최소 크기 일괄처리 방식에 대한 연구
Minimum batch cover for order consolidation

민윤홍*, 홍성필*, 김형석*

* 서울대학교 산업공학과 (myh@snu.ac.kr, sphong@snu.ac.kr, geni8085@snu.ac.kr)

초 록
본 논문에서는 서로 다른 주문들의 일부를 일괄적으로 처리할 수 있을 때, 최소 개수의 작업 단위로 모든 주문을 처리하는 문제를 다룬다. 무향그래프와 배치 크기 λ로 표현되는 이 문제의 일반적인 경우는 NP-hard이며, 그래프가 나무와 interval 그래프 일 때 다항 시간 안에 최적해를 찾을 수 있음이 증명되어 있다[1]. 본 논문에서는 LP 완화 기법을 이용한 근사알고리즘과 LP 완화를 통한 최적해의 분석을 제시한다.

키워드: 일괄처리, 근사해법

1. 서 론

다양한 주문들을 처리해야 하는 생산 공정에서 서로 다른 주문들을 일괄적으로 처리하는 배치 생산이 가능할 경우 생산 공정의 효율을 높일 수 있다. 주문 집약 문제는 가능한 적은 수의 배치로 전체 주문을 처리하는 최소화 문제와 주어진 주문을 배치로 처리할 때, 배치 최대 크기만큼 가능한 많은 수의 주문을 처리하는 최대화 문제로 나눌 수 있다.

최th화 문제는, 다음과 같이 무향그래프를 이용하여 표현할 수 있다. 주어진 주문들과 주문량을 마디와 각 마디의 가중치로 표현하고, 서로 다른 두 주문이 서로 배치 처리가 가능할 경우 해당하는 두 마디를 호로 연결한다. 배치는 크게 두 가지 종류로 나눌 수 있다. 배치 크기를 모두 채운 배치와 배치 크기 보다 작은 양을 사용한 배치가 있다. 이때 그래프에서 배치크기 λ 혹은 미만으로, 각 마디의 주문량을 최소 개수의 배치로 만족하게 하는 것이 최소화 문제이다. 최소화 문제의 경우, NP-hard임이 증명되어 있다[1]. 또한, 그래프가 나무 구조 또는 interval 그래프 형태인 경우 다항시간 알고리즘이 존재한다[1].

본 논문에서는 일반적인 그래프에서의 최소 주문 집약 문제에 대해서 LP 완화 기반의 근사알고리즘을 제시한다. 그리고 더 타이트한 분석을 위해서 LP 완화의 최적해와 정수해 사이의 관계에 대한 분석을 제시한다. 2장에서는 LP 기반의 알고리즘이 일반적으로 3-factor 근사가 가능함을 보인다. 그리고 3장에서는 LP 최적해와 정수 최적해 사이의 관계에 대해 분석을 하고 4장에서는 후속 연구에 대한 방향을 제시할 것이다.

2. LP 기반의 근사 알고리즘

먼저 최소 주문 집약 문제의 LP 완화(LP)는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
&\min \sum_{e \in E} z_e \\
&s.t \\
&y_e(u) + y_e(v) \le \lambda z_e, \ \forall e \in E \\
&\sum_{e \in E(v)} y_e(v) = w(v), \ \ \forall v \in E \\
&y_e(u), z_e \ge 0, \ \forall e \in E, \ \forall v \in E
\end{aligned}
$$

본 논문에서 분석할 알고리즘은 다음과 같은 LP 기반의 간단한 알고리즘이다.

알고리즘 1.
step 1. LP 완화의 최적해를 구한다.
step 2. 정수가 아닌 최적해를 올림한다.

(LP)의 최적해의 하한이 $\frac{1}{\lambda}\sum_{v \in V} w_v$이 됨은 쉽게 확인할 수 있다. 이 때, $\sum_{e \in E(v)} y_e(v) = w(v)$를 만족하는 가능해에 대해 $z_e = (y_e(v) + y_e(u))/\lambda$라 하면, (LP)의 하한을 목적값으로 갖는 가능해를 구할 수 있으므로, 이는 (LP)의 최적해가 된다.

(LP)의 최적해를 $y_e^{LP}(v), z_e^{LP}$라 하자. 일반적인 주문 최소 집약 문제의 최적해는 포레스트 그래프로 표현할 수 있다. (LP)의 최적해에서도 이와 유사한 결과를 얻을 수 있다.

Lemma 2.1 (LP) 최적해의 $z_e^{LP} > 0$ 으로 유도된 그래프는 포레스트이다.

정수 최적해에 대한 Lemma 2.1과 같은 결과의 분석은 정수 최적해로 유도된 그래프에서 회로를 제거하는 알고리즘을 제시함으로써 증명할 수 있다. (LP)에 대해서는 BFS(Basic Feasible Solution)의 선형독립성을 이용하여 증명할 수 있다. (LP)의 최적해로 유도된 그래프가 회로를 만드는 경우, 회로에 해당하는 각 변수의 제약식에서의 열벡터들이 선형 독립하지 않다는 것을 보임으로서 증명할 수 있다. 이것은 LP 완화 문제를 심플렉스 알고리즘으로 풀 경우, 포레스트를 유도하는 최적해가 나온다는 것을 의미한다.

Lemma 2.1로부터 다음과 같은 (LP) 최적해 LP와 알고리즘 사이의 관계를 유도할 수 있다.

Lemma 2.2 $ALG \leq OPT_{LP} + (n-1)$
Proof 올림이 수행되는 과정은 현재 불완전 배치에 어떤 용량을 더해 λ 크기의 완전배치로 만드는 과정과 동일하다. 올림은 Lemma 21에 의해 기껏해야 n-1의 호에 대해 수행되고, 이 때 더해지는 용량은 λ보다 작다. 따라서

$$\lambda ALG \leq \lambda OPT_{LP} + \lambda(n-1)$$

■

정수 최적해는 일반적으로 다음과 같은 하한을 가진다.

Lemma 2.3 $\frac{n}{2} \leq OPT$
Proof 아니라고 하자. 그러면 비둘기집 원리에 의하여 n개의 주문을 모두 배치로 만들 수 없다.■

따라서 Lemma 2.2와 2.3에 의해 알고리즘1의 결과와 최적해 사이의 다음과 같은 관계를 얻을 수 있다.

Theorem 2.4 $ALG \leq 3OPT$

3. LP 완화 최적해의 성질

2장에서 구한 알고리즘1의 상한을 끌어내리기 위한 선행 연구로 LP 완화 최적해와 정수 최적해 사이의 관계에 대해 살펴보자.

먼저 LP 최적해와 정수 최적해의 비율은 그림1과 같이 배치 크기에 비례하여 커진다.

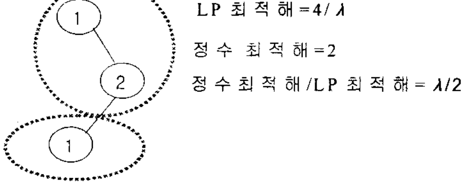

그림1. 정수최적해와 LP 최적해의 비율

즉, (LP)의 최적해의 목적값을 이용한 분석은 배치 크기에 따라 정수 최적해와의 차이가 매우 크게 증가할 수 있으므로 분석에 한계가 있다.

각 정수 최적해는 그에 대응하는 (LP) 최적해가 있다. 즉, (LP) 최적해를 올림할 경우, 정수 최적해를 구할 수 있는 (LP) 최적해가 각 정수 최적해마다 존재한다는 것이다.

Lemma 3.1 각 정수 최적해에 대해 그에 대응하는 (LP) 최적해가 존재한다.
Proof (LP)의 최적해는 $\sum_{v \in V} w(v)/\lambda$를 목적값으로 가진다. 우리 문제의 최적해 $y_e^*(v), z_e^*$가 있을 때, z_e^*값을 $(y_e^*(v) + y_e^*(v))/\lambda$ 로 하면, (LP)의 최적해가 된다.■

최적해 OPT가 n보다 같거나 클 경우에는 Lemma 2.2는 알고리즘1의 상한을 2OPT로 끌어내릴 수 있다. OPT가 n-1보다 같거나 작은 경우를 생각해보자.

Lemma 3.1에 의해 정수 최적해를 (LP) 최적해로 변환시킨다. 이 때, 최적해로 유도되는 그래프는 포레스트이다. 이 포레스트의 호의 집합을 두 개로 나누어보자.
E1={ 올림하여 하나의 배치를 만드는 호}
E2={ 올림하여 둘 이상의 배치를 만드는 호}

이 때 우리는 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.
- $|E1| + 2|E2| \leq OPT$ (배치의 개수로 인한 하한)
- $|E1| + |E2| \leq OPT$ (호의 개수로 인한 하한)

4. 결 론

최소크기 주문집약 문제는 NP-hard에 속할 뿐만 아니라 Max-SNP-hard에 속하는 문제로 PTAS가 존재하지 않는 어려운 문제이다. 본 논문에서는 LP-완화 문제의 결과를 올림 할 경우 factor-3 근사가 가능함을 보였다. 그리고 LP 완화 최적해와 정수 최적해 사이의 다양한 관계를 보였다. 추후 연구 방향으로는 LP-완화 방법에 서브루틴을 추가하여 상한을 끌어내리거나, LP 완화 최적해와 정수 최적해 사이의 더 의미있는 관계에 대한 발견을 통해 LP-완화 방법의 상한을 끌어내리는 것등이 있을 수 있다.

참 고 문 헌

[1] Kangbok Lee, S.Y. Chang and Y.S. Hong, "Continuous slab caster scheduling and interval graphs," Production Planning & Control vol.15, pp. 495-501, 2004.

[2] Vijay V. Vazirani, Approximation Algorithms, Springer, 2003.

[3] M.R. Garey and D.S. Johnson, Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness, Freeman: San Francisco, CA, 1979.