고한 실험을 통해 이미 검증되었고 논의의 여지가 없다. 반면, 자성체와 같은 매체에 미치는 전자기력은 자성체 덩어리 전체에 미치는 힘은 분명한 결론을 가진다고 보는 한편, 내부 또는 표면의 전자기력 밀도에 관해서는 여전히 논란상태에 있는 것이다. 전자기력밀도 계산에 흔히 사용되고 있는 맥스웰 응력 텐서의 경우 그 물리적인 정당성에 대한 여러 의구심에도 불구하고, 별다른 대안이 없다고 판단하여 그대로 받아들이고 있는 실정이다. 많은 대다수의 공학 분야의 연구자가 이러한 문제점에 대해 정확하게 인지하지 못하고 있거나, 그 사용이 너무나 퍼져있어 마치 그 정당성이 이미 확보 되었을 것으로 간과 하고 있는 것이다. 결론적으로 본 논문에서는 맥스웰 응력과 응력텐서는 물리적 실체가 없음을 보이게 될 것이다.

근 150여 년이 넘도록 지속되어온 자성체와 유전체 같은 매체내의 전자기력밀도에 대한 논란은 명확한 결론을 내리지 못한 채 1970년대 이후에 많이 사라지고 있으며, 현재에는 일부 학자그룹들에 의해 간간히 제기되고 있는 형편이다. 리날디 Rinaldi와 브레너 Brenner (이하, 리날디도만 표기)는 2002년의 논문[1]에서 맥스웰 응력 텐서의 여러 응용에 대해 정면으로 반박하는 데, 그 이유로, 맥스웰 응력 텐서에 의한 표면전자기력의 물리적인 의미를 부여할 수 없기 때문이며, 이를 응용한 연구는 심각한 유효성의 문제에 봉착할 것이라고 주장하였다. 본 논문의 저자들의 지식한도 내에서는, 리날디의 연구는 맥스웰 응력텐서의 표면력으로서의 물리적 의미를 부정한 유일한 논문으로 판단된다. 여러 학자들에 의해 다수의 논문에서 전자기력의 혼란스러움에 대해 언급하고 있지만, 결국에는 자신만의 방식으로 다른 대안을 제시하는 데 그치고 있으며, 그 대안 또한 혼란스러움의 한 축을 이루고 있는 것이다. 아직 어느 누구도 이 혼돈을 정리해지지 못하고 있다고 평가된다. 그런 측면에서 비록 맥스웰 응력텐서에 대해 국한하고 대안 제시가 미비하지만, 이의 의미를 정밀하게 관찰한 리날디의 논문은 주목할 만하다. 리날디의 이러한 주장은 완전히 새로운 것은 아니고, 이미 스트라튼 Stratton 도 맥스웰 응력 텐서가 물리적인 의미를 갖지 못함을 그의 1941년도의 저서에서 언급한 바 있다 [2].

본 논문에서는, 맥스웰 응력이 표면전자기력 밀도로서 물리적인 의미를 왜 획득하지 못하는가에 대한 에너지 관점에서 구체적인 논리를 제시하여 리날디의 주장을 보완하고, 고체역학적인 사고실험을 통한 맥스

웰 응력의 무의미함을 점검하여 본다. 반면 체적력은 물리적인 의미를 획득함을 보일 것이다. 연작 논문 II에서는 전자기 체적력밀도에 해당하는 맥스웰 응력의 발산 계산을 위해 가상공극법을 도입한다. 리날디의 논리와 본 논문의 논리의 정밀한 비교 및 좀 더 자세한 추가적인 논의는 국내의 논문지를 통해 시도될 것이다.

2. 맥스웰 응력텐서의 의미

본 논문에서 언급하는 용어에서 혼동하지 말아야 할 것으로, 맥스웰 응력텐서 \mathbf{T} 는 이것의 발산 divergence인 $\nabla \cdot \mathbf{T}$ 와는 전혀 별개로 언급할 것이며, 각각을 지칭할 때 구분하여 이해하여야 한다. \mathbf{T} 는 응력텐서, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ 는 응력 또는 표면전자기력 밀도, $\nabla \cdot \mathbf{T}$ 는 응력텐서의 발산 또는 체적력 밀도로 불리울 것이다.

맥스웰 응력 텐서는 에너지 보존법칙, 정확히는 전기적 파워의 균형 원리에 기계적 파워를 같이 고려함으로써 유도 될 수 있다. 편의를 위해 전장 에너지는 제외하고 자기적인 관점에서 파워의 균형원리를 적용하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \frac{d}{dt} \int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \frac{ds}{dt} \cdot \mathbf{f} = 0 \quad (1)$$

각 기호에 대한 설명은 생략하고, 각 항 별로 설명을 한다. 첫째항은 미소체적에 대해 외부에서 출입되는 파워(시간당 에너지)의 체적평균치를 뜻하고, 둘째항은 축적되는 시간당 자기에너지, 셋째항은 주울열 Joule's heat, 넷째항은 미소체적의 운동에 의한 기계적인 파워를 뜻한다. 이 모든 항이 더해져서 0이 나와야 한다. 이 관계식은 미분형태로서, 무한소 체적에 대한 에너지의 균형식이라 할 수 있고, \mathbf{f} 는 무한소 체적의 평균 체적력밀도라 정의된다. 이 관계로부터 재질의 선형성을 가정하면, 다음과 같은 체적력밀도 \mathbf{f} 를 나타내는 식이 유도될 수 있다[2][3].

$$\mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{T} = \nabla \cdot \left(\mu_0 \mathbf{H}\mathbf{H} - \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \mathbf{I} \right) \quad (2)$$

여기서, \mathbf{I} 는 단위텐서이다. 맥스웰 응력텐서 \mathbf{T} 로부터 맥스웰 응력 또는 표면 전자기력 밀도는 임의의 표면 수직단위벡터 \mathbf{n} 에 대해 $\mathbf{f}_s = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ 로 표현이 되고, 다음과 같다.

$$\mathbf{f}_s = \frac{1}{2} \mu_0 (H_n^2 - H_t^2) \mathbf{n} + \mu_0 H_n H_t \mathbf{t} \quad (3)$$

여기서, H_n 와 H_t 는 각각 \mathbf{H} 의 수직성분, 수평성분이다. \mathbf{t} 는 표면의 수평단위벡터이다. (2)식의 의미에서 주의 할 것은, 이 식은 파워균형식으로부터 구해진 체적력밀도 $\mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{T}$ 라는 것이다. 다시 말하면 (1)로부터 \mathbf{T} 나 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ 가 구해진 것이 아니다. \mathbf{f} 의 구체적인 형태가 (2)과 같은 표현이 된 것이다. 이 체적력밀도를 체적적분하면 전체전자기력을 구할 수 있는 데,

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{f} dV = \int_V \nabla \cdot \mathbf{T} dV \quad (4)$$

와 같이 되고, 이 식에 발산정리 divergence theorem를 적용하면,

$$\mathbf{F} = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} dS \quad (5)$$

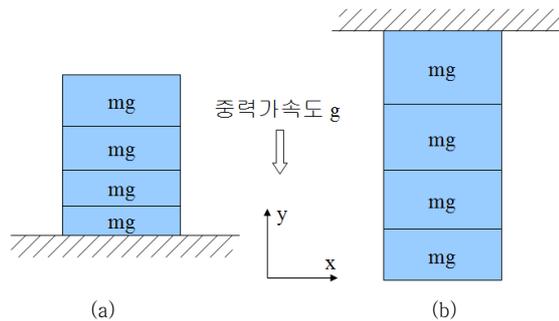
와 같이 된다. 이 발산정리에서 주의하여야 할 중요한 성질이 있는 데, (4)식의 체적적분내의 물리적 의미를 갖는 피적분함수 $\nabla \cdot \mathbf{T}$ 가 (5)식의 표면적분으로 바뀌면서 (5)식의 전체 적분값은 (4)식과 등가성이 확보가 되지만 (5)식의 피적분함수 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ 는 아무런 물리적인 의미를 담보할 수 없다는 것이다. $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ 은 이의 표면 전체 적분을 통해 전체 전자기력을

대변할 뿐, 그 자체는 아무런 물리적인 의미를 확보할 수 없는 것이다. 즉, 맥스웰 응력은 바로 이러한 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ 또는 (3)식으로 표현이 되는 데, 이식의 물리적인 실체가 없다는 것을 의미하게 된다. 다시 말하면 맥스웰 응력은 기계적인 응력의 실체가 아니다.

전자기학의 초창기인 19세기에는 이러한 맥스웰 응력을 가상적인 매체인 에테르(ether)에 작용하는 응력으로 보았던 것인 데, 아인슈타인 Einstein의 특수상대론 이론에서 에테르 가설은 완전히 폐기되었음을 상기할 필요가 있다. 결국 전자기적인 현상만에 의해 기계적 응력은 존재할 수 없으며, 전자기력의 본질인 전자기 체적력과 기계적인 구속 조건, 즉, 대상의 가속도, 특정 경계에서의 구속여부에 관한 정보가 부가되고, 이 조건으로 다시 형성된 편미분 방정식 관계를 풀어내어야 물리적 의미를 갖는 기계적인 응력이 도출이 될 수 있는 것이다. (4)에서 (5)로 변환되는 수학적 변환 과정에서, 물리적인 의미의 유실을 놓치지 말아야 한다. 수학적 변환에만 함몰되어 체적적분이 표면적분으로 변환될 때도 모든 피적분함수가 유의미할 것이라고 취급하는 것은 처명적인 실수인 것이다.

3. 고체역학적 관찰

자연계에 존재하는 근원적인 힘들, 즉, 강력, 약력, 중력, 전자기력들은 모두 원격힘이며 체적력이라 할 수 있는 데, 우리가 쉽게 접하는 것이 전자기력과 함께 중력이라 할 수 있다. 그림 1에서와 같이 2차원적인 간단한 가상적인 건물이 존재한다고 하고, 각 층의 무게는 mg 로 일정, 원래의 부피도 모두 동일하다고 하자. 중력은 이 건물에 대해 작용하여 내부에 응력을 유발하게 되고 변형이 일어 날 것이다. 즉, 힘의 근원은 중력이며, 이에 의해 응력과 변형이 만들어 질 것이다. 그러면 건물의 모든 부위에서의 중력만 알 수 있으면, 바로 응력의 분포가 구해지는가? 당연히 아니다. 그림 1에서 보듯이 동일한 중력의 분포에 대해, 기계적인 경계조건, 즉, 밑면이 고정되어 있는 경우와 윗면이 고정되어 있는 경우가 전혀 다른 응력분포와 변형이 생기게 되는 것이다. 일반적으로 y 방향에 의한 힘은 x 방향으로도 프와송비Poisson's ratio만큼 변형을 유발하지만 그림 1은 응력에 의한 변형이 y 방향으로만 생긴다고 가정을 한 것이다. 그림 1(a)는 건물의 가장아래 부분이 가장 심하게 응력을 받으며, 변형도 가장 많이 된다. 전체적인 건물의 높이는 응력으로 인해 찌부라들 것이다. 그림 1(b)의 경우는 윗부분이 가장 높은 응력과 변형이 만들어 지며, 변형의 형태도 줄어드는 것이 아닌 늘어나는 방향으로 된다. 즉, 건물전체의 길이는 중력으로 인해 늘어나게 되는 것이다. 이렇게, 동일한 중력 체적력을 가지고도 무한히 다르게 설정할 수 있는 경계조건에 따라 무한히 많은 응력분포 경우의 수를 얻을 수 있다. 즉, 실제 힘의 근원인 중력의 분포와 상관이 없이 구속경계조건에 따른 응력분포를 얻게 되는 것이다. 이 경우는 그대로 전자기 체적력의 경우에도 적용이 된다. 우리가 구한 것이 전자기 체적력이기 때문에 기계적인 구속조건이 갖추어 질 때만 전자기의 전자기력에 의한 기계적 응력을 언급할 수 있게 되는 것이다. 전자기적인 체적력만에 의해 바로 맥스웰 응력이 구해지는 것은 이런 면에서도 기계역학적 의미가 없음을 추론 할 수 있게 된다. 전동기의 경우라면, 축의 고정상태와 부하조건, 외부 프레임의 고정면이 고려 된 기계적 변형을 생각해야 하는 것이다. 전동기의 기계적 변형을 유발하는 것은 전자기력뿐 아니라 중력, 그리고 회전에 따른 진동 등이 있을 수 있다.



<그림 1> 각 층의 무게가 mg 이고 원래 크기가 동일한 경우의 중력에 의한 개략적 변형의 예. (a) 밑면이 고정 (b) 윗면이 고정

기계동역학적 관점에서 보면, 만약 물체 내부에 균일한 전자기 체적력이 존재하고 기계적 고정경계가 존재 하지 않으면, 물체는 뉴턴 Newton 공간에서 자유가속운동을 하게 되는 데, 이럴 때 동역학적 관점에서 보면 물체 내부에 응력은 전혀 생기지 않게 된다. 이러한 상황은 물체가 지표면 위에서 자유낙하로 가속될 때, 그 물체에 중력에 의한 응력이 존재하지 않은 경우와 동일하다. 그러나 맥스웰 응력은 물체의 가속여부와 상관없이 전자기장에만 의존하여 항상 존재하게 되는 데, 이 또한 실제 기계적 응력이 될 수 없음을 보여주는 측면이다.

표 1에는 전자기의 맥스웰 응력과 기계적 응력의 차이점에 대해 비교하여 정리하여 보았다.

<표 1> 전자기 응력과 기계응력 비교

	맥스웰 응력	기계 응력
물리적 의미	없음 (단, 응력을 폐표면에 대해 적분하면 전체 전자기력 의미)	있음 (면위의 질점에서의 서로 상충되는 힘)
영역	모든 공간에 존재	공기에서 정의되지 않음
찌그러짐 관계	물체의 찌그러짐 (strain) 과 상관없음	응력과 찌그러짐과 비례
응력의 근원	전자기장에 의한 체적력	체적력 (중력, 전자기력), 접촉력, 열팽창 등
연속여부	일반적으로 다른 재질 간 불연속	일반적으로 연속이나, 다른 재질 간 불연속이 나타날 수 있음

4. 결 론

본 논문에서는, 맥스웰 응력 텐서 \mathbf{T} 와 (3)식으로 나타나는 맥스웰 응력이 물리적인 의미가 없는 가상적인 양이며, 고체역학 또는 동역학적인 해석을 위해 이를 물리적인 기계력으로 취하면 안 된다는 것을 밝혔다. 물리적 의미를 부여할 수 있는 것은 오로지 $\nabla \cdot \mathbf{T}$ 이며 이는 전자기 체적력을 의미하고, 중력과 같은 원격작용에 의한 힘이다. 맥스웰 응력 텐서의 유도과정을 에너지적인 접근에서 관찰하여 그 과정으로부터 본 결론을 유도 할 수 있음을 보였고, 고체역학적 사고실험을 통해서도 동일한 결론이 도출할 수 있었다.

그 동안 많은 국내의 논문이 맥스웰 응력을 기계적 표면의 힘으로 간주하여 연구되어 오고 있는 실정이다. 전자기력에 논란은 그 동안에도 계속 있어 왔지만, 맥스웰 응력에 대한 무효성은 본 논문에서 분명히 밝혀졌으므로, 이러한 접근법은 앞으로 지양되어야 한다. 맥스웰 응력을 다른 대부분의 논문이 실험적 결과와 수치해석 결과의 일치 또는 경향적 일치를 언급하고 있는데, 이는 유사한 결과에 대한 착각으로 간주될 수밖에 없다. 체적력을 입력으로 한 변형상태와 표면력(체적력 적분과 표면력 적분이 동일한 전체 전자기력을 나타낼 때)을 입력으로 한 것은 대상 물체를 탄성체로 간주할 경우, 그 변형이 달리 나타날 수밖에 없으며, 최종적인 변위의 차이도 당연히 존재하여야 한다. 이는 고체역학적으로 타당한 결과 추론이다. 이에 대한 추가적 관찰 또는 실험적 시도는 미래과제로 남기고자 한다.

현재, 다수의 상용 전자기장 해석 소프트웨어가 자성체 또는 유전체 표면에서의 맥스웰 응력을 기계적 입력이 가능한 표면전자기력 밀도로 제시하고 있는 실정인데, 수정이 되어야 할 것이다.

맥스웰 응력의 무효화는 다른 전자기력 방법들에 대해서도 동일한 부정적 비판에 직면할 것이라는 강력한 암시를 주고 있는데, 이 또한 본 저자들의 향후 과제로 여기고자 한다.

[참 고 문 헌]

[1] C. Rinaldi and H. Brenner, "Body versus surface forces in continuum mechanics: Is the Maxwell stress tensor a physically objective Cauchy stress?," *Physical Review E*, Vol. 65, 036615, 2002.
 [2] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, New York: McGraw Hill Book Co., 1941.
 [3] K. Reichert, H. Freundl, and W. Vogt, "The calculation of force and torque within numerical magnetic field calculation method," *Proceedings on COMPUMAG*, pp.64-74, 1976.