

마그네슘 합금 판재의 비선형 항복 · 경화거동 모델링

이명규¹·R.H. Wagoner¹·J. K. Lee²·정관수³·김현영[#]

Constitutive Modeling of Magnesium Alloy Sheets

M. G. Lee, R. H. Wagoner, J. K. Lee, K. Chung, H. Y. Kim

Abstract

Magnesium alloy sheets have unique mechanical properties such as high in-plane anisotropy/asymmetry of yield stress and hardening response. The unusual mechanical behavior of magnesium alloys has been understood by the limited symmetry crystal structure of HCP metals or by deformation twinning. In the present study, the continuum plasticity models considering the unusual plastic behavior of magnesium alloy sheet were derived for a finite element analysis. A new hardening law based on two-surface model was developed to consider the general stress-strain response of metal sheets such as Bauschinger effect, transient behavior and the unusual asymmetry. Three deformation modes observed during the continuous tension/compression tests were mathematically formulated with simplified relations between the state of deformation and their histories. In terms of the anisotropy and asymmetry of the initial yield stress, the Drucker-Prager's pressure dependent yield surface was modified to include the anisotropy of magnesium alloys.

Key Words : Magnesium alloy sheet (마그네슘 합금 판재), Anisotropy (이방성), Asymmetry (비대칭성), Two-surface model (이항복함수 모델), Bauschinger effect (바우싱거 효과), Transient behavior (과도 거동), Modified Drucker-Prager model (수정 드러커-프라거 모델).

1. 서 론

최근 들어 경량화의 목적으로 마그네슘 판재에 대한 연구가 활발해지고 있다. 마그네슘 판재는 우수한 경량성 이외에도 높은 비강도, 우수한 용접성 그리고 부식저항성 또한 우수한 것으로 알려져 있어 자동차 산업뿐만 아니라 통신장비 등 전자산업에 있어서도 그 응용범위를 넓혀가고 있는 추세이다 [1].

하지만 이러한 장점에도 불구하고 마그네슘 합금 판재의 낮은 성형성 때문에 재료의 특이한 기계적 성질에 대해서는 연구가 미흡한 실정이다. 마그네슘 합금 판재는 우선 인장과 압축시의 항복응력의 차이가 매우 큰 비대칭성(asymmetry)을 보이며 또

항복 이후의 거동 또한 매우 큰 비대칭성을 보인다고 알려져 있다. 또한 판재의 이방성(anisotropy)도 다른 재료에 비해서 상당하다고 보고된다 [2].

비록 금속 판재의 일반적인 기계적 성질을 잘 나타낼 수 있는 구성식이 최근 들어 많이 개발되고 있지만 마그네슘 합금 판재와 같이 큰 비대칭성을 효과적으로 구현할 수 있는 구성식에 대한 연구는 미흡한 실정이다.

본 연구에서는 연속체 소성역학에 기초하여, 마그네슘 합금 판재의 이방성 및 비대칭성을 구현할 수 있는 수학적 모델을 개발하였다. 경화거동을 위해서는 이항복함수(two-surface) 모델을 도입하여 판재의 연속적 인장-압축시 발생하는 세가지 변형거동을 모사할 수 있도록 하였다.

1. 오하이오주립대학교 재료공학과

2. 오하이오주립대학교 기계공학과

3. 서울대학교 재료공학부

교신저자:강원대학교 기계·메카트로닉스 공학부

E-mail:khy@kangwon.ac.kr

2. 이론

2.1 이항복합수(two-surface) 모델 [3]
일반적인 내부 항복합수는 아래와 같다.

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}) - \bar{\sigma}_{iso} = 0 \quad (1)$$

여기서 $\boldsymbol{\sigma}$ 는 코시응력(Cauchy's stress)을 $\boldsymbol{\alpha}$ 는 백응력(back stress), 그리고 $\bar{\sigma}_{iso}$ 는 유효응력을 나타낸다. 내부 항복합수의 이동은 다음과 같이 정의되며,

$$d\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\bar{\alpha}}{\bar{\sigma}_{iso}(\mathbf{v})} \mathbf{v} = \left(\frac{d\bar{\alpha}}{d\bar{\epsilon}} \right) \frac{\mathbf{v}}{\bar{\sigma}_{iso}(\mathbf{v})} \quad (2)$$

여기서 내부항복합수의 방향은 $\mathbf{v} \sim (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha})$ 이다.

한편, 외부(bounding) 함수는 일반적으로 내부함수와 모양이 같으며 식 (1)에 상응하여,

$$\Pi(\boldsymbol{\Sigma} - \mathbf{A}) - \bar{\Sigma}_{iso} = 0 \quad (3)$$

여기서 $\boldsymbol{\Sigma}$ 와 \mathbf{A} 는 각각 외부함수 위의 응력 및 백응력을 나타낸다. 또한, $\bar{\Sigma}_{iso}$ 는 항복합수의 크기를 나타낸다. 외부항복합수 Π 는 내부함수와 같은 모양을 가지므로 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\boldsymbol{\Sigma} - \mathbf{A} = \frac{\bar{\Sigma}_{iso}}{\bar{\sigma}_{iso}} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}) \quad (4)$$

외부항복합수의 백응력 증분은 식 (2)와 더불어

$$d\mathbf{A} = d\boldsymbol{\alpha} - d\mu(\boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\sigma}) = d\mathbf{A}_1 - d\mathbf{A}_2 \quad (5)$$

위 식의 두번째 항은

$$d\mathbf{A}_2 = \frac{d\bar{A}_2}{\bar{\sigma}_{iso}} \cdot (\boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\sigma}) \quad (6)$$

여기서 $d\bar{A}_2 = \bar{\sigma}_{iso}(d\mathbf{A}_2)$, $\bar{\sigma}_{iso} = \bar{\sigma}_{iso}(\boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\sigma})$ 이다.

이항복합수 모델에서는, 두 항복합수의 팽창과 이동이 일축 기준 상태에서의 바우싱거 효과 및 과도거동 그리고 영구 연화거동을 잘 표현하도록 구성식 인자들이 구해진다. 일축 상태에서

$$\bar{\Sigma} = \bar{\sigma} + \bar{\delta} \quad (\text{or } \frac{d\bar{\Sigma}}{d\bar{\epsilon}} = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}} + \frac{d\bar{\delta}}{d\bar{\epsilon}}) \quad (7)$$

여기서 $\bar{\delta}$ 는 외부응력 $\bar{\Sigma}$ 과 내부응력 $\bar{\sigma}$ 사이의 거리를 나타내며 변형의 방향이 바뀔 때 마다 초기 거리 $\bar{\delta}_m$ 와 소성변형율의 함수로 표시된다.

2.2 마그네슘 합금의 경화거동

마그네슘 합금 판재의 변형은 슬립(slip), 쌍정(twinning), 역쌍정(untwinning) 세가지 모드로 구성된다. 그러므로, 거리함수 $\bar{\delta}$ 는 기존의 초기 거리의 함수뿐만 아니라 변형내력의 함수로서 위의 세가지 변형 모두를 적절히 표현할 수 있어야 한다.

본 연구에서는 다음의 거리함수를 도입한다.

$$\bar{\delta} = \bar{\delta}(\bar{\delta}_m, \mathbf{c}_{old}, \mathbf{c}_{new}, \boldsymbol{\epsilon}^p) \quad (8)$$

여기서 \mathbf{c}_{old} 와 \mathbf{c}_{new} 는 각각 변형 전후의 c-축을 나타낸다. 식 (8)는 새로운 거리함수가 초기 거리, 소성변형정도 그리고 변형이력(텍스처 변화 이력)의 함수임을 나타낸다.

“thickening” 또는 쌍정 모드는 다음과 같으며

$$\Delta\boldsymbol{\epsilon}_1^p + \Delta\boldsymbol{\epsilon}_2^p < 0 \quad (9)$$

여기서 $\Delta\boldsymbol{\epsilon}_{1,2}^p = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{1,2}^p \Delta t$ 이다. 아래첨자 1,2는 아래와 같이 각각 주변형률을 나타낸다.

$$\Delta\boldsymbol{\epsilon}_{1,2}^p = \frac{\Delta\boldsymbol{\epsilon}_{xx}^p + \Delta\boldsymbol{\epsilon}_{yy}^p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta\boldsymbol{\epsilon}_{xx}^p - \Delta\boldsymbol{\epsilon}_{yy}^p}{2} \right)^2 + \Delta\boldsymbol{\epsilon}_{xy}^p} \quad (10)$$

역쌍정 모드는 쌍정 모드와 비슷하지만 전변형이 두께 방향의 변형률이 0보다 큰 경우 즉 쌍정 모드일 경우 적용된다. 그러므로,

$$\Delta\boldsymbol{\epsilon}_1^p + \Delta\boldsymbol{\epsilon}_2^p \geq 0 \quad \text{with previous twinning} \quad (11)$$

슬립 모드는 변형이 쌍정 및 역쌍정 모드를 모두 만족하지 않을 때를 가정한다.

구성식에 적합한 인자들을 구하기 위해서 일축 인장 즉 “thinning” 모드를 기본 경화곡선으로 선택한다.

거리함수는

$$\begin{aligned}\bar{\delta} &= \Phi(\Sigma_{xx} - \sigma_{xx}) = \Sigma_{xx} - \sigma_{xx} = \bar{\Sigma} - \bar{\sigma} \\ &= \bar{\Sigma} - (\bar{\sigma}_i + \mathcal{G}(\bar{\Sigma} - \bar{\sigma}_i)) = (1 - \mathcal{G})(\bar{\Sigma} - \bar{\sigma}_i)\end{aligned}\quad (12)$$

여기서 Σ_{xx} 와 σ_{xx} 는 내부 및 외부함수위의 응력상태를 나타낸다. 또한 $\bar{\sigma}_i$ 와 \mathcal{G} 는 쌍정과 역쌍정 곡선을 적절히 표현할 수 있는 함수이다.

한편 압축 또는 쌍정 모드의 경화거동은 비대칭성을 고려하여 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{\delta} = \frac{\sigma_{xx,0}}{\sigma_{xx,0}^C} \cdot \delta^C \left(\varepsilon^{p,C} = \frac{\sigma_{xx,0}^C}{\sigma_{xx,0}^T} \bar{\varepsilon} \right)\quad (13)$$

여기서 δ^C 는 쌍정 시의 거리함수이며, $\frac{\sigma_{xx,0}}{\sigma_{xx,0}^C}$

는 인장 및 압축의 비대칭성비를 나타낸다.

식 (18)은 다음과 같이 재표현 될 수 있다.

$$\frac{d\bar{\delta}}{d\bar{\varepsilon}} = \frac{d\mathcal{G}}{d\bar{\varepsilon}} \cdot (\bar{\Sigma} - \bar{\sigma}_i) + (1 - \mathcal{G}) \cdot \frac{d\bar{\sigma}_i}{d\bar{\varepsilon}} + \mathcal{G} \cdot \frac{d\bar{\Sigma}}{d\bar{\varepsilon}}\quad (14)$$

함수 $\bar{\sigma}_i$ 와 \mathcal{G} 의 기계적 상수는 연속적 인장/압축 실험에 의해서 얻어진 응력-변형을 곡선으로부터 구해진다. 두 함수의 일반적인 표현은 아래와 같다.

$$\bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_i(\bar{\delta}_{in}, \mathbf{c}_{old}, \mathbf{c}_{new}, \varepsilon^p)\quad (15)$$

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(\bar{\delta}_{in}, \mathbf{c}_{old}, \mathbf{c}_{new}, \varepsilon^p)\quad (16)$$

2.3 항복 함수

드러커-프라거의 항복함수는 이방성 계수를 도입하여 아래와 같이 변형되었다 [4].

$$\begin{aligned}\Phi &= p(\sigma_{xx}^2 - \beta_2 \sigma_{xx} \sigma_{yy} + \beta_2^2 \sigma_{yy}^2 + 3\beta_3^2 \sigma_{xy}^2)^{1/2} \\ &+ q(\sigma_{xx} + \beta_4 \sigma_{yy}) - \bar{\sigma}_{iso} = 0\end{aligned}\quad (17)$$

여기서, p , q , β_2 , β_3 , β_4 는 실험적으로 구해지는 상수들이다.

3. 모델 보정(MODEL CALIBRATION)

AZ31B-O 마그네슘 판재의 연속적 인장-압축-인장 곡선을 Fig. 1에서와 같이 기존의 문헌에서 얻

었으며 이로부터 모델에 필요한 인자들을 구하였다 [5]. Fig. 1에서 보듯이 마그네슘 판재는 매우 높은 비대칭성을 보이며, 또한 압축 변형 후 다시 인장변형을 가했을 때 탄성 영역이 감소하는 현상을 보여주고 있다. 식 (15)과 (16)를 적용하여 경화 인자들을 구하였으며 이 때 식의 간략화를 위하여 외부 항복함수의 크기는 $\bar{\Sigma} = 520$ MPa 의 값으로 일정하다고 가정하였다.

슬립 모드, 즉 초기 인장모드의 경화함수는 기존의 알루미늄 재료와 같은 함수를 사용하였으며

$$\bar{\delta} = a_s(\bar{\delta}_{in}) + b_s(\bar{\delta}_{in}) \exp(-c_s(\bar{\delta}_{in}) \bar{\varepsilon}^l)\quad (18)$$

여기서 a_s , b_s , c_s 는 각각 초기 거리의 함수로 표현되는 상수 들이며 $\bar{\varepsilon}^l$ 는 변형방향이 바뀌었을 때 초기화 되는 변형률이다. 쌍정 모드에서 정의 되는 함수 $\bar{\sigma}_i$ 는 아래의 선형식을 이용하였다.

$$\bar{\sigma}_i = a_{TorUT}(\bar{\delta}_{in}) + b_{TorUT}(\bar{\delta}_{in}) \bar{\varepsilon}^l\quad (19)$$

여기서 a_{TorUT} 와 b_{TorUT} 는 각각 쌍정과 역쌍정 시의 상수들이다. 여기서 ‘T’ 와 ‘UT’ 는 각각 쌍정과 역쌍정을 의미한다. 함수 \mathcal{G} 를 위해서는 다음과 같은 근사(fitting)함수를 도입하였다.

$$\mathcal{G} = y_{0,TorUT}(\bar{\delta}_{in}) + \frac{c_{TorUT}(\bar{\delta}_{in})}{1 + \exp\left(-\frac{\bar{\varepsilon}^p - x_{0,TorUT}(\bar{\delta}_{in})}{d_{TorUT}(\bar{\delta}_{in})}\right)}\quad (20)$$

여기서 $y_{0,TorUT}$, c_{TorUT} , $x_{0,TorUT}$, d_{TorUT} 는 초기 거리의 함수로 표시되는 상수들이다. 쌍정 모드 시의 탄성영역의 수축과 그 후 변형에 따른 항복

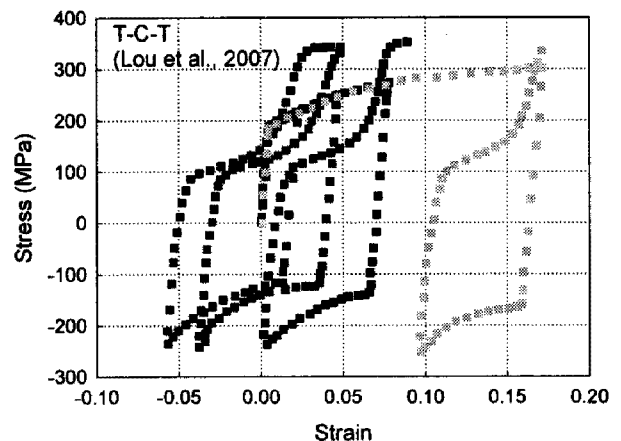


Fig.1 Stress-strain response of AZ31B-O Mg alloy

함수의 크기 증가를 나타내기 위하여, 일정한 수축율을 도입하였으며 본 예제에서는 0.325가 사용되었다. 또한 수축 후 등방경화비율은 $m_1=0.85$ 이 이용되었다. 이 때 일단 수축이 일어나면, 내부함수는 새로운 중심 즉 백응력을 갖게 되는데 이는 다음과 같은 식을 이용해서 구해질 수 있다.

$$\alpha' = \sigma - \frac{\bar{\sigma}'_{iso}}{\Sigma_{iso}}(\Sigma - A) \quad (21)$$

여기서 α' 와 $\bar{\sigma}'_{iso}$ 는 각각 백응력과 연화 후 항복함수의 크기를 나타낸다.

개발된 구성식을 유한요소해석 프로그램인 ABAQUS의 UMAT을 이용하여 구현하였다.

4 절점을 갖는 쉘요소를 사용하여 이차원 인장-압축-인장 시뮬레이션을 수행하였으며 이를 실험에 의해 구해진 값과 비교하였다(Fig. 2). 먼저 시뮬레이션에 의한 결과가 마그네슘 합금 판재에서 발생하는 세가지 변형 모드를 잘 나타냄을 알 수 있다. 즉, 초기 인장시 발생하는 슬립모드, 그리고 인장 후 압축시 발생하는 쌍정 모드 그리고 쌍정 후 재 인장시 일어나는 역쌍정 모드를 개발된 구성식이 잘 묘사할 수 있었다. 또한, 쌍정 시 발생하는 항복함수의 수축과 그 후 변형에 따른 항복함수의 증가 또한 잘 묘사되었다. 전반적으로, 전 변형률(pre-strain)에 대한 응력-변형률 곡선이 실험 값과 매우 잘 일치함을 보여주고 있다.

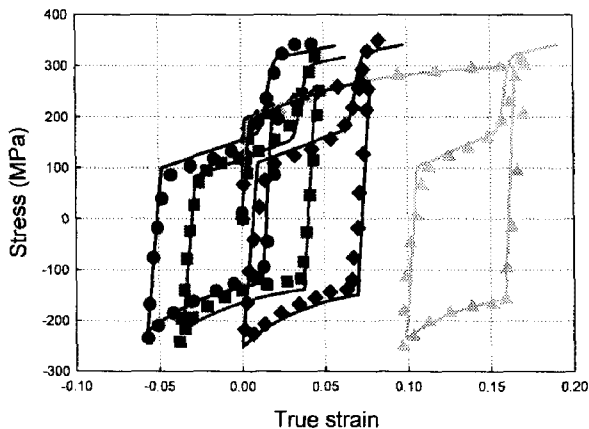


Fig. 2 Comparisons of calculated uni-axial T-C-T curves (lines) with measurements for various pre-strains.

4. 결론

상온에서 나타나는 마그네슘합금 판재의 특이한 기계적 성질을 효과적으로 나타낼 수 있는 구성식이 개발되었다. 우선, 마그네슘 판재의 높은 이방성과 초기 비대칭성을 구현하기 위하여 기존의 드러커-프라거 항복함수를 수정하였으며, 또한 경화거동의 비대칭성을 위하여는 이항복함수를 도입하여 판재의 인장-압축시에 발생하는 슬립, 쌍정, 역쌍정 세가지 변형 모드를 구현하였다. 개발된 구성식은 유한요소 정식화, 실험값과 비교 검증되었다.

후 기

This work was supported by the International Joint R&D Program by Ministry of Commerce, Industry and Energy in Korea (10028109), by Korea Science and Engineering Foundation through the SRC/ERC Program of MOST/KOSEF (R11-2005-065) and by the National Science Foundation (NSF) (DMI-0355429), which are greatly appreciated.

참 고 문 헌

- [1] C. S. Roberts, 1960, Magnesium and its alloys, New York: John Wiley.
- [2] X. Y. Lou, M. Li, R. K. Boger, S. R. Agnew, R. H. Wagoner, 2007, Hardening Evolution of AZ31B Mg Sheet, Int. J. Plast. Vol. 23, pp. 44~85.
- [3] M. Lee, D. Kim, C. Kim, M. Wenner, R. H. Wagoner, K. Chung, A practical two-surface model and its application to springback prediction, Int. J. Plast. (in press)
- [4] J. Kim, M. G. Lee, H. Ryou, K. Chung, J. R. Youn, T. J. Kang, Development of nonlinear constitutive laws for anisotropic and asymmetric fiber reinforced composite Polymer Composites (accepted)
- [5] M. G. Lee, R. H. Wagoner, K. Chung, J. K. Lee, H. Y. Kim, Constitutive Modeling for Anisotropic /Asymmetric Hardening Behavior of Magnesium alloy sheets, 2007, Int. J. Plast., (submitted)