2008년도 대한전기학회 하계학술대회 논문집 2008. 7. 16 - 18

이산신호에서 실시간 저주파 진동 파라미터 추정 Part I : 이론

김의선*, 심관식**, 문채주**
신경대*, 목포대**

A Real Time Parameter Estimation of Low Frequency Oscillation in Discrete Signal Part I : Theory

Eui-Sun Kim*, Kwan-Shik Shim**, Chae-Joo Moon**
Shin-Gyeong University*, Mokpo University**

Abstract - 이 논문은 이산신호에 고속푸리에변환을 적용하여 신호에 포함되어 있는 저주파수의 진동 파라미터를 추정하는 새로운 방법에 대해서 기술하고 있다. 제안한 방법은 지수감쇠정현파함수의 푸리에 변환에 기초를 두고 푸리에스펙트럼으로부터 직접 파라미터를 추정하는 방법이다. 푸리에스펙트럼의 첨두치와 첨두주파수 사이에 일정한 수학적 관계에서 모드를 추정하고 추정한 모드를 이용하여 모드의 크기와 위상을 추정하는 방법을 제안하고 있다.

이 논문에서 제안한 파라미터 추정방법은 수식에 기반을 둔 매우 단순한 알고리즘으로 계산속도가 매우 빠르고 작은 기억장소를 필요로 하므로 DSP 수준의 실시간 연산에 매우 적합한 알고리즘이다. 제안한 알고리즘을 간단한 시험함수에 적용한 결과, 정확하게 파라미터를 추정하여 알고리즘의 정확성을 검증하였다.

1. 서 론

최근 연속적인 신호를 디지털 신호로 변환하여 처리하는 디지털신호처리 기술이 빠르게 발달하고 있다. 디지털신호처리에서 중요한 알고리즘 중에 하나인 이산푸리에변환은 연속신호를 주파수영역에서 분석할 때, 필수적인 알고리즘으로 고속푸리에변환(fast Fourier transform, FFT) 알고리즘의 개발과 컴퓨팅 기술이 발전하면서 오늘날 다양한 산업분야에 광범위하게 적용되고 있다[1-3].

FFT는 이산신호를 주기함수로 변환하여 신호 속에 포함되어 있는 주파수를 찾는 것으로 주기신호는 주파수 성분들이 고조파 성분들로만 구성되어 있으므로 선스펙트럼으로 표현된다. 그리고 비주기신호는 임의의 주파수 성분을 갖는 사인 함수나 지수함수들의 적분으로 나타낼 수 있으므로 스펙트럼은 연속적으로 표현된다.

이 논문에서는 이산푸리에변환의 푸리에스펙트럼을 직접 복소지수함수로 근사하여 신호에 포함된 저주파수 대역의 중요 파라미터를 추정하는 푸리에변환에 기초한 빠른 파라미터 추정 방법을 제안하고 있다. 이산푸리에변환에서 발생하는 중요한 저주파수에 대응하는 모든 첨두 스펙트럼을 복소지수함수로 가정하면, 각각의 푸리에스펙트럼으로부터 모드를 얻을 수 있다. 그리고 푸리에스펙트럼에서 첨두치와 첨두주파수 및 모드 사이에 일정한 수학적 관계에서 모드의 실수부를 추정하고, 추정한 모드 이용하여 모드의 크기와 위상을 계산할 수 있는 새로운 파라미터 추정 방법을 제안하였다.

이 논문에서 제안한 방법은 한 번의 FFT를 통해서 파라미터를 추정할 수 있는 수식에 기초한 매우 직관적이고 단순한 방법으로 FFT 계산시간에 단순 산술계산 및 첨두치 탐색 알고리즘만 추가되므로 계산시간이 매우 빠르다. FFT에서 직접 파라미터를 추정하는 새로운 방법을 간단한 시험함수에 적용하여 알고리즘의 효율성과 제안한 방법의 신뢰성을 검증하였다.

2. 지수감쇠함수의 푸리에 변환

연속함수를 x(t)라 할 때, 푸리에변환 식과 역변환 식은 다음과 같다.

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \tag{1}$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \tag{2}$$

그리고 구간 $0 \le n \le N-1$에 정의된 신호 $x[n]$의 이산푸리에변환은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$X[k]=\sum_{n=1}^{N-1} x[n]\, W_N^{kn} \tag{3}$$

여기에서 $W_N=\exp(-j2\pi/N)$이며, 스펙트럼 계수 $X[k]$는 구간 $0 \le k \le N-1$에서 정의 된다.

주파수 ω_1을 가진 연속함수 $x(t)$가 정현파함수와 지수함수의 곱으로 이루어진 지수감쇠사인함수라 할 때, 다음과 같이 표현된다.

$$x(t)=A\, e^{-\alpha t}\sin(\omega_1 t) \tag{4}$$

여기에서 α와 ω_1은 각각 제동계수와 주파수이고, A는 모드의 크기를 의미한다. 이를 푸리에 변환하면[5], 푸리에스펙트럼 $X(\omega)$는 복소함수로 표현되고, 그 크기와 위상은 각각 다음과 같다.

$$X_\omega=\frac{A\,\omega_1}{\sqrt{(\alpha^2+\omega_1^2-\omega^2)^2+(2\alpha\omega)^2}} \tag{5}$$

$$\phi_\omega=-\arctan\frac{2\alpha\omega}{\alpha^2+\omega_1^2-\omega^2} \tag{6}$$

식 (5)-(6)에서 X_ω는 복소 푸리에 스펙트럼 $X(\omega)$의 크기이고, ϕ_ω는 푸리에 스펙트럼의 위상이다.

지금까지 기술한 지수감쇠사인함수같이 지수감쇠코사인함수도 유사하게 나타낼 수 있다. 지수감쇠코사인함수와 지수감쇠사인함수는 위상만 180도 차이가 발생하고 모드와 크기는 동일하다. 만일 지수감쇠정현파함수에서 주파수 $\omega=\omega_1$이고, $\omega_1 \gg \alpha$이 성립할 때, 푸리에스펙트럼의 크기 X_ω는 다음과 같다.

$$X_\omega=A/2\alpha \tag{7}$$

따라서 주파수 ω_1에서 제동계수 α가 작을수록 푸리에스펙트럼의 크기 X_ω는 커지고, 스펙트럼은 다른 스펙트럼보다 날카롭게 표현된다.

3. 푸리에 변환에서 파라미터 추정

3.1 주파수 추정

식 (4)에 나타난 지수감쇠사인함수에서 신호의 파라미터는 크기 A와 제동계수 α, 주파수 ω1 그리고 모드의 위상 ϕ가 있다. 이산푸리에변환에서 첨두치에 대응하는 주파수는 이산신호에 포함되어 있는 중요 주파수를 나타낸다. 따라서 이산푸리에 변환을 하면 중요한 파라미터 중에 하나인 주파수를 얻을 수 있다. 그러므로 관심 있는 2.5Hz 이하의 저주파수 대역의 푸리에 스펙트럼 첨두치에 대응하는 주파수를 중요 주파수로 선택할 수 있다.

3.2 제동계수 추정

식 (5)에서 $\omega=\omega_1+\alpha$이고, $\omega_1 \gg \alpha$일 때, 푸리에스펙트럼의 크기는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$X_{\omega 1+\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{A}{2\alpha}\right) \tag{8}$$

그러므로 스펙트럼 $X_{\omega 1}$과 $X_{\omega 1+\alpha}$ 사이에는 다음 관계가 성립한다.

$$X_{\omega 1+\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2}}X_{\omega 1} \tag{9}$$

이 식은 주파수가 첨두주파수에서 제동계수만큼 변화할 때, 스펙트럼은 첨두치의 0.707배만큼 감소함을 의미한다. 그러므로 이산신호에 FFT를 적용해서 푸리에스펙트럼의 첨두치와 첨두주파수를 알면 제동계수를 계산할 수 있다.

3.3 모드 크기 추정

식 (7)에서 주파수 $\omega=\omega_1$일 때, 푸리에스펙트럼과 모드의 크기는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$A=2\alpha X_{\omega 1} \tag{10}$$

즉, 스펙트럼의 첨두값은 A에 비례하고 α에 반비례함을 알 수 있다. α가 0에 근접한 경우 즉, $\lim_{\alpha\to 0} X_{\omega 1}\cong\infty$로 접근함을 알 수 있다. 따라서 푸리에스펙트럼과 제동계수를 알면 모드의 크기를 계산할 수 있다.

3.4 모드의 위상

연속함수 $x(t)$가 아래와 같이 제동계수 α와 위상 ϕ_1를 가진 지수감쇠코사인함수라 하면, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x(t) = A\,e^{-\alpha t}\cos(\omega_1 t + \phi_1) \tag{11}$$

(Theorem 1)
주파수 ω_1에 대응하는 위상 ϕ_1을 가진 지수감쇠코사인함수에서 푸리에스펙트럼의 위상을 $\angle X(\omega_1)$이라 할 때, 위상 ϕ_1은 푸리에스펙트럼 $X(\omega_1)$의 위상과 같다.

$$\phi_1 = \angle X(\omega_1) \tag{12}$$

(Proof) Appendix A.1

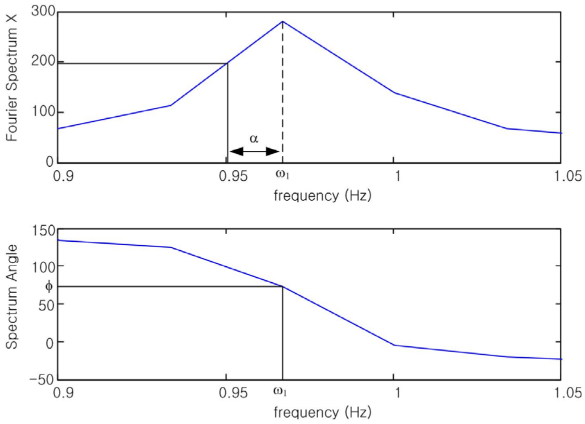
지금까지 첨두주파수 ω_1에서 신호에 포함된 저주파 파라미터를 추정하는 수학적인 방법을 기술하였다. 만일 신호에 다수의 모드가 포함되어 여러 개의 첨두치가 발생할 때, 각 첨두치와 첨두주파수에 대해서 지금까지 기술한 파라미터추정 방법을 각각 적용하면 중요 파라미터를 추정할 수 있다. 한편 이산푸리에 변환 결과 근접한 모드가 존재할 경우, 즉 하나의 첨두치 근처에 다른 첨두치가 존재할 때, 두 모드는 서로 영향을 주어 추정한 파라미터에 오차를 포함할 수 있다. 이 경우에는 각 첨두치를 중심으로 좌우스펙트럼에서 영향을 받지 않는 스펙트럼으로부터 파라미터를 추정하면 오차를 감소할 수 있다.

4. 간단한 예

지금까지 기술한 이산푸리에변환을 이용한 파라미터 추정 방법을 단순한 지수감쇠코사인함수에 적용하여 그 효율성과 정확성을 검증하였다. 이 논문에서는 새로운 파라미터 추정 방법에 대한 이론적 개발에 주안점이 있어 알고리즘의 비교나 상세한 오차해석 보다는 제안한 이론 검증을 중심으로 기술한다.

$$y_t = 1.0\,e^{-0.1t}\cos(6.1t + 60^{\circ}) \tag{13}$$

이 함수에 대해서 시간 간격을 1/60초로 설정하고, 30초 동안 취득한 데이터에 FFT를 적용하여 스펙트럼과 위상을 계산하고, 이를 그림 1에 나타내었다.



<그림 1> 푸리에스펙트럼과 위상

그림 1에 나타난 푸리에스펙트럼에서 첨두치와 첨두주파수는 각각 297.9468과 0.9669Hz이다. 따라서 관심 파라미터 중에 하나인 주파수는 0.9669Hz가 되고 이를 각주파수로 변환하면 6.0752[rad/sec]가 된다. 위의 식에서 주어진 정확한 값은 6.1[rad/sec]로 근사하게 주파수를 추정함을 알 수 있다.

첨두치의 70.7%의 스펙트럼은 197.9536이고 이에 대응하는 주파수는 0.9506Hz이다. 따라서 제동계수는 0.1024가 된다. 위의 식에서 제동계수의 정확한 값은 0.1이므로 주파수와 같이 거의 정확하게 제동계수도 추정함을 알 수 있다. 모드의 크기는 식 (10)으로부터 계산할 수 있는데, 시간구간 간격이 0.167초이므로 모드의 크기는 0.9575로 계산 된다. 모드 크기의 정확한 값이 1.0이므로 거의 정확하게 모드 크기도 추정함을 알 수 있다. 마지막으로 주파수 0.9669Hz에 대응하는 위상은 72.8°이다. 주어진 정확한 위상은 60°이므로 다소 차이가 있다. 이것은 주어진 데이터가 0.0167초로 샘플링 된 데이터기 때문에 1.0134초마다 위상은 360°가 변화 한다. 즉 샘플링 0.0167초마다 약 5.84°도 정도가 변화하므로 샘플링 구간을 작게 하면 위상에 대한 오차는 감소시킬 수 있다. 추정한 파라미터들을 요약하면 표 1과 같이 나타낼 수 있다.

<표 1> 파라미터 추정 결과

	Mode		f [Hz]	A	Angle [deg]
	real	imag			
FFT	-0.102	6.075	0.967	0.958	72.8
Exact	-0.100	6.100	0.971	1.000	60.0

5. 결 론

이 논문은 이산푸리에변환을 이용하여 신호에 포함되어 있는 저주파수 대역의 파라미터를 고속으로 추정하는 새로운 방법에 대해서 기술하고 있다. 제안한 파라미터 추정방법은 지수감쇠정현파함수의 푸리에 변환에 기초를 두고 푸리에스펙트럼으로부터 파라미터를 추정하는 직접적인 방법이다. 고속푸리에변환의 장점을 이용할 수 있으므로 신호에 포함되어 있는 중요 주파수를 빠르고 정확하게 추정할 수 있다. 또한 푸리에스펙트럼의 첨두치와 첨두주파수 사이에 일정한 수학적 관계에서 모드를 추정할 수 있는 방법과 추정한 모드를 이용하여 모드의 크기와 위상을 추정하는 방법을 개발하였다.

이 논문에서 제안한 파라미터 추정방법은 수식에 기반을 둔 매우 단순한 알고리즘으로 계산속도가 매우 빠르므로 실시간 연산에 매우 적합한 알고리즘이다. 특히 연산과정에서 작은 기억용량을 필요로 하므로 DSP 수준의 연산이 가능하다. 제안한 알고리즘을 간단한 시험함수에 적용한 결과, 매우 빠르게 근사치 모드 추정하여 향후 전력계통의 실시간 해석을 위한 저주파수 대역의 파라미터 추정에 매우 중요한 역할을 할 것으로 기대된다.

[참 고 문 헌]

[1] W. L. Briggs, V. E. Henson, The DFT, An Owner's Manual for the Discrete Fourier Transform, SIAM, Philadelphia, 1995.
[2] K. B. Howell, Principles of Fourier Analysis, Chapman & Hall/CRC, New York, 2001.
[3] P. A. Lynn, W. Fuerst, Introductory Digital Signal Processing, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1998.
[4] L. Ljung, System Identification, Theory for The User, Prentice Hall Inc., New Jersey, 1999.
[5] 심관식, 남해곤, "이산푸리에변환과 시계열데이터의 고속 파라미터 추정," 대한전기학회 논문지, Vol. 55A, No. 7, 2006.

Appendix

A.1. Theorem 1 Proof

연속함수 $x(t)$가 제동계수 α와 주파수 ω_1, 위상 ϕ_1를 가진 지수감쇠코사인함수라 하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x(t) = A\,e^{-\alpha t}\cos(\omega_1 t + \phi_1) \tag{A.1}$$

이 식을 푸리에 변환 하면,

$$X(\omega) = \frac{A(\alpha + j\omega)\cos\phi_1 - A\,\omega_1 \sin\phi_1}{\alpha^2 + \omega_1^2 - \omega^2 + j2\alpha\omega} \tag{A.2}$$

주파수 ω_1에 대응하는 위상을 ϕ_1이라하고, 제동계수가 작아서 $\omega_1 \gg \alpha$ 이 성립할 때, 이 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$X(\omega_1) = \frac{A(\alpha\cos\phi_1 - \omega_1\sin\phi_1) + jA\omega_1\cos\phi_1}{j2\alpha\omega_1} \tag{A.3}$$

이 식을 정리하면, 다음과 같이 간단하게 표현된다.

$$X(\omega_1) = \frac{A}{2\alpha}(\cos\phi_1 + j\sin\phi_1) \tag{A.4}$$

그러므로 스펙트럼의 크기 $X_{\omega 1}$과 각도 $\angle X(\omega_1)$을 분리하여 표현하면 다음과 같다.

$$X_{\omega 1} = \frac{A}{2\alpha} \tag{A.5}$$

$$\angle X(\omega_1) = \phi_1 \tag{A.6}$$

따라서 주파수 ω_1에 대응하는 위상 ϕ_1을 가진 지수감쇠코사인함수에서 위상은 스펙트럼의 위상과 같다.