

Unscented 칼만 필터 기반 전기임피던스 단층촬영법을 이용한 이상유동장 가시화

이정성, 정순일, Umer Zeeshan Ijaz, Anil Kumar Khambampati, 김경연, 김신
제주대학교

Image Reconstruction Using Unscented Kalman Filter in Electrical Impedance Tomography

Jeong Seong Lee, Soon Il Chung, Umer Zeeshan Ijaz, Anil Kumar Khambampati,
Kyung Youn Kim, Sin Kim
Cheju National University

1. 서론

원자력발전소의 열수력 시스템을 비롯한 많은 공학적 시스템에서 이상유동은 일반적인 현상으로, 효율적인 시스템 설계와 운용, 그리고 해석을 위해서는 이상유동장에 대한 이해가 필수적이다. 원자로 열수력 계통의 열수력 설계 및 안전해석에 필수적인 이상유동장 해석에 대한 기존의 방법론 중 일부는 유동장 구조의 대한 상세 정보를 얻는데 부적합하거나 유동장을 교란함으로써 실험 정보의 불확실성을 증가시키는 단점이 있다. 또한 다른 부류의 기법들은 상대적으로 고가의 장비에 의존하면서도 현재로서는 빠른 천이 과정을 경험하는 원자로 이상유동장에 적용하기에 데이터 취득 속도가 느리다는 문제점을 안고 있다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 제안된 방법이 전기 임피던스 단층촬영법(electrical impedance tomography: EIT)이다.

본 논문에서는, 상태방정식과 측정방정식으로 구성되는 동적모델에 기초하여, 시간에 따라 변하는 저항률 분포를 온라인으로 추정하기 위해 unscented 칼만 필터(unscented Kalman filter: UKF)를 이용한 전기 임피던스 단층촬영법의 영상복원 알고리즘을 제안하였다. 또한 이상유동의 가시화를 효과적으로 표현하기 위하여 상 분포(phase distribution) 대신 상 경계면(phase boundary)을 직접 추정하는 계면 추정 알고리즘(boundary estimation algorithm)[1],[2],[3]을 이용하여 최종영상을 복원하였다.

제안된 영상복원 알고리즘의 성능을 검증하기 위해 이상유동장에서의 기포 거동을 모사한 시나리오에 따른 실험데이터를 가지고 UKF를 이용한 영상복원 결과와 비선형 시스템에서 적용하는 대표적인 필터인 확장 칼만 필터(extended Kalman filter: EKF)의 영상복원 결과를 비교 분석하였다.

2. 수학적 개념

2-1. 문제의 설정 및 정문제

전기 임피던스 단층촬영 시스템은 목표물의 경계면에 부착된 여러 개의 전극을 통하여 약한 교류전류(공진주파수 범위의 수 mA 크기)를 주입하고, 전극에 유기된 전압을 측정하여 목표물 내부의 저항률 분포를 추정하는 장치이다. 이때, 이미 알고 있는 내부 저항률의 함수로써 경계면에 유기되는 전압을 구하는 것을 정문제라고 하는데, 이는 Maxwell 방정식으로부터 다음과 같이 Neumann형의 경계조건을 갖는 비선형 Laplace 방정식으로 기술된다, 한편, 본 연구에서는 전극과 내부와의 접촉저항(contact impedance)을 고려한 완전전극모델(completed electrode model)을 사용하였다[4].

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla u \right) = 0, \quad x \in \Omega \quad (1)$$

$$u + z_l \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu} = U_l, \quad x \in e_l, \quad l=1, 2, \dots, L \quad (2)$$

$$\int_{e_l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = I_l, \quad x \in e_l, \quad l=1, 2, \dots, L \quad (3)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega \setminus \bigcup_{l=1}^L e_l \quad (4)$$

여기서 Ω 및 $\partial\Omega$ 는 각각 목표물의 내부영역과 경계면을 나타내어, ρ 및 u 는 각각 Ω 에서의 저항률과 전압을, z_l , U_l 및 ν 는 각각 $\partial\Omega$ 에서의 전극과 내부와의 접촉저항, 전극에서의 전압 그리고 법선 벡터를 나타낸다. 한편, e_l 은 l 번째 전극을 의미하며, L 은 총 전극수이다. 식(2)-(4)의 경계조건을 갖는 비선형 Laplace 방정식에 대한 해석적(analytical)인 해는 구하기가 매우 어려우므로, 수치적(numerical) 방법인 유한 요소법(finite element method: FEM), 유한 차분법(finite difference method: FDM), 경계 요소법(boundary element method: BEM)등이 사용되고 있으며, 본 논문에서는 EIT 해석에 효과적인 FEM을 사용하였다. FEM에서는 계산 영역 Ω 를 Fig. 1.과 같이 매우 작은 요소로 세분하고, 각 요소내의 저항률 값이 일정하다고 가정하여, M 개의 각 노드 전압 u 를 다음과 같이 계산한다.

$$Y u = c \quad (5)$$

여기서, $Y \in \mathbb{R}^{M \times M}$ 는 stiffness 행렬로써 Ω 내부의 저항률의 함수이며, $c \in \mathbb{R}^{M \times 1}$ 는 주입 전류의 함수이고, M 은 FEM의 총 노드수이다.

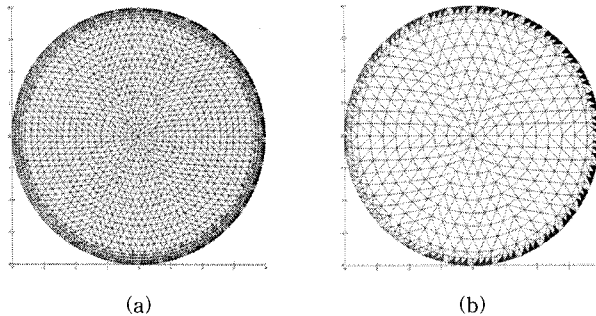


Fig. 1. Meshes used in: (a) forward solver; and (b) inverse solver.

2-2. 경계 표현(boundary expression)

본 논문에서는, 대상물내의 표적의 외경계가 충분히 매끄럽다고 가정하였다. 표적의 외경계는 다음과 같은 형태로 근사할 수 있다[1][2].

$$C_l(s) = \begin{pmatrix} x_l(s) \\ y_l(s) \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{N_n} \begin{pmatrix} \gamma_n^{x_l} \theta_n^x(s) \\ \gamma_n^{y_l} \theta_n^y(s) \end{pmatrix} \quad (6)$$

여기서, $C_l(s)$ ($l=1, 2, \dots, S$)은 l 번째 표적의 경계이고, S 는 표적의 수, $\theta_n(s)$ 는 주기적 미분

가능 기저함수(periodic and differentiable basis function), N_6 는 기저함수의 수이다. 기저함수의 형태는 다음과 같다.

$$\Theta_1^a(s) = 1 \quad (7)$$

$$\Theta_n^x(s) = \sin\left(2\pi\frac{n}{2}s\right), \quad n=2,4,6,\dots,even \quad (8)$$

$$\Theta_n^y(s) = \cos\left(2\pi\frac{(n-1)}{2}s\right), \quad n=3,5,7,\dots,odd \quad (9)$$

이상유동장내의 기포의 경계면은 거의 원형이므로 위의 식은 몇 개의 항만으로 해를 근사할 수 있다. 경계는 형상 계수(shape coefficient)의 벡터 γ 로 구성되며 다음과 같다.

$$\gamma = \left(\gamma_1^{x_1}, \dots, \gamma_{N_6}^{x_1}, \gamma_1^{y_1}, \dots, \gamma_{N_6}^{y_1}, \dots, \gamma_1^{x_s}, \dots, \gamma_{N_6}^{x_s}, \gamma_1^{y_s}, \dots, \gamma_{N_6}^{y_s} \right)^T \quad (10)$$

여기서, $\gamma \in \mathbb{R}^{2SN_6 \times 1}$ 이다.

2-3. unscented 칼만 필터(unscented Kalman filter: UKF)

EKF(extended Kalman filter)는 비선형 시스템에서 적용하는 대표적인 필터이다. EKF는 추정 상태값 $\hat{x}(k)$ 의 공분산 행렬을 시간 전과할 때 비선형 모델을 선형화하여 계산한다. 자코비안(Jacobian)을 계산해야 하기 때문에 계산량이 많아 실제 시스템에 적용하기 어렵다는 문제점이 있다. UKF는 EKF의 단점을 보완하기 위해 제안된 비선형 필터이다. UKF의 특징은 공분산 행렬을 구할 때 EKF와는 달리 비선형모델을 선형화하지 않는다. 대신에 상태벡터에 대한 sigma point를 선정하고, 각각의 sigma point에 대한 비선형 모델을 통해 시간 전과한 결과를 사용하여 구한 표본 평균과 표본 공분산 행렬을 사용하여 UT(Unscented Transformation)를 수행한다. UKF는 자코비안(jacobian)을 구하지 않아도 되므로 EKF 보다 계산상 이점이 있다. 또한, UT를 통한 공분산 행렬의 전과는 확률분포의 왜곡이 없으므로 EKF 보다 정확하고 안정성이 뛰어나다는 장점이 있다[5].

EIT의 동적모델을 구성하는 상태방정식과 측정 방정식은 다음과 같다[3].

$$\gamma_k = I \gamma_{k-1} + \omega_{k-1} \quad (11)$$

$$U_k = h_k(\gamma_k) + v_k \quad (12)$$

여기서, $\omega_k \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ 와 $v_k \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ 는 각각 $\mathbf{Q} = E[\omega_k \omega_k^T]$ 와 $\mathbf{R} = E[v_k v_k^T]$ 같은 공분산을 갖는 백색 가우시안(white Gaussian) 잡음이라 가정한다. $h_k(\gamma_k)$ 는 정문제로 구한 경계면의 전압이다.

UT를 이용하여 UKF를 구성하는 과정을 정리하면 다음과 같다[6].

(1) 초기화	
$\hat{\gamma}_0 = E[\gamma_0]$	(13)
$\mathbf{P}_0 = E[(\gamma_0 - \hat{\gamma}_0)(\gamma_0 - \hat{\gamma}_0)^T]$	(14)
$\hat{\gamma}_0^a = E[\gamma^a] = [\hat{\gamma}_0^T \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}]^T$	(15)
$\mathbf{P}_0^a = E[(\gamma_0^a - \hat{\gamma}_0^a)(\gamma_0^a - \hat{\gamma}_0^a)^T] = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix}$	(16)
(2) Sigma point 계산	
$\mathbf{x}_{k-1}^a = \left[\hat{\gamma}_{k-1}^a \quad \hat{\gamma}_{k-1}^a + \sqrt{(M+\lambda)\mathbf{P}_{k-1}^a} \quad \hat{\gamma}_{k-1}^a - \sqrt{(M+\lambda)\mathbf{P}_{k-1}^a} \right]$	(17)
(3) 시간 갱신 단계	(4) 측정 갱신 단계
$\mathbf{x}_{k k-1}^y = \mathbf{L}\mathbf{x}_{k-1}^y + \mathbf{x}_{k-1}^{\omega}$	(18)
$\hat{\gamma}_k^- = \sum_{i=0}^{2M} W_i^{(m)} \mathbf{x}_{i,k k-1}^y$	(19)
$\mathbf{P}_k^- = \sum_{i=0}^{2M} W_i^{(c)} [\mathbf{x}_{i,k k-1}^y - \hat{\gamma}_k^-][\mathbf{x}_{i,k k-1}^y - \hat{\gamma}_k^-]^T$	(20)
$\boldsymbol{\psi}_{k k-1} = h_k(\mathbf{x}_{k k-1}^y) + \mathbf{x}_{k-1}^v$	(21)
$\hat{U}_k^- = \sum_{i=0}^{2M} W_i^{(m)} \boldsymbol{\psi}_{i,k k-1}$	(22)
$\mathbf{P}_{\hat{U}_k^-, \hat{U}_k^-} = \sum_{i=0}^{2M} W_i^{(c)} [\boldsymbol{\psi}_{i,k k-1} - \hat{U}_k^-][\boldsymbol{\psi}_{i,k k-1} - \hat{U}_k^-]^T$	(23)
$\mathbf{P}_{\gamma_k U_k} = \sum_{i=0}^{2M} W_i^{(c)} [\mathbf{x}_{i,k k-1} - \hat{\gamma}_k^-][\mathbf{x}_{i,k k-1} - \hat{\gamma}_k^-]^T$	(24)
$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{\gamma_k U_k} \mathbf{P}_{\hat{U}_k^-, \hat{U}_k^-}^{-1}$	(25)
$\hat{\gamma}_k = \hat{\gamma}_k^- + \mathbf{K}_k(\bar{U}_k - \hat{U}_k^-)$	(26)
$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{\hat{U}_k^-, \hat{U}_k^-} \mathbf{K}_k^T$	(27)

3. 실험 결과

본 실험에서는 원통형 팬텀(phantom)을 사용하였다. 팬텀의 높이는 330mm 이고, 내경이 80mm의 실린더 모양으로 재질은 플라스틱으로 되어 있다. 전극은 팬텀 내에 삽입되어 있어 팬텀내의 전해질과 접촉이 되어 있으며, 전극의 높이는 200mm이고 너비는 6mm이다. 본 실험에서 사용된 전극의 재질은 Stainless steel로 11.25° 간격으로 팬텀 내면에 균일하게 설치되어져 있다. 팬텀에 사용되는 전극은 유동장과 접촉하기 때문에 접촉 임피던스(contact impedance)를 최소화하기 위해 전극 표면을 매끄럽게 하여 전도도가 최대한 보장되도록 설계하였다. 그리고 팬텀 내부로 돌출되지 않도록 전극의 크기에 맞게 내부 편에 홈을 파서 전극간의 영향을 최소화하고, 불필요한 부분이 유동장에 노출되지 않도록 하였다.

정문제 해석에는 Fig. 1(a)와 같이 3984 개의 요소와 2121 개의 노드를 갖는 FEM mesh를, 역문제 추정에는 Fig. 1(b)와 같이 996 개의 요소를 갖는 FEM mesh를 사용하였다. 전류 패턴을 주입하기 위한 전극 수가 32개 이고 측정 전압을 얻기 위한 주입 전류 패턴은 대면방식(opposite method)[7]을 사용하였다. 전류원(current source)으로 Agilent Precision LCR meter 4284A를 사용하였고 각 전극의 전압측정은 Agilent 43970A를 사용하였다.

본 논문에서 제안한 UKF의 추정 성능을 비교하기 위하여, 다음 Fig. 5와 같은 기포 거동을 모사한 시나리오를 설정하였다. 목표물내의 1개의 표적이 우측에 반경이 10mm인 상태에서부터 경계면을 따라 방향을 바꾸며 이동하는 경우이다. 표적은 8회에 거쳐 이동하며 각 frame에 대해 6개의 전류패턴을 이용하였다. 목표물내의 표적의 저항률 값은 $10^{10} (\Omega_{cm})$ 이며, 배경(background)의 저항률 값은 $0.003 (\Omega_{cm})$ 이다. 설정된 시나리오에 대한 UKF와 EKF의 영상복원 결과들을 각 frame 별로 Fig. 4에 나타내었다.

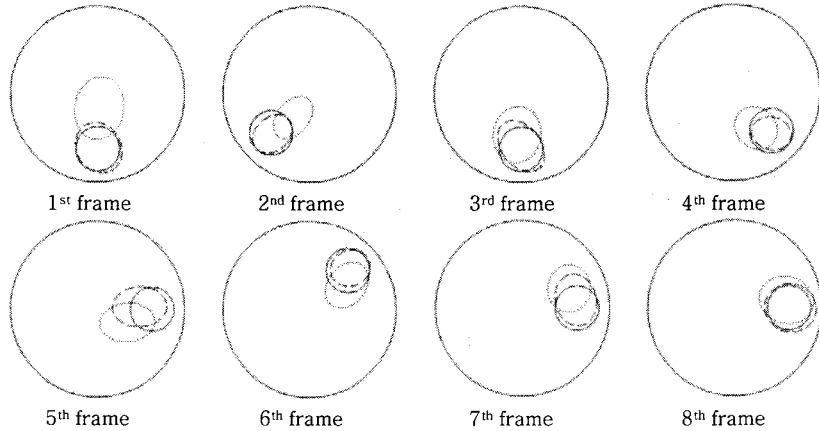


Fig. 4. Reconstructed boundaries for experiment. Solid line, dotted line and dashed line represent the true boundary, boundary estimated by EKF, and boundary estimated by UKF, respectively.

Fig. 4.은 UKF에 의해 영상복원된 계면(dashed line)과 EKF에 의한 계면(dotted line)과 실제 표적의 계면(solid line)을 같이 표현하여 직접적으로 영상복원 알고리즘의 성능을 비교할 수 있다. UKF에 의해 복원된 계면추정능력이 EKF에 비해 실제 표적의 위치 및 크기와 보다 정확하게 표현한다. 특히, 목표물의 저항률 분포가 갑자기 변하는 시나리오임에도 불구하고 UKF는 표적의 위치와 크기를 거의 정확하게 추정하는 것을 확인할 수 있다. 제안된 영상복원 알고리즘의 성능을 평가하기 위하여 실제 표적의 계면과 추정된 계면의 $RMSE_{y_k}$ 를 다음과 같이 정의하였다.

$$RMSE_{y_k} = \frac{\|y_{estimated,k} - y_{true,k}\|}{\|y_{true,k}\|} \quad (28)$$

$RMSE_{y_k}$ 는 시간 k 스텝에서의 실제 표적과 추정된 표적을 비교하는데 효과적이다. UKF와 EKF의 $RMSE_{y_k}$ 를 전류패턴에 대한 그래프로 Fig. 5.에 나타내었다.

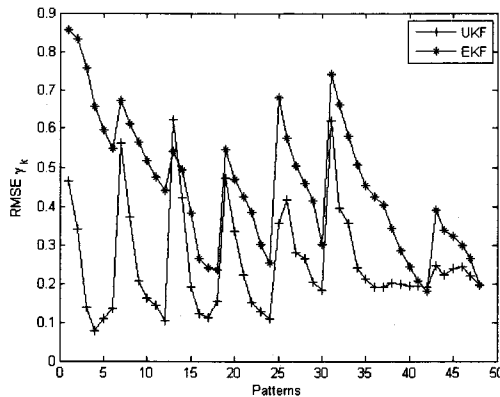


Fig. 5. RMSE comparison for experiment.

4. 결론

본 논문에서는, 표적 내부의 저항률의 비선형 함수로써 기술되는 비선형 함수로써 기술되는 경계면의 측정전압을 반복연산 과정에서 갱신되는 추정 저항률 값에 대하여 선형화하여 얻은 측정방정식과 random walk 모델을 이용하여 구한 상대방정식으로 구성되는 동적 모델을 근거로, 시간에 따라 변하는 저항률 분포를 추정하기 위해 unscented 칼만 필터(unscented Kalman filter: UKF)를 제안하였다. 또한 이상유동의 가시화를 효과적으로 표현하기 위하여 상 분포(phase distribution) 대신 상 경계면(phase boundary)을 직접 추정하는 계면 추정 알고리즘(boundary estimation algorithm)을 적용하였다. 제안된 영상복원 알고리즘의 성능을 검증하기 위해 이상유동장에서의 기포 거동을 모사한 시나리오를 상정하여 32개의 전극을 갖는 원통형 팬텀(phantom)에 대한 실험을 수행하였고, UKF를 이용한 영상복원 결과와 비선형 시스템에서 적용하는 대표적인 필터인 확장 칼만 필터(extended Kalman filter: EKF)의 영상복원 결과를 비교 분석하였다. 본 논문에서 제안한 UKF 영상복원 알고리즘은 EKF의 영상복원 알고리즘에 비해, 계산량은 증가하지만 시간에 따라 급변하는 동적 표적에 대한 영상복원 능력이 우수함을 확인하였다.

5. 참고문헌

1. D. K. Han; A. Prosperetti. A Shape Decomposition Technique in Electrical Impedance Tomography, J. Comput. Phys., 1999, 155, 75
2. V. Kolehmainen; S. R. Arridge; W. R. B. Lionheart; M. Vauhkonen; J. P. Kaipio. Recovery of Region Boundaries of Piecewise Constant Coefficients of Elliptic PDE from Boundary Data, Inverse Probl., 1999, 15, 1375
3. B. S. Kim; U. Z. Ijaz; J. H. Kim; M. C. Kim; S. Kim; K. Y. Kim. Nonstationary Phase Boundary Estimation in Electrical Impedance Tomography based on the Interacting Multiple Model Scheme, Meas. Sci. Technol., 2007, 18, 62
4. M. Vauhkonen. Electrical Impedance Tomography and Prior Information, 1997
5. S. J. Julier; J. K. Uhlmann. 2004 Unscented filtering and nonlinear estimation Proceedings of the IEEE 92(3), 2004, 3, 92
6. S. J. Julier; J. K. Uhlmann; H. Durrant-Whyte. A New Approach for Filtering Nonlinear Systems, Proceedings of American Control Conference, Seattle, WA, June 1995
7. J. G. Webster. Electrical Impedance Tomography, Adam Hilger, 1990