

# 자유수면 보정기법을 이용한 3차원 천수유동 수치모형

## A three-dimensional numerical model for shallow water flows using a free surface correction method

장원재\* · 이승오\*\* · 조용식\*\*\*

Jang, Won Jae · Lee, Seung Oh · Cho, Yong-Sik

### Abstract

A free-surface correction(FSC) method is presented to solve the 3-D shallow water equations. Using the mode splitting process, FSC method can simulate shallow water flows under the hydrostatic assumption. For the hydrostatic pressure calculation, the momentum equations are firstly discretized using a semi-implicit scheme over the vertical direction leading to the tri-diagonal matrix systems. A semi-implicit scheme has been adopted to reduce the numerical instability caused by relatively small vertical length scale compare to horizontal one. and, as the free surface correction step the final horizontal velocity fields are corrected after the final surface elevations are obtained. Finally, the vertical final velocity fields can be calculated from the continuity equation. The numerical model is applied to the calculation of the simulation of flow fields in a rectangular open channel with the tidal influence. The comparisons with the analytical solutions show overall good agreements between the numerical results and analytical solutions.

**key words** : finite difference method, tri-diagonal matrix, free-surface correction

### 1. 서 론

얕은 하구나 호수에서 자유수면 흐름은 빠르게 전파하는 중력파(surface gravity waves)와 느리게 움직이는 내부파(internal gravity waves)로 구성된다. 자유수면 흐름을 해석하는 대부분의 3차원 모형은 3차원 운동량방정식에서 연직방향으로 나누어진 수심에 따라서 연직으로 적분된 2차원 방정식을 모드분리(mode splitting)기법을 이용하여 푼다. 이러한 모드분리 기법은 외부모드(external mode)와 내부모드(internal mode)로 나누어진다. 외부모드는 빠르게 전파하는 중력파 해석에서 수치해의 안정성에 대한 CFL(Courant-Friedrich-Lewy) 조건을 만족시키는 범위의  $\Delta t$ 를 사용하여 양해적으로 푼다. 양해적인 차분법을 사용하려면, 시간 간격  $\Delta t$ 에 대한 수평공간  $\Delta x$ 는 중력파의 전파속도보다 크지 않아야 한다. 외부모드는 수면 중력파의 전파의 계산을 하기 위해서 시간간격  $\Delta t$ 의 값이 충분히 작아야 하지만, 내부모드는 CFL 조건에 의한 제약은 받지 않으므로 중력파에 관해서 무조건적으로 안정적이다.

모드 분리를 사용하면, 외부모드나 내부모드로부터 물리적 특성은 일치하고, 수심 적분된 유속은 유속장을 연직방향에 대하여 적분한 값과 같게 된다. 외부모드와 내부모드에서 바닥의 전단응력은 또한 일치하여야 한다. 만일, 수치적 오류에 의해 계산된 값들이 일치하지 않을 경우에는 수치해는 수렴하지 않을 수 있다.

반음해법(semi-implicit scheme)을 이용한 계산시 각각의 시간단계에서 선형 대각 매트릭스를 이용하여 전 영역의 미지수인 수면 높이를 구할 수 있고, 순압경도력항(barotropic term)을 직접적으로 대입함으로써 전 시간단계의 연직층의 수평속도를 계산 할 수 있다. 또한 빠르게 전파하는 중력파에 의존하지 않은 더 큰

\* 한양대학교 토목공학과 · 석사과정 · E-mail: jjjwwwjjj@hanmail.net

\*\* 한양대학교 토목공학과 · 박사 후 과정 · E-mail: seungoh.lee@gmail.com

\*\*\* 교신저자 · 정회원 · 한양대학교 토목공학과 · 교수 · E-mail: ysc59@hanyang.ac.kr

$\Delta t$ 를 사용할 수 있다.

Casulli and Cheng(1992)은 각각 시간 단계에서, 운동량방정식의 순압경도력항과 연속방정식에서의 유속장( $u, v, w$ )을 음해적으로 해석하였다. 운동량 방정식의 점성항 계산시 유속장을 음해적으로 계산하는 것 외에 나머지는 양해법을 이용하여 수치모의하였다. 자유수면 수정 방법(Free-surface correction)은 모드 분리절차를 포함하지 않은 반음해적인 방법(Casulli 와 Cheng, 1992)과 유사하고 또한 음해적인 방법을 사용할 경우 계산시간의 효율성을 증대시킬 수 있다.

자유수면 수정 방법은 두 단계의 절차과정을 걸쳐서 진행된다. 먼저 수심이 수평방향의 길이에 비해 상대적으로 작아서 발행할 수 있는 수치해의 불안정적 거동을 방지하기 위해 운동량 방정식을 연직방향에 대해 음해적으로 차분한후 삼중대각행렬을 구성하여 해석한다. 이때 계산된 유속장은 연속방정식을 고려하지 않았으므로 각 계산격자에서 질량보존 법칙을 만족되지 않을 수도 있다. 두 번째 단계로써 자유수면을 보정하기 위하여 자유수면의 변화를 계산하고 이 변화량에 따른 최종수위와 수평방향 유속을 계산한다. 마지막으로 연속방정식에 대입하면 연직방향 유속을 구할 수 있다.

수치기법은 교호격자망(staggered grid)과 2차 정확도를 갖는 Lax-wendroff기법을 이송항의 해석에 사용하였다. 또한 수치모형은 조석의 영향을 받는 직사각형의 수로에서의 흐름을 모의하였다.

## 2. 지배방정식

본 연구에서는 일반좌표계 ( $\xi, \eta, \zeta$ )를 이용하여 시간은  $\tau=\tau(t)$ , 수평방향은  $\xi=\xi(x, y)$ ,  $\eta=\eta(x, y)$  그리고 연직방향은  $\zeta=\zeta(t, x, y, z)$ 로서 지배방정식을 시간과 3차원 공간의 함수로 나타내었다. 정수압분포를 가정하여, 연직방향의 운동량방정식을 생략하고, 비압축성 Navier-Stokes 방정식을 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{U}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{W}{J} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{J} \right) \frac{\partial u}{\partial \tau} + \left( \frac{U}{J} \right) \frac{\partial u}{\partial \xi} + \left( \frac{V}{J} \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} + \left( \frac{W}{J} \right) \frac{\partial u}{\partial \zeta} = & -g \left[ \left( \frac{\xi_x}{J} h \right)_{\xi} + \left( \frac{\eta_x}{J} h \right)_{\eta} + \left( \frac{\zeta_x}{J} h \right)_{\zeta} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{v_i}{J} \left( \nabla_{\xi} \cdot \nabla_{\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \nabla_{\xi} \cdot \nabla_{\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \nabla_{\xi} \cdot \nabla_{\zeta} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{v_i}{J} \left( \nabla_{\xi} \cdot \nabla_{\eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \nabla_{\eta} \cdot \nabla_{\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \nabla_{\eta} \cdot \nabla_{\zeta} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \frac{v_i}{J} \left( \nabla_{\xi} \cdot \nabla_{\zeta} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \nabla_{\eta} \cdot \nabla_{\zeta} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \nabla_{\zeta} \cdot \nabla_{\zeta} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \right] \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{J} \right) \frac{\partial v}{\partial \tau} + \left( \frac{U}{J} \right) \frac{\partial v}{\partial \xi} + \left( \frac{V}{J} \right) \frac{\partial v}{\partial \eta} + \left( \frac{W}{J} \right) \frac{\partial v}{\partial \zeta} = & -g \left[ \left( \frac{\xi_y}{J} h \right)_{\xi} + \left( \frac{\eta_y}{J} h \right)_{\eta} + \left( \frac{\zeta_y}{J} h \right)_{\zeta} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{v_i}{J} \left( \nabla_{\xi} \cdot \nabla_{\xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \nabla_{\xi} \cdot \nabla_{\eta} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \nabla_{\xi} \cdot \nabla_{\zeta} \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{v_i}{J} \left( \nabla_{\xi} \cdot \nabla_{\eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \nabla_{\eta} \cdot \nabla_{\eta} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \nabla_{\eta} \cdot \nabla_{\zeta} \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \frac{v_i}{J} \left( \nabla_{\xi} \cdot \nabla_{\zeta} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \nabla_{\eta} \cdot \nabla_{\zeta} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \nabla_{\zeta} \cdot \nabla_{\zeta} \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) \right] \end{aligned} \quad (3)$$

여기에서,  $u$  와  $v$  는 차례대로  $x$  축,  $y$  축과  $z$  축방향의 유속,  $h$  는 자유수면의 높이,  $z_0$  는 하상의 높이,  $g$  는 중력가속도,  $v_i$  는 와점성계수,  $U=\xi_x u+\xi_y v$ ,  $V=\eta_x u+\eta_y v$ ,  $W=\xi_x u+\xi_y v+\xi_z w$  은 좌표변환된 유속, 확산항에서는  $\nabla_{\xi} \cdot \nabla_{\xi} = \xi_x \xi_x + \xi_y \xi_y$ ,  $\nabla_{\xi} \cdot \nabla_{\eta} = \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y$ ,  $\nabla_{\xi} \cdot \nabla_{\zeta} = \xi_x \zeta_x + \xi_y \zeta_y$ ,  $\nabla_{\eta} \cdot \nabla_{\eta} = \eta_x \eta_x + \eta_y \eta_y$ ,  $\nabla_{\eta} \cdot \nabla_{\zeta} = \eta_x \zeta_x + \eta_y \zeta_y$ ,  $\nabla_{\zeta} \cdot \nabla_{\zeta} = \zeta_x \zeta_x + \zeta_y \zeta_y + \zeta_z \zeta_z$  로 나타낸다.  
또한, 자유수면의 계산식은 연속방정식을 수심 적분하여 얻어진다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{h}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\bar{U}}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\bar{V}}{J} \right) = 0 \quad (4)$$

여기에서,  $\bar{U} = \int_{z_0}^h u dz = \xi_x \bar{u} + \xi_y \bar{v}$ ,  $\bar{V} = \int_{z_0}^h v dz = \eta_x \bar{u} + \eta_y \bar{v}$  과 같이 수심에 대한 평균유속을 나타내고 있다.

### 3. 수치기법

수치해석을 위해서 본 연구에서는 2단계로 나누어서 해석하였다. 첫 번째(정수압계산 단계)에서는 수면에 전 시간단계에서 계산된 기저 값을 대입하여  $u$ ,  $v$  를 계산하고 2단계(자유수면 보정단계)에서는 자유수면 및 최종 유속을 구한다. 이를 위해서 본 연구에서는 교호격자망(staggered grid)을 이용하였다. 유속은 각 방향에 따라 격자와 격자의 중간사이에 정의하였으며 자유수면은 각 격자에 정의하였고,  $i$ ,  $j$  와  $k$  는 각각  $\Delta \xi$ ,  $\Delta \eta$  와  $\Delta \zeta$  에 따라 증분되는  $\xi$ -,  $\eta$ -와  $\zeta$ -방향의 계산격자의 위치를 나타낸다.

#### 3.1 정수압 계산단계

일반적으로 3차원 또는 연직 2차원 천수 흐름해석은 수평방향에 대한 연직방향의 상대적으로 길이비가 작으므로 작은 연직방향의 격자증분에 따라 수치해가 불안정해 질 수 있다. 따라서 이 단계에서는 식(2), (3) 을 연직방향의 경사항을 음해적으로 해석하였으며, 이외의 모든 항은 양해적으로 차분하였다. 이송항의 차분식은 Yee(1987)가 제안한 쌍곡선형 방정식을 위한 음해적 차분법을 사용하였다. 이송항 해석시 시간과 공간에 2차 정확도를 제공하는 Lax-Wendroff기법(Lax, Wendroff, 1960)을 이용하였다.  $\zeta$ 방향에 따라 삼중대각행렬을 구성할 수 있으며 Thomas 알고리즘을 이용하면 쉽게 해석할 수 있다. 같은 방법으로  $\eta$ -방향 운동량방정식도 삼중대각행렬을 구성하여 해석할 수 있다.

#### 3.2 자유수면 보정단계

자유수면 보정단계에서는 자유수면의 변화를 계산하고 이 변화량에 따라 아래의 식을 이용하여 유속장을 계산한다(Chen, 2003).

$$\begin{aligned} u_{i+1/2,j,k}^{n+1} &= u_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} - g\Theta\Delta t \left[ \xi_x^n \frac{\partial}{\partial \xi} (\delta h^{n+1}) + \eta_x^n \frac{\partial}{\partial \eta} (\delta h^{n+1}) \right]_{i+1/2,j} \\ v_{i,j+1/2,k}^{n+1} &= v_{i,j+1/2,k}^{n+1/2} - g\Theta\Delta t \left[ \xi_y^n \frac{\partial}{\partial \xi} (\delta h^{n+1}) + \eta_y^n \frac{\partial}{\partial \eta} (\delta h^{n+1}) \right]_{i,j+1/2} \end{aligned} \quad (5)$$

여기에서,  $\delta h^{n+1} = \overline{h^{n+1}} - h^n$  그리고  $\overline{h}$  은 다음 단계에서 수정된 임시의 자유수면 높이이다.

자유수면의 변화를 고려하기 위해서는 자유수면 방정식을 이용할 수 있으며 이 방정식의 차분을 위해 사용한 수치기법은 Casulli와 Cattani(1992)이 소개한  $\Theta$  방법( $0.5 < \Theta$ )을 사용하였다. 시간 증분에 관계없이 자유수면의 전파속도에 따라 발생하는 수치계산의 안정조건을 항상 만족한다.

$$\begin{aligned} \left( \frac{\delta h^{n+1}}{J^n} \right)_{i,j} + \Theta\Delta t \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \left( \frac{U^{n+1}}{J^n} \right)_{i+1/2,j} - \left( \frac{U^{n+1}}{J^n} \right)_{i-1/2,j} \right\} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \left( \frac{V^{n+1}}{J^n} \right)_{i,j+1/2} - \left( \frac{V^{n+1}}{J^n} \right)_{i,j-1/2} \right\} \right] \\ = -(1-\Theta)\Delta t \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \left( \frac{U^n}{J^n} \right)_{i+1/2,j} - \left( \frac{U^n}{J^n} \right)_{i-1/2,j} \right\} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \left( \frac{V^n}{J^n} \right)_{i,j+1/2} - \left( \frac{V^n}{J^n} \right)_{i,j-1/2} \right\} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

자유수면 보정식은 식(5)을 수심에 대해서 적분을 하고 좌표변환 식으로 변환하여 식(6)에 대입하여 얻을 수 있다. 차분화된 자유수면 방정식을 쓰면 식(7) 같은 구중대각행렬(nine-diagonal matrix) 형태가 된다.

$$\beta_1^n \delta h_{i-1,j-1}^{n+1} + \beta_1^n \delta h_{i-1,j}^{n+1} + \beta_1^n \delta h_{i-1,j+1}^{n+1} + \beta_1^n \delta h_{i,j-1}^{n+1} + \beta_1^n \delta h_{i,j}^{n+1} + \beta_1^n \delta h_{i,j+1}^{n+1} + \beta_1^n \delta h_{i+1,j-1}^{n+1} + \beta_1^n \delta h_{i+1,j}^{n+1} + \beta_1^n \delta h_{i+1,j+1}^{n+1} = RHS \text{ of (6)} \quad (7)$$

식(7)의 계산을 위해서는 수치 진동을 제어하기 위한 적절한 경계조건 필요하다. 수위가 경계조건으로 주어지면 식(7)에 직접 적용될 수 있다.  $i=0$ 의 경계가 벽면일 경우,  $U_{-1/2} = -U_{1/2}$ 과 같은 유속을 사용하였다. 이외의 경우에는, 수면의 높이에 대한 Neumann 경계조건을 부여하였다. 자유수면 보정식을 계산하면  $n+1$  시간단계에서 자유수면이 계산되며, 식(5)을 이용하면 최종 유속장을 계산할 수 있다. 연직방향의 유속의 경우, 수평방향 유속을 계산한 후, 중앙차분화된 연속방정식 식(1)에 대입하여 해석할 수 있다.

#### 4. 수치모의

확산항을 제외한 비압축성 Navier-Stokes 방정식을 조석해석 문제에 적용을 하였다. 여기서, 파고  $a$ 는 0.5m, 시간증분은 15분, 주기  $T$ 는 12.4시간을 갖는 정현파(sinusoid wave)를 개방된 수로(open channel)에 사용한다. 격자의 증분은  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ 는 2km,  $\Delta z$ 는 0.5m이고, 길이는 60km, 폭은 30km 또한 수위의 높이는 10m 인 직사각형 수로이다.

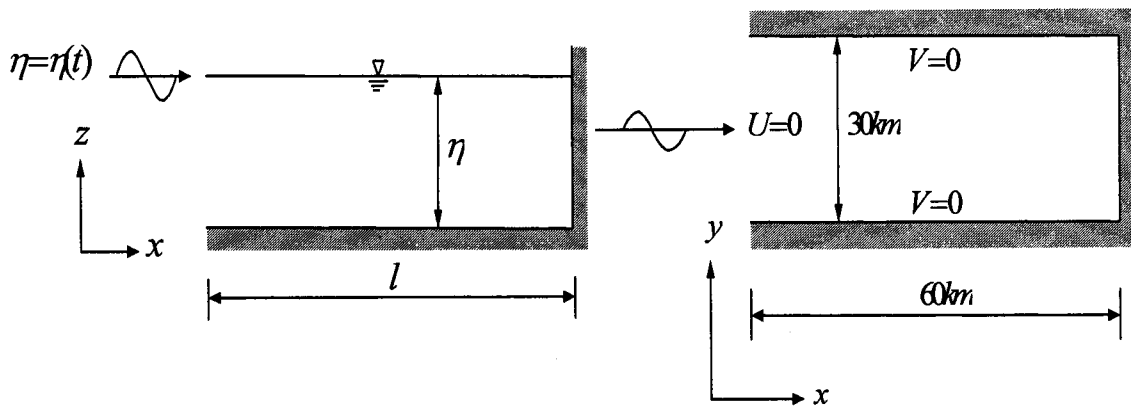


그림 1. 수치계산을 위한 직사각형 수로

연직방향으로 20개의 층을 가지는 총 격자의 수는  $30 \times 15 \times 20 = 9000$ 개로 하였다. 폭 15km에 대한 수위와 유속을 수로의 입구에서부터 11km, 51km를 해석해(Liu, Y., 1998)와 수치해를 각각 비교하여 그림 2과 같이 나타내었다. 11km, 51km에서의 수위와 유속을 비교한 결과 잘 일치함을 보이고 있다.

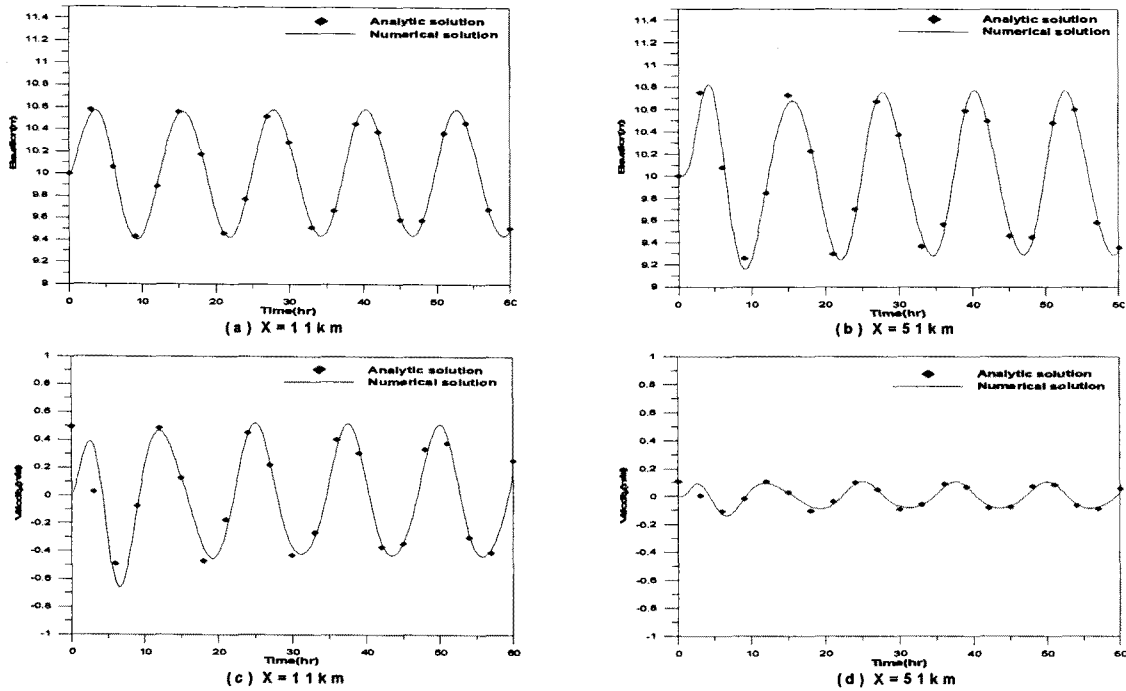


그림 2. 거리(x=11km, 51km)에 따른 수위와 유속의 변화

## 5. 결 론

본 연구에서는 자유수면 변위를 고려한 천수영역에서의 흐름을 자유수면 보정기법을 이용하여 모의하였다. 수치모의는 정수압 계산 및 자유수면 보정 단계로 구성되었으며, 정수압 단계에서는 운동량방정식을 삼중대각행렬로 구성하여 음해적으로 해석하였고, 자유수면 보정단계를 통해 자유수면과 최종 유속장을 계산하였다. 반음해적을 사용하여 계산 시간의 효율성을 도모하였다. 수로에서의 조석의 해석문제에 대하여 모의를 하였다. 조석의 흐름해석에서는 수치모형의 수위와 유속이 거리에 따라서 해석해와 비교한 결과 잘 일치하는 경향을 보였다.

## 감사의 글

본 연구는 소방방재청의 재정적 지원을 받았습니다.

## 참고 문헌

1. Casulli, V. and Cattani, E. (1998). "Stability, accuracy and efficiency of a semi-implicit method for three-dimensional shallow water flow." *Computers and Mathematics with Applications*, 27(4):99 - 112.
2. Casulli, V. and Cheng, R. T. (1992). "Semi-implicit finite difference methods for three dimensional shallow water flow." *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 15:629 - 648.
3. Chen, X. (2003a). "A free-surface correction method for simulating shallow water flows." *Journal of Computational Physics*, 189(2):557 - 578.
4. Dean, R. G. and Dalrymple, R. A. (1991). *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists*, volume 2 of Advanced Series on Ocean Engineering. World Scientific.
5. Liu, Y., (1988). "A Two-Dimensional Finite-Difference Model for Moving Boundary Hydrodynamics Problems", A thesis Presented to the Graduate school, University of Florida.