2007년도 대한전자공학회 하계종합학술대회 제30권 제1호

# Lyapunov 방정식을 이용한 불확실한 선형 시스템의 섭동 유계 해석

*조도현, **이상철, ***최진택, ****이상훈, ****이종용
*인하공업전문대학 디지털전자정보과, **재능대학
***광운대학교 정보통신 대학원, ****광운대학교 교양학부
e-mail : dhcho@inhatc.ac.kr

# The Interpretation Uncertain Bound for the Uncertain Linear Systems via Lyapunov Equations

*Do-Hyoun Cho, **Sang-Chul Lee, ***Jin-Taik Choi
****Sang-Hun Lee, ****Jong-Yong Lee
*Inha Tech. College, ** Jaenung College,
****Division of General Education, Kwang-woon Univ.
***Graduate School of Information & Communication Kwang-woon Univ.

## Abstract

In this paper, we use Lyapunov equations and functions to consider the linear systems with perturbed system matrices. And we consider that what choice of Lyapunov function V would allow the largest perturbation and still guarantee that V is negative definite. We find that this is determined by testing for the existence of solutions to a related quadratic equation with matrix coefficients and unknowns the so-called matrix Riccati equation.

## I. 서론

선형 시스템 $\dot{x}(t) = Ax(t)$ 에 대한 행렬 $A$ 의 모든 고유치가 음의 영역에 있다면, $x = 0$ 는 지수적으로 안정한 평형점이며, 또한 임의 양으로 정의된 행렬 $Q$ 에 대하여, Lyapunov 행렬 방정식 $A^TP + PA = -Q$ 를 만족하는 양으로 정의된 행렬 $P$ 를 얻을 수 있다는 것과 등가이다. 일반적인 선형 공칭 시스템 $\dot{x} = Ax$ 에 대하여, 시스템에 섭동항이 포함된 식(1)과 같은 선형 섭동 모델을 고려하자.

$$\dot{x} = Ax + \triangle x \tag{1}$$

여기서, $\triangle$ 는 섭동항이다.

예를들어, 질량-스프링 시스템의 모델링의 경우, 스프링 탄성의 불확실성은 시스템 행렬의 섭동항으로 나타난다.

만약 선형 공칭 시스템 행렬 $A$ 의 고유치가 s-평면의 좌반면에 존재할 경우, 본 논문에서는 섭동 시스템 행렬 $A + \triangle$ 의 고유치가 s-평면의 좌반면에 존재할 수 있는 섭동 $\triangle$ 의 범위를 결정하고자한다. 즉 선형 섭동 시스템 식(1)이 안정하도록 하기 위한 섭동의 크기 $\|\triangle\|$ 를 결정하고자 한다.

## II. 섭동과 섭동 고유치

본 논문에서는 선형 섭동 시스템 식(1)이 안정하도록 하기 위한 섭동의 크기 $\|\triangle\|$ 를 결정하고자 한다. 즉, 섭동의 크기 $\|\triangle\| < \rho$ 을 만족 하는 섭동에 대하여, $A + \triangle$ 의 모든 고유치가 s-평면의 좌반면에 존재하도록, $\rho$ 의 크기를 결정하는 것이다.

만약 $A$ 의 고유치가 s-평면의 좌반면에 존재하다면, $A^TP + PA = -I$ 는 양으로 정의된 해를 갖는다.

먼저 Lyapunov 함수를 식(2)와 같이 고려하자

$$V(x) = x^T P x \quad (2)$$

식(2)에 시간에 대하여 1차 미분하고, 식(2)를 대입하고, 섭동의 크기가 $\|\Delta\| < \frac{1}{4\|P\|}$ 이면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot V(x) &= x^T(A+\Delta)^T Px + X^T P(A+\Delta)x \\ &= x^T A^T Px + X^T PAx + X^T \Delta^T Px + x^T P \Delta x \quad (3) \\ &= -|x|^2 + 2\|\Delta\|\|P\||x|^2 \le -\frac{1}{2}|x|^2 \end{aligned}$$

즉, $\rho = \frac{1}{4\|P\|}$ 로 선택함으로서, $\|\Delta\| < \rho$ 인 경우, Lyapunov 함수 $V$의 도함수는 $\dot V \le -\frac{1}{2}|x|^2$ 이고, $(A+\Delta)$ 의 모든 고유치는 s-평면의 좌반면에 존재하며, $x(t)$ 는 지수적으로 영에 접근한다.

좀 더 일반적인 방법으로, Lyapunov equation $A^T P + PA = -Q$ 을 만족하는 $P$를 선택할 수 있다. 역시 같은 방법으로 Lyapunov 방정식의 도함수에 섭동 선형 시스템에 적용하면 다음과 같다.

$$\dot V = -x^T Qx + 2x^T P\Delta x \le -q_1|x|^2 + 2\|\Delta\|\|P\||x|^2 \quad (4)$$

여기서, $0 \le q_1 \le q_2 \cdots \le q_n$ 는 양으로 정의된 행렬 $Q$의 고유치라 하자.

따라서, 주어진 $Q$에 대하여, 만약 $\rho = \frac{q_1}{2\|P\|}$ 로 선택하면, $\dot V$는 음으로 정의된다.

그리고 $\rho = \frac{q_1}{2\|P\|}$ 로 선택하고, 만약 $\|\Delta\| < \rho$ 이면 이때 $A+\Delta$ 의 모든 고유치는 s-평면의 좌반면에 존재한다.

그러나 이 방법은 준최적(suboptimal) 방법이다.

Lyapunov 방정식으로부터, $A+\Delta$의 고유치를 확인할 수 있다.

실제로, 주어진 값 $\rho > 0$ 에 대하여 $\|\Delta\| < \rho$ 을 만족하는 모든 섭동항 $\Delta$ 에 대한 $A+\Delta$의 고유치에 대하여 조사 할 수 있다.

매우 적은 $\rho$ 에 대하여, $A+\Delta$의 고유치는 공칭 행렬 $A$ 의 고유치 근방에 집중되는 집합으로 표현될 것이다.

$\rho$ 를 증가시킬 때에는 집합의 집중도도 넓게 분포하게 될 것이다. 예를 통하여 살펴보자.

가장 작은 $\rho$ 에서 다룰 수 있는 경우, 고유치의 변화량을 표시하는 등고선(contours)이 s-평면의 우반면으로 교차할 것이다.

동일하게 가장 큰 $\rho$ 에 대하여 다음의 결과를 얻는다.

$\rho$ 에 의하여 매개변수화된 리카티 방정식- $A^T P + PA + \rho^2 I + P^2 = 0$-이 양으로 정의된 해를 갖기 위한 필요충분조건은 $\|\Delta\| < \rho$을 만족하는 모든 $\Delta$에 대하여 $A+\Delta$의 고유치는 실수부가 음으로 정의된 부분에 남는다. 그 이유는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (A+\Delta)^T P + P(A+\Delta) &= -\rho^2 I - P^2 + \Delta^T P + P\Delta \\ &= -(P+\Delta)^T(P+\Delta) + \Delta^T\Delta - \rho^2 I = -Q \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, $\|\Delta\| < \rho$을 만족하는 조건하에, $Q$는 음으로 정의 된다.

행렬이 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$ 일 때, 일치하는 해 $P$는 식(6)을 만족하고, 다음 P를 만족하는 $\rho = 0.7416$ 을 선택할 수 있다.

$$P = \begin{pmatrix} 1.0582 & 0.1408 \\ 0.1408 & 0.0859 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$\log_{10} 0.7416 = -0.1298$ 의 등고선은 허수축의 좌반면에 놓일 것이다.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -15 & -11 & -5 \end{pmatrix}$ 에 대하여, 다음을 얻을 수 있다.

$$\rho = 0.3162 \quad P = \begin{pmatrix} 0.8016 & 0.4830 & 0.0326 \\ 0.4830 & 0.5565 & 0.0734 \\ 0.0326 & 0.0734 & 0.0255 \end{pmatrix}.$$

또한 등고선의 위치는 $\log_{10} 0.3162 = -0.5$ 로 표현된다.

## Ⅳ. 결론

본 논문에서는 섭동 시스템 행렬을 가지는 선형 시스템에 대하여 Lyapunov 방정식과 함수를 고려하였다. 그리고 Lyapunov 함수의 도함수가 음의 정의로 보장되는 가장 큰 섭동 구간을 허락하는 Lyapunov 함수의 선택에 대하여 고려하였다.

## 참고문헌

[1] Tatjana Stykle, "Numerical Solution and Perturbation Theory for Generalized Lyapunov Equatios", Linear Algebra and its Applications, 349(1-3), 2002, pp. 155-185

[2] L. Ya. Adrianova, Introduction to Linear Systems, of Differential Equations, Trans. of Math. Mono. Vol 164, AMS, 1995

[3] L. Dieci, E. S. VAN Vleck, "Perturbation Theory for Approximation of Lyapunov Expomemts by QR Methods", Trans. of Math. Mono. Vol 173, AMS, 2004