입출력 변환을 이용한 선형 시변 시스템의 선형 시불변 변환

*조도현, **원영진, ***조창호, ****이태식, ****이종용
* 인하공업전문대학 디지털전자정보과, ** 부천대학 전자과
(주)세스코, * 광운대학교 교양학부
e-mail : dhcho@inhatc.ac.kr

The Transformation Time-invarying Linear System for a Class of Time-varying Linear System via I/O Transformation

*Do-Hyoun Cho, **Young-Jin Won, ***Tae-Sick, Lee,****Jong-Yong Lee
*Inha Tech. College., **Bucheon College,
*** Graduate School of Information & Communication Kwang-woon Univ.
****Division of General Education, Kwang-woon Univ.

Abstract

In this paper, we consider the input-output transformation for the time-varying linear system and get the time-invarying linear system. And we present the necessary sufficient condition for the I/O transformation.

The transformed system represent the system with the multiple integral. We verify the proposal algorithm via the example and examine.

I. 서론

본 논문에서는 선형 시변 시스템에 대해 입출력 변환을 적용하여 선형 시불변 시스템을 얻어, 기존에 제시된 선형 시불변 시스템으로 변환하기 위한 입출력 변환의 필요충분조건을 제시한다.

II. 본론

단일 입출력의 선형 시변 시스템에 선형 시변 시스템의 입력-출력 변환을 고려하여, 다음과 같이 표현하자.

$$\dot{x} = \alpha(x,t) + \beta_2(t)u$$
$$y = \gamma_2(x,t) \tag{1}$$

여기서, $A(t)x = [A_1^T, A_2^T, \cdots A_n^T]^T x$라 하면,

$\alpha_i(x,t) \triangleq A_i x = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j$ 이고,

$\alpha(x,t) = [\alpha_1(x,t), \alpha_2(x,t), \cdots, \alpha_n(x,t)]^T \in R^{n\times 1}$ 이다.

그리고, $C_2(t)x = [C_{21}(t), C_{22}(t), \cdots, C_{2n}(t)]^T$ 이면,

$\gamma_2(x,t) \triangleq \sum_{j=1}^{n} C_{2j}(t)x_j$ 이다.

단일 입출력의 선형 시변 시스템의 출력 y를 시간에 대하여 미분하여, 다음과 같이 나타낸다.

$$\dot{y} = \frac{\partial\gamma_2}{\partial x}\alpha + \frac{\partial\gamma_2}{\partial t} + \left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial x}\beta + \frac{\partial\gamma_2}{\partial t}0\right)u \tag{2}$$

출력의 1차 도함수 식(2)이 입력에 독립이면, $u \neq 0$ 이므로 식(3)가 성립하며, L은 Lie도함수를 의미한다.

$$C_2B_2 = L_{\overline{B_2}}\gamma_2 = 0 \tag{3}$$

어떤 양의 정수 r에 대하여, $L_{\overline{B_2}}L_{\overline{A}}^{r-1}\gamma_2 \neq 0$이 성립할 때까지 반복 미분하면, 입력 u에 대하여 종속인 경우, 식(4)과 식(5)가 성립한다.

$$L_{\overline{B_2}}L^i_{\overline{A}}\gamma_2 = 0,\ \forall i = 0,1,2,\cdots,r-2 \tag{4}$$

$$L_{\overline{B_2}}L_{\overline{A}}^{r-1}\gamma_2 \neq 0 \tag{5}$$

입력 u를 아래와 같이 설정하자.

$$u = \frac{1}{L_{\overline{B_2}}L_{\overline{A}}^{r-1}\gamma_2}(-L_{\overline{A}}^{r}\gamma_2 + v) \tag{6}$$

식(6)을 이용하면, 새로운 입력 v와 출력 y의 관계는 r개의 적분기가 직렬로 연결된 선형 시불변 시스템이 된다. 또한 $r = n$이면, 다음이 성립한다.

$$y^{(n)} = v \tag{7}$$

새로운 입력 v는 다음과 같이 표현된다.

$$v = L^{n}_{A}\gamma_2 + L_{\overline{B_2}} L^{n-1}_{A}\gamma_2 u \tag{8}$$

선형 시변 시스템이 식(7)의 선형 시불변 시스템으로 입출력 완전 변환은, 상태 피드백 입력 상태 변환과 등가 이며, 다음과 같은 결과로 표현된다.

[정리 1] 선형 시변 시스템이 입력-출력 선형 시불변으로 변환하기 위한 필요충분조건은, 다음의 식(9)과 식(10)을 만족하는 양의 정수 r이 존재하는 것이다.

$$L_{\overline{B_2}} L^{i}_{A}\gamma_2 = 0,\ \forall i = 0,1,2,\cdots,r-2 \tag{9}$$

$$\langle d\gamma_2, ad^{r-1}_{A}(\overline{B_2})\rangle = L_{\overline{B_2}} L^{r-1}_{A}\gamma_2 \neq 0 \tag{10}$$

(증명) 이 정리의 증명은 비선형 시스템의 입출력 선형화에 대한 증명을 이용한다[2].

입출력 변환 $\gamma_2, L_{A}\gamma_2, \cdots, L^{r-1}_{A}\gamma_2$를 정규형이라 불리우는 새로운 상태를 사용하면, 시스템의 정규형은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_{r-1} \\ \xi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_r \\ a(\xi,\eta) + b(\xi,\eta)u \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\dot{\eta} = \omega(\xi,\eta) \tag{12}$$

$$y = \xi_1 \tag{13}$$

정규형의 r개 방정식 (11)은 표준형(companion form)이고, 다음의 $n-r$개 방정식 (12)는 시스템의 입력 u와 직접 관계없는 방정식이다. 그리고 식 (6)에 의하여 $a(\xi,\eta), b(\xi,\eta)$는 다음과 같다.

$$a(\xi,\eta) = L^{r}_{A}\gamma_2,\ b(\xi,\eta) = L_{\overline{B_2}} L^{r-1}_{A}\gamma_2 \tag{26}$$

이와 같이 선형 시변 시스템이 정규형으로 변환되는 것을 보이는 것은, 새로운 상태 ζ가 독립이라는 것을 보이는 것과 $n-r$개의 다른 상태 η가 발견되어야 한다. 이과정의 증명은 비선형 시스템의 입출력 선형 변환에서 정규형을 증명하는 것과 등가이다[3]. 이 과정을 다음 그림 1과 같이 표현된다.

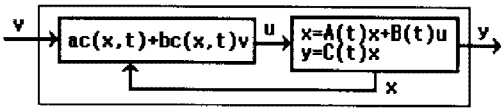

그림 1. 선형 시변 시스템에 대한 입출력 변환 모델
Fig. 1. The Input/Output Transformation Model for Linear Time-Varying System

여기서, 식(6)으로부터, 시스템의 입력 u는 식(27)과 같다.

$$u = \frac{-L^{r}_{A}\gamma_2}{L_{\overline{B_2}} L^{r-1}_{A}\gamma_2} + \frac{v}{L_{\overline{B_2}} L^{r-1}_{A}\gamma_2} = a_c(x,t) + b_c(x,t)v \tag{15}$$

이때 입출력 변환(Global Diffeomorphism)은 다음과 같이 정의된다.

$$T_1 = \xi_1 = \gamma_2(x,t) = C_2(t)x = \omega_0(t)x$$

$$T_2 = \xi_2 = L_{A}\gamma_2(x,t) = (\frac{dC_2}{dt} + C_2A)x = \omega_1(t)x$$

$$T_3 = \xi_3 = L^{2}_{A}\gamma_2(x,t) = (\frac{d^2C_2}{dt^2} + 2\frac{dC_2}{dt}A + C_2\frac{dA}{dt} + C_2A^2)x$$

$$= (\frac{d\omega_1}{dt} + \omega_1 A)x = \omega_2(t)x$$

$$T_4 = \xi_4 + L^{3}_{A}\gamma_2(x,t) = (\frac{d\omega_2}{dt} + \omega_2 A)x = \omega_3(t)x$$

$$\vdots$$

$$T_r = \xi_r = L^{r-1}_{A}\gamma_2(x,t) = (\frac{d\omega_{r-2}}{dt} + \omega_{r-2}A)x = \omega_{r-1}(t)x \tag{16}$$

$$\eta_{r+1} = T_{r+1}(x,t)$$

$$\vdots$$

$$\eta_n = T_n(x,t)$$

여기서, $T_j(0) = 0,\ \gamma+1 \le j \le n$ 이고,

$\frac{\partial T_j}{\partial X} ad^{i}_{A}\overline{B_2} = 0,\ 0 \le i \le \gamma - 1$ 이다.

특히 완전 입출력 시불변 변환을 위한 입출력 변환은 다음과 같이 된다.

$$T = \xi = Wx \tag{17}$$

여기서, 변환 $W = [\omega^{T}_{0}, \omega^{T}_{1}, \cdots, \omega^{T}_{n}]^{T}$이다.

IV. 결론 및 향후 연구 방향

선형 시변 시스템에 대해 입출력 변환을 적용하여 선형 시불변 시스템을 얻어, 기존에 제시된 선형 시불변 시스템으로 변환하기 위한 입출력 변환의 필요충분조건을 보였다.

참고문헌

[1] ISIDORI A., "Nonlinear Control Systems", Springer-Verlag, London, 1995

[2] 조도현, 이상효, "상태 변환을 이용한 선형 시변 시스템에 대한 강건한 제어", 제어자동화시스템공학 논문지, 제4권, 제1호, pp1~9, 1998

[3] Choi H.L. and LIM J.T., "Feedback linearisation of time-varying nonlinear systems via time-varying diffeomorphism" IEE Proc. Control Theory Appl., Vol 150, No 3, pp. 279-284, 2003