

전기임피던스 단층촬영법을 이용한 층류 유동장에서의 동적 계면 추정
정순일, 이정성, Umer Zeeshan Ijaz, Anil Kumar Khambampati, 김경연, 김신
제주대학교

Dynamic Estimation of Interfacial Boundary in a Stratified Flow with
Electrical Impedance Tomography

Soon Il Chung, Jeong Seong Lee, Umer Zeeshan Ijaz, Anil Kumar Khambampati,
Kyung Youn Kim, Sin Kim
Cheju National University

1. 서론

전기임피던스 단층촬영법(electrical impedance tomography; EIT)은 시스템 구현 시에 하드웨어 비용이 비교적 저렴하고, 비파괴적인 방법으로 측정 대상물에 대한 임피던스 추정이 가능하므로, 의공학, 지질학 및 재료 공학 등에서 모니터링 도구로 주목받고 있다. 특히, X-ray 및 MRI 단층촬영법에 비해 아직 복원된 영상의 공간 해상도(spatial resolution)는 떨어지지만, 순간 해상도(temporal resolution)가 뛰어나고 인체에 대한 안정성이 보장됨은 물론, 임피던스 특성 파악이 가능하므로, 의공학 분야와 공정 단층촬영(process tomography) 분야에 그 이용 범위가 확대될 것으로 판단된다. 본 논문에서는 혼합되지 않는 두 액체의 층류 유동장에서의 동적 계면을 추정하기 위해 unscented 칼만 필터(unscented Kalman filter: UKF)를 이용한 전기 임피던스 단층촬영법의 영상복원 알고리즘을 제안하였다. 동적 계면을 효과적으로 표현하기 위하여 front point 기법을 이용하여 최종영상을 복원하였다. 제안된 영상복원 알고리즘의 성능을 검증하기 위해 층류 유동장에서의 동적 계면을 모사한 시나리오에 따른 UKF를 이용한 영상복원 결과와 비선형 시스템에서 적용하는 대표적인 필터인 확장 칼만 필터(extended Kalman filter: EKF)의 영상복원 결과를 비교 분석하였다. 본 논문의 영상복원 알고리즘은 EKF에 근거한 동적 영상복원 알고리즘에 비해 계산량은 증가하지만, 동적표적에 대한 영상복원 성능이 개선되고 특히, 시간에 대한 변화가 심한 경우에도 잘 대처할 수 있다.

2. EIT의 기본원리

EIT는 측정하고자 하는 계에 약한 전류를 흘려주고 계의 경계면의 여러 위치에서 전압을 측정하여 물체 내부의 저항 분포를 예측하여 물체 내부의 단층 영상을 얻는 기술이다. EIT 시스템은 신호를 입력하고 측정하는 하드웨어부와 측정된 전압을 이용하여 표적의 저항률 분포를 계산하는 영상 복원 알고리즘으로 구성된다. 경계면에서 측정된 전압을 이용하여 계의 내부 저항 분포를 얻는 영상 복원 알고리즘은 계의 경계면에서 여러 개의 전극을 통해 전류를 주입하고 내부 저항 분포의 함수에 따라 경계면에 유도되는 전압을 계산하는 정 문제(forward problem)와 역으로 경계면에 유도된 전압 값을 이용하여 계 내부의 저항 분포를 추정하고 계의 영상을 복원하는 역 문제(inverse problem)로 이루어진다. 정 문제와 역 문제에 대한 자세한 설명은 아래에 주어진다.

2.1 정 문제

계의 경계면에 여러 개의 전극을 통해 전류를 주입하고 이미 알고 있는 저항 분포의 함수로서 경계면에 유기되는 전압은 다음과 같이 Neumann형의 경계조건을 갖는 비선형 Laplace 방정식으로 기술된다. 본 연구에서는 전극과 내부와의 접촉 저항을 고려한 완전 전극 모델(complete electrode model)을 고려하였다.

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla u \right) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$u + z_l \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu} = U_l \quad \text{on } e_l, l=1, 2, \dots, L \quad (2)$$

$$\int_{e_l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = I_l \quad l=1, 2, \dots, L \quad (3)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \setminus \bigcup_{l=1}^L e_l \quad (4)$$

여기서 Ω , $\partial\Omega$, ρ , e_l , z_l , U_l , ν , L 은 각각 물체의 내부 영역, 물체의 경계면, 내부저항, l 번째 전극, l 번째 전극에서의 접촉 저항, l 번째 전극에서의 측정 전압, 법선 벡터, 전극 수이다. 위의 조건에 부가하여, 해의 존재성과 유일성을 보장하기 위하여 위의 경계 조건에 키르히호프의 법칙(Kirchhoff's law)을 만족하는 주입 전류 조건과 측정 전압에 대한 조건을 부가한다.

$$\sum_{l=1}^L I_l = 0 \quad (5)$$

$$\sum_{l=1}^L U_l = 0 \quad (6)$$

식 (1)~(6)으로 주어지는 방정식의 해석적인 해는 구할 수 없으므로 수치적 방법인 유한 요소법(Finite Element Method; FEM), 유한 차분법(Finite Difference Method; FDM), 경계 요소법(Boundary Element Method; BEM)등이 사용되고 있으며, 본 논문에서는 FEM을 사용하여 해를 구하고 있다. FEM에서는 계산 영역 Ω 를 매우 작은 요소로 세분하고 각 요소 내의 저항 값이 일정하다고 가정하여 내부의 노드의 전압 u 를 다음과 같이 계산한다.

$$Y u = c \quad (7)$$

여기서, stiffness matrix $Y \in \mathbb{R}^{M \times M}$ 는 저항률 분포의 함수이며, $c \in \mathbb{R}^{M \times 1}$ 는 force vector로 주입 전류 패턴(pattern)의 함수이고, M 은 FEM의 총 노드수이다.

2.2 역 문제 및 unscented 칼만 필터

계의 경계면에 전극을 통해 주입한 전류 패턴과 경계면의 전극에 유기되는 전압값을 이용하여 내부의 저항률을 추정하는 과정을 역 문제라 한다.

매개변수 $d \in \mathbb{R}^{A \times 1}$ 을 시스템의 상태 변수로 설정하면 이산 시간 상태 방정식과 비선형 측정 방정식은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$d_k = I \cdot d_{k-1} + \omega_k \quad (8)$$

$$U_k = h_k(d_k) + v_k \quad (9)$$

여기서 $\omega_k \in \mathbb{R}^{A \times 1}$ 와 $\nu_k \in \mathbb{R}^{A \times 1}$ 는 각각 $Q = [\omega_k \nu_k^T]$, $Q = E[\nu_k \nu_k^T]$ 와 같은 공분산을 갖는 백색 가우시안(white Gaussian)잡음이라 가정한다. 여기서 Λ 는 front point 벡터의 차원이고 L 은 전극의 수이다.

그림 1과 같이 반지름이 R 인 관을 통해 서로 섞이지 않는 두 액체가 흐른다고 가정한다. 두 액체간 경계는 경계위에 분포된 front points P_λ , ($\lambda=1,2,\dots,\Lambda$)에 의해 추정할 수 있다. 여기서 Λ 는 front points의 총수이다. P_1 과 P_Λ 는 각각 맨 왼쪽과 맨 오른쪽 front point이고 경계의 가장

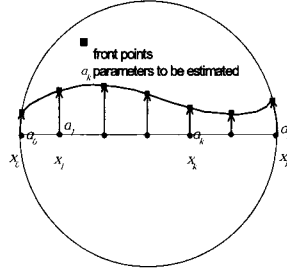


figure 1. Schematic of the stratified flow and interfacial boundary.

자리에 위치하고 있다. front points는 d_λ 을 매개변수로 하여 나타낼 수 있다. 내부의 front points($\lambda=2,\dots,\Lambda-1$)는 중심의 수평선 위에 위치한 front point($x_\lambda, 0$)로부터 수직 방향으로 거리 d_λ 로 정의할 수 있고 P_λ 의 좌표는 (X_λ, d_λ) 로 나타낼 수 있다. 여기서 수평선 위의 points 위치는 미리 결정되어진다. 그러나 양 끝의 front points는 앞에와 같은 방법으로 정의할 수 없다. 그 대신에 d_1 과 d_Λ 는 $(x_1, 0) = (-R, 0)$ 와 $(x_\Lambda, 0) = (R, 0)$ 같이 front point에서 경계면가장자리까지의 경로 길이로 정의된다.

$$(X_1, Y_1) = \left(-R \cos \frac{d_1}{R}, R \sin \frac{d_1}{R} \right) \quad (10)$$

$$(X_\lambda, Y_\lambda) = (x_\lambda, d_\lambda) \quad \lambda = 2, \dots, \Lambda - 1 \quad (11)$$

$$(X_\Lambda, Y_\Lambda) = \left(R \cos \frac{d_\Lambda}{R}, R \sin \frac{d_\Lambda}{R} \right) \quad (12)$$

여기서 변수 벡터 $d = (d_1, d_2, \dots, d_\Lambda)^T \in \mathbb{R}^{A \times 1}$ 는 unscented 칼만 필터에 의해 구해진다. UKF는 EKF의 단점을 보완하기 위해 제안된 비선형 필터이다. EKF(extended Kalman filter)는 비선형 시스템에서 적용하는 대표적인 필터로 추정 상태값 $\hat{x}(k)$ 의 공분산 행렬을 시간 전파할 때 비선형 모델을 선형화하여 계산한다. 그러므로 비선형 모델의 선형화는 확률적으로 특성을 왜곡시켜 불안정한 필터가 되는 경우가 많으며, 자코비안(Jacobian)을 계산해야 하기 때문에 계산량이 많아 실제 시스템에 적용하기 어렵다는 문제점이 있다. UKF의 특징은 공분산 행렬을 구할 때 EKF와는 달리 비선형 모델을 선형화하지 않는다. 대신에 상태벡터에 대한 sigma point를 선정하고, 각각의 sigma point에 대한 비선형 모델을 통해 시간 전파한 결과를 사용하여 구한 표본 평균과 표본 공분산 행렬을 사용하여 UT(Unscented

Transformation)를 수행한다. UKF는 자코비안을 구하지 않아도 되므로 EKF 보다 계산상 이점이 있다. 또한, UT를 통한 공분산 행렬의 전파는 확률분포의 왜곡이 없으므로 EKF 보다 정확하고 안정성이 뛰어나다는 장점이 있다. UT를 이용하여 UKF를 구성하는 과정을 정리하면 다음과 같다.

초기화:

$$\hat{d}_0 = E[d_0] \quad (13)$$

$$P_0 = E[(d_0 - \hat{d}_0)(d_0 - \hat{d}_0)^T] \quad (14)$$

$$\hat{d}_0^a = E[d^a] = [\hat{d}_0^T \quad 0 \quad 0]^T \quad (15)$$

$$P_0^a = E[(d_0^a - \hat{d}_0^a)(d_0^a - \hat{d}_0^a)^T] = \begin{bmatrix} P_0 & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \quad (16)$$

sigma point 계산:

$$d_{k-1}^a = \begin{bmatrix} \hat{d}_{k-1}^a & \hat{d}_{k-1}^a + \sqrt{(M+\lambda)P_{k-1}^a} & \hat{d}_{k-1}^a - \sqrt{(M+\lambda)P_{k-1}^a} \end{bmatrix} \quad (17)$$

시간 갱신 단계:

$$\chi_{k|k-1}^d = I \cdot \chi_{k-1}^d + \chi_{k-1}^\omega \quad (18)$$

$$\hat{d}_k^- = \sum_{i=0}^{2M} W_i^{(m)} \chi_{i,k|k-1}^d \quad (19)$$

$$P_k^- = \sum_{i=0}^{2M} W_i^{(c)} [\chi_{i,k|k-1}^d - \hat{d}_k^-][\chi_{i,k|k-1}^d - \hat{d}_k^-]^T \quad (20)$$

$$\psi_{k|k-1} = h_k(\chi_{k|k-1}^d) + \chi_{k-1}^\nu \quad (21)$$

$$\hat{U}_k^- = \sum_{i=0}^{2M} W_i^{(m)} \psi_{i,k|k-1} \quad (22)$$

측정 갱신 단계:

$$P_{\hat{U}_k \hat{U}_k} = \sum_{i=0}^{2M} W_i^{(c)} [\psi_{i,k|k-1} - \hat{U}_k^-][\psi_{i,k|k-1} - \hat{U}_k^-]^T \quad (23)$$

$$P_{d_k U_k} = \sum_{i=0}^{2M} W_i^{(c)} [\chi_{i,k|k-1}^d - \hat{d}_k^-][\psi_{i,k|k-1} - \hat{U}_k^-]^T \quad (24)$$

$$K_k = P_{d_k U_k} P_{\hat{U}_k \hat{U}_k}^{-1} \quad (25)$$

$$\hat{d}_k = \hat{d}_k^- + K_k (\bar{U}_k - \hat{U}_k^-) \quad (26)$$

$$P_k = P_k^- - K_k P_{\hat{U}_k \hat{U}_k} K_k^T \quad (27)$$

여기서 $d^a = [d^T \quad \omega^T \quad \nu^T]^T$, $\chi^a = [(\chi^d)^T \quad (\chi^\omega)^T \quad (\chi^\nu)^T]^T$ 이다.

3. 수치실험

제한된 영상복원 알고리즘의 성능을 검증하기 위해 층류 유동장에서의 동적 계면을 모사한 시나리오에 따른 UKF를 이용한 영상복원 결과와 비선형 시스템에서 적용하는 대표적인 필터인 확장 칼만 필터(extended Kalman filter: EKF)의 영상복원 결과를 비교 분석하였다. 수치실험 결과는 그림 4-5 와 같다. 팬텀의 지름은 28cm이고 너비가 2.5cm인 전극 16개가 팬텀 주위에 각각 위치되어 있다. 혼합되지 않는 두 액체의 저항률은 각각 $0.01(\Omega_{cm})$ 와 $0.0001(\Omega_{cm})$ 으로 대비율은 1000:1 이다. 수치실험에 사용된 매개 변수는 table 1. 과 같으며 접촉 임피던스(contact impedance)는 $z=0.005$ 이다. 총 32 frame 이 사용되었다.

Table 1. Parameters used in simulations for assessing the impact of measurement noise in 10 front points case with 1:1000 contrast ratio.

	EKF	UKF
Q	$0.01 I_{\Lambda}$	$0.01 I_{\Lambda}$
R	$5 \times 10^6 I_L$	$3 \times 10^4 I_L$
P_0	$0.01 I_{\Lambda}$	$0.01 I_{\Lambda}$
γ	0.0001	-
α	-	1
β	-	2
κ	-	0

Fig. 2는 UKF에 의해 영상복원된 계면과 EKF에 의한 계면과 실제 표적의 계면(solid line)을 같이 표현하여 직접적으로 영상복원 알고리즘의 성능을 비교할 수 있다. UKF에 의해 복원된 계면추정능력이 EKF에 비해 실제 표적의 위치 및 크기와 보다 정확하게 표현한다. 특히, 목표물의 저항률 분포가 갑자기 변하는 시나리오임에도 불구하고 UKF는 표적의 위치와 크기를 거의 정확하게 추정하는 것을 확인할 수 있다. 제한된 영상복원 알고리즘의 성능을 평가하기 위하여 실제

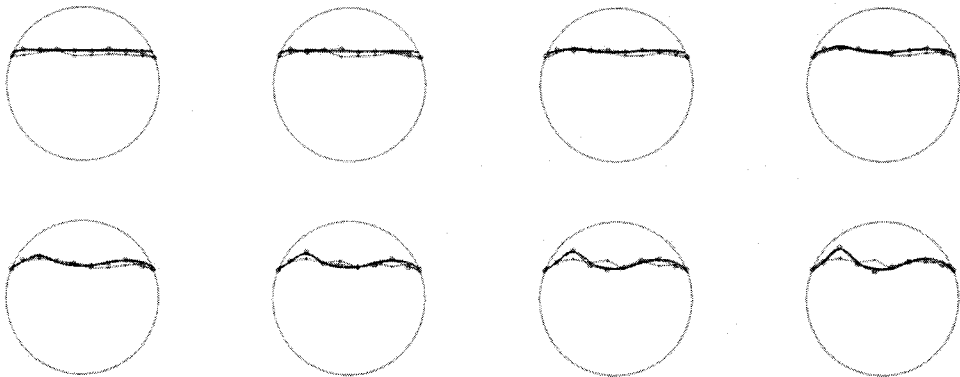


Figure 2. Results with 10 front points for scenario1 with measurements perturbed by 1% white Gaussian noise and contrast ratio of 1:1000: (a) reconstructed boundaries after every 4 current patterns. True profile (-), EKF (-x-), and UKF (-o-);

표적의 계면과 추정된 계면의 $RMSE_d$ 를 다음과 같이 정의하였다.

$$RMSE_d = \frac{\|d_{estimated} - d_{true}\|}{\|d_{true}\|} \quad (28)$$

UKF와 EKF의 $RMSE_d$ 를 전류패턴에 대한 그래프로 Fig. 3.에 나타내었다.

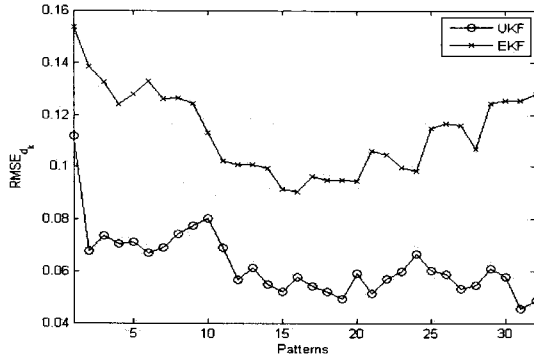


figure 3. RMSE comparison between EKF and UKF.

4. 결론

본 논문에서는, 표적 내부의 저항률의 비선형 함수로써 기술되는 경계면의 측정전압을 반복연산 과정에서 갱신되는 추정 저항률 값에 대하여 선형화하여 얻은 측정방정식과 random walk 모델을 이용하여 구한 상태방정식으로 구성되는 동적 모델을 근거로, 시간에 따라 변하는 저항률 분포를 추정하기 위해 unscented 칼만 필터(unscented Kalman filter: UKF)를 제안하였다. 제안된 영상복원 알고리즘의 성능을 검증하기 위해 pipelines에서 혼합되지 않는 두 액체의 층류 유동장에서의 동적 계면을 모사한 시나리오를 상정하여 UKF를 이용한 영상복원 결과와 비선형 시스템에서 적용하는 대표적인 필터인 확장 칼만 필터(extended Kalman filter: EKF)의 영상복원 결과를 비교 분석하였다. 본 논문에서 제안한 UKF 영상복원 알고리즘은 EKF의 영상복원 알고리즘에 비해, 계산량은 증가하지만 시간에 따라 유동하는 동적 계면에 대한 영상복원 능력이 우수함을 확인하였다.

5. 참고문헌

1. D. K. Han; A. Prosperetti. A Shape Decomposition Technique in Electrical Impedance Tomography, J. Comput. Phys., 1999, 155, 75
2. V. Kolehmainen; S. R. Arridge; W. R. B. Lionheart; M. Vauhkonen; J. P. Kaipio. Recovery of Region Boundaries of Piecewise Constant Coefficients of Elliptic PDE from Boundary Data, Inverse Probl., 1999, 15, 1375
3. B. S. Kim; U. Z. Ijaz; J. H. Kim; M. C. Kim; S. Kim; K. Y. Kim. Nonstationary Phase Boundary Estimation in Electrical Impedance Tomography based on the Interacting Multiple Model Scheme, Meas. Sci. Technol., 2007, 18, 62
4. M. Vauhkonen. Electrical Impedance Tomography and Prior Information, 1997
5. S. J. Julier; J. K. Uhlmann. 2004 Unscented filtering and nonlinear estimation Proceedings of the IEEE 92(3), 2004, 3, 92
6. S. J. Julier; J. K. Uhlmann; H. Durrant-Whyte. A New Approach for Filtering Nonlinear Systems, Proceedings of American Control Conference, Seattle, WA, June 1995
7. J. G. Webster. Electrical Impedance Tomography, Adam Hilger, 1990