韓國數學敎育學會
<全國數學敎育硏究大會 프로시딩>
제 39회. 2007. 10. 33-48

Korea Soc. Math. Ed.
Proceedings of National Meeting of Math. Ed.
The 39th. Oct. 2007. 33-48

# Branford의 역사 · 발생적 기하 교육을 활용한 증명의 의미지도
## - 피타고라스 정리를 중심으로 -

이 보 배 (순천대 교육대학원)
송 영 무 (순천대학교)

## Ⅰ. 서 론

### 1. 연구의 필요성 및 목적

증명은 고대 그리스 시대 이래로 수학의 핵심적인 부분으로서 학교 수학에서도 중심적인 위치를 차지해왔다. 19세기까지의 중등학교 수학교육은 대체로 Euclid 《원론》을 교과서로 하여 논증기하를 지도하였다. Euclid《원론》은 고대 그리스의 교육에서 가설 연역적 종합법의 입문서로, 수학적 진리가 영원하며 경험과 무관함을 설명해 주는 지도서로, 수학적 진리를 통해 이상향을 이해시키는 수단으로 이용되었고(Steiner) 근대 이후 대학의 기초 교양 교육의 교재로, 18, 19세기에는 중등학교 기하 교재로 사용되었다.(Cajori) 이와 같이, Euclid《원론》은 고대 그리스 이래 수학의 원형으로 여겨져 왔으며, 이에 기반을 둔 전통적인 수학교육은 과거 2000여 년 동안 학교수학의 주요 내용과 방법으로 뿌리 깊은 전통을 유지해 왔으며 오늘 날에도 중학교 논증기하의 내용적 근원이 되고 있다.(권석일, 2006, 재인용)

또한, 전미수학교사 협의회(NCTM)는 「학교수학의 원리와 규준」(NCTM, 2000)에서 모든 학생들을 위한 주요한 수학적 소양의 하나로 수학적 추론과 증명 능력을 들고 있다. 또, 학교수학의 모든 분야에서 수학을 이해하는 부분으로 추론하고, 증명을 인식하도록 요구하고 있다.

증명은 정당화, 발견, 확신과 이해, 조직화, 분석과 종합 등의 여러 측면이 서로 밀접하게 관련되어 있는 복합적인 것이다. 그런데 증명의 복합적 측면이 학교 수학에도 적절히 반영되어야 함에도 불구하고, 대부분 학습자에게 수학적 발견의 맨 마지막 산물인 연역적 논리 체계를 제시함으로써 수학적 발견 과정을 경험시키지 못하고 있다. 교사들은 학생들의 증명 이해를 돕기 위하여 나름대로의 지도 방안을 고안하지만, 학습자가 증명의 필요성을 인식하지 못하고 증명을 수행할 만한 논리적 성숙도를 갖추지 못하여 증명에 필요한 수학적인 생각을 하기보다 교사가 제시하는 증명절차를 따르게 되고, 증명이 끝난 후에도 증명의 의미를 이해하지 못하게 된다. (권석일, 2006)

이와 관련하여, 증명의 구성요소에 관하여 분석하고 조사를 통하여 증명 학습에서 학생들이 어려움을 겪게 되는 원인을 살펴보고, 어려움으로 인해 나타나는 오류 유형에 관한 연구들이 이루어 져

왔다. 또한, 중학생들의 증명에 대한 관심과 흥미를 유발시키고 중학생들이 수학에 대한 긍정적인 태도를 갖도록 하기위한 효과적인 증명 지도 방법에 대하여 다양한 방법들을 소개하고, 증명 지도 개선 방향을 제시하고 있다. (서동엽, 1992; 류성림, 1993; 박지연, 1999; 윤미영, 2005; 서지현, 2005) 그리고, 학생들의 증명의 본질에 대한 이해나 증명 능력은 매우 낮은 수준으로 학생들은 증명의 의미와 필요성을 인식하지 못하고 기본적인 명제의 증명조차 잘 하지 못하며 증명의 가치를 인식하지 못하고 있음이 보고되고 있다.(우정호, 1994; 서동엽, 1999) 이러한 문제의식을 바탕으로 권석일(2006)은 기하학의 역사적 발생 과정을 Euclid 《원론》의 성립과정에 초점을 맞추어 살펴보고, 역사적 발생과정에 따른 증명의 본질 지도를 위한 Branford의 3단계 이론을 고찰하였다. 또, 중학교 1학년 과정을 마친 학생들을 대상으로 그러한 방법이 학생들의 증명의 의미 인식의 전환을 가져오게 하여, 이론적 수준의 증명의 의미를 이해하는데 도움을 줄 수 있다는 것을 보였다.

하지만 현재 중학교 1학년 수학교과서에서는 증명 문제에 '증명'이라는 단어 대신 '설명하여라.'를 사용하고 있다. 그로인해 '증명'이라는 단어를 접하지 않은 중학교 1학년 학생과 중학교 3학년 학생들에게 증명의 의미에 대한 인식이 다를 것이라고 생각한다.

따라서 본 연구에서는 역사적 발생 과정에 따른 증명의 본질 지도를 위한 Branford의 3단계 이론을 활용하여 중학교 3학년 학생들에게 증명을 지도하였을 때, 그 방법이 학생들이 증명의 본질을 이해하는데 도움을 줄 수 있는지를 알아보고자 한다.

# Ⅱ. 이론적 배경

## 1. Branford의 역사-발생적 수학교육론

19세기까지의 중등학교 수학교육은 대체로 Euclid 《원론》을 교과서로 하여 논증기하를 지도하였다. Euclid 《원론》은 그리스시대 이래 진리에 대한 '영혼'의 눈을 뜨게 하는 도야재로서, 추론에 엄밀성과 우아함과 힘을 부여하는 가설-연역적 방법의 지도를 위한 교재로 인식되었다. 하지만 18세기에는 '원론' 교육 및 수학교육 일반에 변화가 일어났었다. 전통적인 Euclid 《원론》 교육을 고수하려는 시도와 개혁하려는 시도가 공존하는 가운데, 유럽의 국가들 사이에서 그 양상이 서로 다르게 나타났다. Euclid의 연역적인 방법에 대항하여 분석적, 발생적 원리가 수학교육 원리로 등장한 것은 16세기까지 거슬러 올라가지만 수학 발달사를 근거로 하여 학습 내용과 활동을 조직하는 역사-발생적 원리를 최초로 구현한 교재는 Clairaut의 《기하학 원론》이다. 새로운 차원에서 '원론'을 재구성하여 Euclid 《원론》 중심의 전통적인 기하교육의 대안을 제시하고자 하였다. 18세기의 실학주의 교육 사조와 결합되어 탄생된 Clairaut의 《기하학 원론》은 기하학을 조직하는 방법에 있어 정의, 공리, 공준을 제1원리로 삼은 Euclid 《원론》과는 다른 구성 원리를 지향하고 있다.

Branford는 역사적으로 기하학은 바빌로니아와 이집트의 경험적 기하가 그리스 시대로 이어지면

서 직관적인 기하단계를 거쳐 과학적인 기하학으로 발전되어 왔으며, 그러한 기하학의 역사적 발생 과정과 맥을 같이 하여 증명 또한 실험적 증명, 직관적 증명, 수학적 증명의 세 단계를 거쳐 발전되었다고보고 있다. (우정호, 민세영, 박미애, 2003)

첫 번째 실험적 단계는 특수한 사실만을 입증할 수 있지만 완전히 또는 절대적으로 보편적인 사실을 제안할 수 있는 것은 아니며, 주로 사용하는 정신활동은 감각-지각이다. 전 과정이 구체적인 단위로 측정하는, 즉 실험하는 것이며, 근사적으로 특정한 사실만을 보여줄 수 있는 것으로, 고대 이집트 수학의 특징이라 할 수 있다.

두 번째 단계인 직관적 단계는 일반적 혹은 보편적인 사실을 입증할 수 있고 증명의 과학적인 이상을 제시할 수 있으나 필요할 때마다 감각적 경험에 의존하는 단계이다. 실험적 증명은 많은 예를 통하여 증명하지만 아무리 많은 예가 주어진다고 해서 일반성이 수립될 수 없다. 반면에 직관적 증명에서는 창조력이 그 고유의 증명 방법으로 작용하기에 직관을 형성하기에 충분하다는 점에서 실험적 증명과 다르다. 직관적 증명에서 사용되는 정신적 활동은 감각-지각과 개념을 똑같이 조합한 것이다. 이것은 고대 수학의 특징이며 초기의 인도와 그리스 수학의 많은 부분의 특징이다.

세 번째 단계인 학문적 단계는 이미 발견한 일반적인 사실을 상호적으로 연결하는 체계화를 의미한다. 완전한 학문적 증명은 새로운 감각-인식적 정리와 공리는 하나도 쓰지 않는다. 그러나 그 모든 것들을 가정된 기초로 시작할 때 놓고, 순수하게 논리적인 추론만을 사용한다. 우세한 정신 활동은 추상적인 개념이다. 그것은 후기 그리스 수학의 많은 부분과 현대 유럽 수학의대부분의 특징이다.(우정호, 민세영, 박미애, 2003, 재인용)

## 2. 기하학의 역사적 발달 순서에 따른 논증기하 지도

학교수학에서 논증기하 지도의 핵심이 증명이다. Fawcett는 연역적 증명의 본질을 이해했다는 것을, 결론을 증명함에 있어서 무정의 개념의 위치와 중요성, 명확하게 정의된 용어의 필요성과 그 용어가 결론에 미치는 영향, 가정의 필요성, 가정에 의하여 함의되지 않는 어떠한 것도 증명될 수 없다는 것을 이해한 것으로 보고 있다.(권석일, 2006, 재인용)

한편, Branford는 증명을 일반성이 확보된 명제가 상호 연결되는 체계화를 의미하는 것으로 보고 있다. 아동이 증명을 학습함에 있어 수학적 개념의 정의, 기본적인 성질, 함의 관계, 일반성이 확보된 명제 사이의 상호 관련성을 초보적인 수준에서나마 이해하도록 하는 것은 교육적으로 매우 중요하다.

그러나 오늘날에 이르기까지 증명의 의미 지도에 있어서 많은 문제점이, 특히 증명이 처음 도입되는 중등학교 기하 단원의 학습과 관련하여, 여러 선행연구에서 지적되고 있다.(우정호, 1994; 서동엽, 1999; 박혜숙, 2003). 학생들의 증명의 본질에 대한 이해나 증명 능력은 매우 낮은 수준으로 학생들은 증명의 의미와 필요성을 인식하지 못하고 기본적인 명제의 증명조차 잘 하지 못하며 증명의 가

치를 인식하지 못하고 있음이 보고되고 있다. 특히 증명 학습에서 자신들이 하고 있는 학습활동이 어떠한 의미를 가지는지 전혀 파악하지 못하는 경우가 대부분이라는 점이 심각한 문제점이다.

서동엽(1999)에 따르면, 증명을 학습한 많은 학생들이 몇 가지 예에 대한 실험이나 측정을 통하여 결과를 확인하는 것을 정당화의 수단으로 받아들이고 있으며 논리적인 증명보다 이를 더 선호하는 경향을 보이고 있다.

Branford는 역사적으로 기하학은 바빌로니아와 이집트의 경험적 기하가 그리스 시대로 이어지면서 직관적인 기하단계를 거쳐 과학적인 기하학으로 발전되어 왔으며, 그러한 기하학의 역사적 발생과정과 맥을 같이 하여 증명 또한 실험적 증명, 직관적 증명, 수학적 증명의 세 단계를 거쳐 발전되었다고 보고 있다. (우정호, 민세영, 박미애, 2003)

## Ⅲ. 연구방법 및 절차

### 1. 연구대상

연구 참여자는 본 연구자와 자주 만날 수 있고, 기본적인 증명능력을 가지고, 증명에 대한 나름의 생각을 가지고 있어야 한다고 판단되어, 연구자가 거주하고 있는 근처 중학교의 한 학급을 대상으로 사전 설문조사를 하였다. 설문 조사 결과를 바탕으로 2명의 학생을 선정하였다.

2007년 5월 19일에 설문 조사 결과를 바탕으로 선정한 2명의 학생(영재, 지훈 : 가명)을 대상으로 연구 목적 및 방법들을 상세하게 설명하고 연구과정에 참여할 의사가 있는지를 물었을 때, 흥미 있어 하며, 흔쾌히 허락해 주었으며 그들의 부모님께 연구 참여에 관한 동의를 구하였다.

연구 대상자로 선발된 2명의 학생 중 한명은 학급에서 상위권이고 다른 학생은 중상위권이다.

영재는 아버지가 고등학교 국어선생님이시고, 어머니는 교원단체에서 적극적으로 활동하신다. 어린 시절에 말을 심하게 더듬어서 학교 입학을 다른 친구들 보다 1년 늦게 하였다. 지금은 심하진 않지만 말을 더듬는 버릇이 조금 남아있다. 중 1때는 같은 반 학생들에게 따돌림을 당한 경험이 있다. 하지만, 그 때 당시에 자신을 도와주었던 친구를 생각하면서 좋은 기억만 가지려고 노력한다고 말을 했다. 지금은 반 학생들과도 잘 어울린다. 전체 평균 성적은 우수하지만 수학은 자신의 전체 평균보다 낮은 점수를 가지고 있었다. 그 이유는 충분히 해결할 수 있는 문제들이지만, 문제를 해결하는데 시간이 오래 걸려서 모든 문제를 해결하기에는 시간이 부족하기 때문이라고 한다. 문제를 해결하는 과정에서 잘 해결이 되지 않으면 다음 문제로 넘어가지를 않는다. 과학을 가장 좋아하는데 그 중에서도 동물에 관심이 많았다. 장래희망이 동물학자라고 하였다. 자신의 관심이 있는 분야에서는 책도 많이 읽고 기억을 잘 하고 있었다. 역사에도 관심이 많아서 수학자들 이야기를 많이 물어보았고 듣는 것, 말하는 것도 좋아하였다. 대화를 나눌 때마다 자신의 주관이 뚜렷한 학생이라는 것을 느꼈다. 어떤 것에 대한 규칙을 찾아서 빠른 시간에 쉽게 해결하는 방법에 대해 자주 물어 보았다.

지훈이는 아버지와 어머니가 채소가게를 하셔서 새벽에 나가시고 밤늦게 집에 들어오신다. 한 살 터울의 여동생과 초등학생 남동생이 있다. 그래서인지 다정다감한 모습을 자주 볼 수 있었다. 종교 활동을 열심히 하면서 그와 관련된 이야기를 자주 하였다. 영재와는 초등학교 시절 친구였다. 학급 내에서 중상위권에 속한다. 특별히 좋아하는 과목은 없었고, 싫어하는 과목은 체육이었다. 수학에도 관심이 많은 것은 아니었다. 장래희망이 건축설계사인데, 건축이 이과계열이라 수학을 잘해야 한다는 생각을 가지고 있었다. 그래서 수학 전문 학원에 다니고 있었다. 학급 내에서는 친구들과의 사이가 좋고, 다른 학생들이 하기 싫어하는 일도 나서서 잘 하는 학생이다. 선행상도 받았다고 한다.

## 2. 자료수집 및 절차

본 연구에 적절한 학생을 선정하기 위하여 한 학급의 36명의 학생들을 대상으로 증명의 의미에 대한 인식을 조사하였고, 기본적인 증명 능력 테스트를 두 번 실시하였다.

### 가. 사전조사 설문지

증명의 의미에 대한 설문지(부록1)의 문항을 통하여 학생들이 수학 및 증명에 대해 가지고 있는 인식을 조사함으로써 현재 중학교 수학의 증명 지도가 어떻게 이루어지고 있으며 학생들이 증명을 어떻게 생각하고 있는지를 파악하고자 하였다. 그리고 증명 능력 테스트를 통하여 학생들의 기본적인 증명 능력을 알아보고자 하였다.

수학과목에 대한 인식과 증명에 대한 인식조사를 위하여 이수정(2003)의 「올바른 증명의 의해와 증명지도에 관한 연구」를 참고하였고, 지도교수님과 수학교육 전문가의 자문을 통하여 구성하였다.

문항의 구성 범위는 '피타고라스 정리'를 학습하지 않은 중학교 3학년 학생들을 대상으로 하기위하여 도형 부분에 대한 중학교 2학년 과정으로 하였다. 설문 문항은 기초 자료 조사 4문항, 인식도 조사 문항 9문항, 1차 증명 능력 테스트 6문항, 2차 증명 능력 테스트 7문항으로 구성하였다. 1차 증명 능력 테스트 문항은 괄호 채우기 2문항, 가정과 결론으로 나누기 1문항, 증명 과정 서술하기 3문항으로 구성하였다. 2차 증명 능력 테스트 문항은 객관식 1문항, 보기에서 골라 써넣기 2문항, 괄호 채우기 3문항, 증명 과정 서술하기 1문항으로 하였다. 설문 대상은 전라남도에 소재하는 S중학교 3학년 한 학급 36명을 대상으로 조사하였다.

위 같은 구성으로 이루어진 설문지를 S 중학교 아침 자율학습시간에 이루어졌다.

(1) 1차 검사 일자 : 2007년 3월 17일 오전 8시 20분 ~ 8시 50분

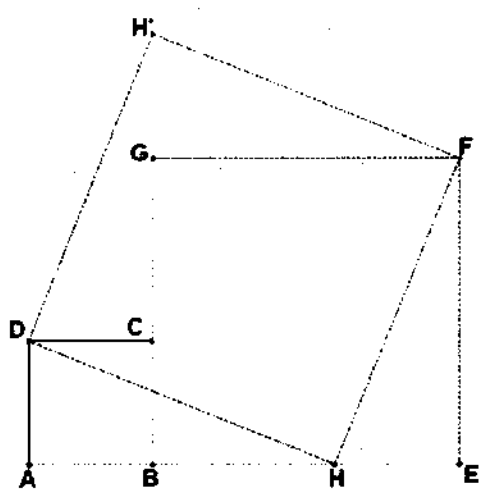
(2) 2차 검사 일자 : 2007년 4월 7일 오전 8시 20분 ~ 8시 40분

### 나. 역사-발생적 전개를 따른 '피타고라스 정리' 증명 지도

'피타고라스 정리'의 증명을 지도하기 이전에 삼각형의 결정 조건에 대하여 알아본다. '세 변은 삼

각형을 결정하는데 충분할까?' 라는 질문을 한다. 학생들은 먼저 삼각형을 그리고, 변의 길이를 측정하고, 그 다음에는 변의 길이를 먼저 정하고, 삼각형을 그려보는 활동을 한다. 이러한 활동으로 삼각형의 결정 조건을 발견하도록 한다. 또, 여러 가지 삼각형의 세 변 사이의 관계를 그려둔 삼각형을 활용하여 변의 길이를 측정하고, 조작하여 세 변 사이의 관계를 발견하도록 한다. 특히, 직각삼각형에서의 세변 사이의 관계를 알아본다.

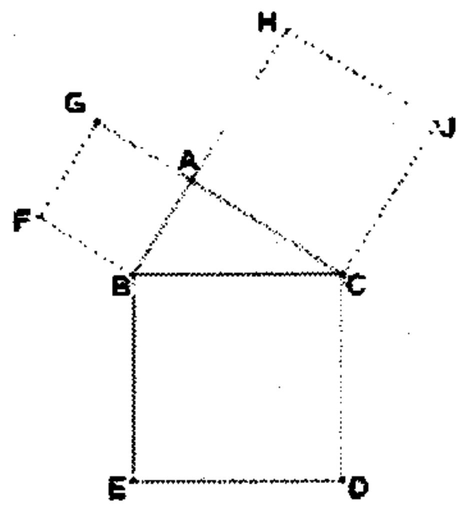
경험적인 확인 단계에서는 직각삼각형에서 $a^2 = b^2 + c^2$의 결과를 얻은 학생에게 '다른 사람에게 직각삼각형에서 세 변 사이의 관계가 $a^2 = b^2 + c^2$인 사실을 보여주려면 어떻게 하면 될까?' 라는 질문을 한다. 이 질문을 통해서 학생들이 경험적인 확인에 대하여 어떻게 인식하고 있는지 알아보고자 한다.




직관적 증명 단계에서는 두 정사각형의 합과 같은 정사각형을 만들어 보는 활동을 한다.

두꺼운 종이를 이용하여 두 정사각형의 넓이의 합과 같은 정사각형을 만드는 과정을 보여준다.

연역적 증명 단계에서는 직관적 증명 단계에서 아래 그림을 유추한다. 이 그림에서 작은 두 정사각형의 넓이가 큰 정사각형의 넓이가 같다는 사실을 증명한다. 이 단계에서는 기호를 사용하고, 그동안 학습한 수학적 내용을 활용하여 증명을 한다.




다. 심층 면담

역사-발생적 전개로 '피타고라스 정리'의 증명을 지도 한 후 학생들의 반응과 인식의 변화를 살펴보고자 한다.

# Ⅳ. 연구 결과 및 논의

## 1. 중학생들이 생각하는 증명의 의미

사전조사 설문에서 학생들의 기본적인 증명 능력이 어느 정도인지 증명에 대해서는 어떻게 생각하고 있는지 살펴보고자 하였다.

첫 번째 증명 능력 테스트(부록1)는 가정과 결론으로 나누기, 증명 과정의 빈칸 채우기 문항이 2문제 있고, 5문제가 증명과정을 서술하는 문제이다. 영재는 가정과 결론으로 나누는 문제와 증명 과정의 빈칸 채우기 문제는 모두 해결하였으나, 증명과정을 서술하는 문제는 5문제 중 1문제만 서술하였다. 지훈이는 증명 과정의 빈칸 채우기 문제는 모두 해결하였으나, 증명 과정 서술문제는 1문제만 해결하였다.

증명 과정의 빈칸 채우는 문제는 학교의 시험에서 주로 나오는 유형이어서 학생들이 쉽게 해결하였지만, 증명 과정을 모두 서술하는 문제는 교과서에 있는 문제들이지만, 학생들이 직접 증명을 해본 경험이 없어서 전혀 해결하지 못하였다.

두 번째 증명 능력 테스트(부록2)에서는 증명 과정의 빈칸 채우기 문항이 6문제, 증명 과정을 서술하는 문항이 1문제 이다. 영재는 7문제를 모두 해결하였으며, 지훈이는 증명 과정을 서술하는 문제를 해결하지 못하였다.

두 번의 증명 능력 테스트를 살펴보면, 영재는 증명 과정이 나와 있고 그 과정을 보면서 유추하여 빈칸을 채우는 문제는 모두 해결하였으며, 증명 과정이 간단한 명제의 증명은 스스로 해결할 수 있었다. 지훈이도 전체 증명 과정이 주어졌을 때, 유추하여 빈칸 채우는 문제는 잘 해결하지만, 증명 과정을 스스로 해결하는 문제는 어려워하였다.

증명의 의미에 대한 인식 조사 설문에서는 두 학생 모두 증명이 어렵다고 답하였다. 영재는 도형의 성질을 증명할 때 증명과정이 필요할 수도 하지 않을 수도 있다고 하였고, 지훈이는 필요하다고 답을 하였지만 반드시 필요한 것은 아니라고 하였다. 증명의 필요성에 대해서 영재는 증명이 필요하지 않을 때가 있다고 답을 하였고, 지훈이는 증명이 어렵기는 하지만 증명과정이 있어야지만 이해가 더 쉽다고 하였다.

영재는 명제가 참임을 증명하는 방법이 유일하지 않다고 답을 하였다. 그 이유는 누구나 다 알고 있는 명제의 참은 증명할 필요가 없다고 생각한다고 답하였다. 지훈이는 증명하는 방법이 유일하다고 답을 하였고 그 이유는 자신이 배운 방법이 유일하기 때문이라고 답하였다.

'삼각형의 세 내각의 합은 180°이다.' 라는 명제가 참임을 증명한 방법 중 올바르다고 생각하는 증명 방법을 중복가능하게 선택하라는 문항에는 두 학생 모두 교과서에 나오는 증명방법을 택하였다.

설문 결과를 종합하여 보면 영재는 간단한 증명 문제는 스스로 해결 할 수 있지만, 증명의 필요성에 대해서는 모든 사람이 알고 있는 명제는 참임을 증명할 필요가 없다고 한 것으로 보아 증명의 필요성에 대해 인식하지 못하고 있는 것 같다. 지훈이는 학교 시험에 자주 등장하는 유형의 문제는 해결가능 하였고, 이미 주어져있는 증명과정은 이해를 하지만, 스스로 해결하지는 못한다. 또한 증명의 필요성은 인식하지만, 학교에서 배운 증명 방법이 유일한 증명방법이라고 생각하고 있었다.

다음은 심층면담 과정에서 증명에 대한 생각을 알아 본 내용이다.

> 교사 : 증명의 의미가 뭐라고 생각해?
> 지훈 : 문제가 어떻게 성립되는지를 설명하는 것
> 교사 : 영재는?
> 영재 : 어떤 공식이 참인가를 밝혀내는 근거. 아니면 어떤 사실이 참인가를 밝혀내는 근거라든가.

'문제가 어떻게 성립되는지'와 '공식이 참인가' 라는 말에서 나타나듯이 학생들이 증명 또한 문제해결 중의 하나라고 생각한다. 영재는 증명의 의미를 '어떠한 사실이 참인가를 밝혀내는 근거'라고 생각하는 것으로 보아 증명의 의미를 논리주의로 이해하고 있다.

고사 : 증명이 필요하다고 하였는데, 왜 필요할까요?
영재 : 당연히요. 어떨 때는 증명이 필요할 때가 있지요. 특히요. 어려운 것은요. 어떤 사람이든 공식을 구해내잖아요. 그러면 그 공식이 참인지 거짓인지 알 수가 없잖아요. 그럴 때 있으려 그 증명이 필요한 거 아니예요?
지훈 : 저는....어...증명이....말 할려고 했는데...ㅎㅎㅎ 까먹었어요. 답이 그렇게.. 증명이...의미대로...된..되는지 검산 같은 걸로 검산해 보는 것.

위 대화 내용에서도 영재는 '공식'이라는 단어를 많이 사용하였다. '어려운 것'이라는 말에서 영재는 쉬운 명제에 대해서는 증명을 하지 않아도 된다는 생각을 가지고 있는 듯 보인다. 지훈이는 연구자의 질문에 '까먹었어요.'라는 말을 했다. 학원을 다니고 있는 지훈이는 학원 선생님에게서 증명의 의미에 대하여 들었다고 하였다. 자신의 나름의 방법으로 생각하여 '검산'이라는 단어를 사용하였는데, 이도 마찬가지로 증명을 문제 해결 과정의 하나라고 생각한다고 볼 수 있다.

## 2. 경험적 확인과 연역적 증명에 대한 학생들의 인식

심층면담 과정에서 학생들이 경험적 확인을 어떻게 생각하는지 먼저 살펴보고자 한다.

고사 : 3000개의 이등변삼각형의 밑각의 크기를 측정을 해서 보여주었다면 이등변삼각형의 두 밑각이 같다는 것을 증명했다고 생각합니까?
지훈 : 어떤 사람이 보고 있으면 그건 증명한거 같애요. (중략) 실제로 해보는 것을 보면은 그 사람도 보면서 그게 밑각이 같다는 것을 알게 되잖아요. 근데 혼자서 실험했고 발표하려고 하면은 적어진게 있어야 하잖아요. 그럴 때는 우리가 배우는 증명 그런게 필요할 것 같아요.
영재 : 제 경우에는요. 아니요. 아무리 그래 봤자요. 아무소용이 없다. 게다가요. 3000개를 모두 했다고 해도요. 수학이라는게 가능성이 있는게 0.000001%라도 정답일 가능성이 있어요.

이등변삼각형의 밑각의 크기를 측정한 것이 이등변삼각형의 두 밑각이 같다는 것을 증명했다고 생각하느냐는 질문에 지훈이는 '예'라고 답을 하였고, 영재는 '아니요'라고 하였다. 지훈이는 경험적인 확인도 증명이 될 수 있다고 생각하였다. 하지만 연역적 증명 또한 필요하다고 하였다. 영재는 경험적 확인은 또 다른 가능성이 분명 존재하기 때문에 증명이라고 할 수 없다고 하였다. 지훈이에게 '3000개 말고 또 다른 누군가가 이등변삼각형을 가지고 왔을 때는 어떻게 해야 할까?'라는 질문을 하였다.

지훈 : 갖고 오니까 이것도 밑각이 같냐고 물어보면, 딱 누가 보니까 측정을 할 수 있잖아요. 그 때는. 근데 계속 측정하기는 힘들 수도 있으니까...(중략) 안그래도 힘든데. 그냥 그걸 정의를 내려서, 딱 적어가지고, 거기에 맞는지, 대입 해가지고 풀어보면.

그 때도 역시 경험적으로 확인 시켜주면 된다고는 하였지만, 그런 상황이 계속 될 경우에는 반복해서 확인 시켜주는 것이 힘들다는 것을 알고, 연역적 증명이 필요하다는 것을 인식하였다.

경험적 확인 단계에서 직각삼각형을 그리고 변의 길이를 재어서 세 변사이의 관계를 살펴보았다. 그 결과 가장 긴 변을 제곱 한 것과 나머지 두 변을 제곱하여 합한 값이 비슷하게는 나왔지만 정확히 같게는 나오지 않았다. 그 이유는 자로 측정할 수 있는 단위가 mm까지 이기 때문에 소수점 자리

가 정확하지 않았기 때문이다. 학생들은 '도구가 마땅치 않아서', '소수점 때문에'라는 말과 함께 '측정을 한 결과가 증명이라고 하기 힘들 것 같다.'라고 하였다.

# 참 고 문 헌


권석일 (2006). 중학교 기하 교재의 '원론' 교육적 고찰. 서울대학교 대학원 박사학위 논문

김남희·나귀수·박경미·이경화·정영옥·홍진곤 (2006). 수학교육과정과 교재연구. 경문사

나귀수 (1998), 증명의 본질과 지도 실제의 분석 - 중학교 기하 단원을 중심으로. 서울대학교 대학원 박사학위논문

류성림 (1993). 중학생의 기하 증명 능력과 오류에 대한 연구.한국교원대 석사학위논문

박지연 (1999). 중학생들의 증명과정에 대한 연구. 이화여대 석사학위논문

박혜숙 (2003). 교사 양성기관에서의 기하교육. 한국수학교육학회지 수학교육논문집 **15**

서동엽 (1992). 증명 지도에 관한 연구. 서울대학교 석사학위논문

서동엽 (1999). 증명의 구성 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색. 서울대학교 박사학위논문

서지현 (2005). 기하 증명 학습에서 중학생들이 겪는 어려움에 관하여. 건국대 석사학위논문

우정호 (1994). 증명지도의 재음미. 대한 수학교육학회 논문집 **4(1)**

우정호·박미애·권석일 (2003). 역사발생적 수학교육 원리에 대한 연구(1) - 증명의 의미 지 도의 역사발생적 전개. 대한수학교육학회지 학교수학 **5(4)**

우정호·민세영·박미애 (2003). 역사발생적 수학교육원리에 대한 연구 : Branford를 중심으로. 대한수학교육학회 2002년도 동계수학교육학 연구발표대회 논문집

윤미영 (2005). 중학교 수학의 증명지도에 관한 연구. 대구카톨릭대 석사학위논문

이수정 (2003). 올바른 증명의 이해와 증명지도에 관한 연구. 성신여대교육대학원석사학위논문

장혜원 (2006). 끌레로의 기하학 원론. 경문사

조완영·권성룡 (2001). 학교 수학에서의 '증명'. 대한수학교육학회지 수학교육학연구 **11(2)**

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: The Author

# (부록 1) 증명의 의미에 대한 학생의 인식 조사 설문지

| |
|---|
| 안녕하십니까?<br>본 조사는 여러분이 수학 교과에 대해 어떠한 생각을 가지고 있는지를 파악하고 특히, 기하의 증명부분의 이해정도를 파악하기 위한 연구 자료를 얻기 위함입니다.<br>본 자료는 순수 연구의 목적에만 쓰이므로 개인의 결과는 절대로 공개되지 않습니다. 질문지의 내용을 잘 읽으시고 솔직하게 답해 주시면 감사하겠습니다. |

<학생 기초 자료 조사>

1. 성명____________ 2. 성별________ 3. 학년________

4. 연락처 & E-mail ________________________

5. 수학학습에 대한 본인의 관심은 어느 정도 입니까?
   ① 매우 관심이 많다 ② 관심이 있다 ③ 보통이다
   ④ 관심이 없다 ⑤ 전혀 관심이 없다

6. 수학의 여러 영역 중 본인이 약하다고 생각하는 영역을 순서대로 나열하시오.
   ① 수와 연산 ② 측정 ③ 문자와 식
   ④ 규칙성과 함수 ⑤ 확률과 통계 ⑥ 도형

| |
|---|
| (예시문항)<br>① 수와 연산 : 순환소수를 분수로 나타내어라.<br>② 측정 : 근사값을 계산하여라.<br>③ 문자와 식 : $2x+3y=6$을 $x$에 대하여 풀어라.<br>④ 규칙성과 함수 : 일차함수 $y=2x+4$의 $x$절편과 $y$절편을 각각 구하여라.<br>⑤ 확률과 통계 : 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 눈의 수의 합이 10일 확률은?<br>⑥ 도형 : 삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점에서 만남을 증명하여라. |

7. 정규 수학 수업시간을 제외하고 하루에 얼마만큼의 수학을 공부하나요?______시간

8. 정규 수학 수업 시간 외의 수학 학습 형태는 무엇입니까?
   ① 개인 과외 ② 학원 ③ 자율학습 ④ 기타

9. 평소 본인의 수학 공부 습관은 어떤가요?
   ① 혼자서 조용히 공부하면 집중이 잘 된다.
   ② 친구들과 그룹을 만들어 할 때가 혼자 할 때 보다 효율적이다.
   ③ 혼자서 할 때나 그룹으로 할 때나 차이가 별로 없다.

<증명의 의미에 대한 학생의 인식 조사>

1. 증명이 어렵다고 생각합니까?
   ① 매우 그렇다 ② 그렇다 ③ 보통이다
   ④ 그렇지 않다 ⑤ 전혀 그렇지 않다

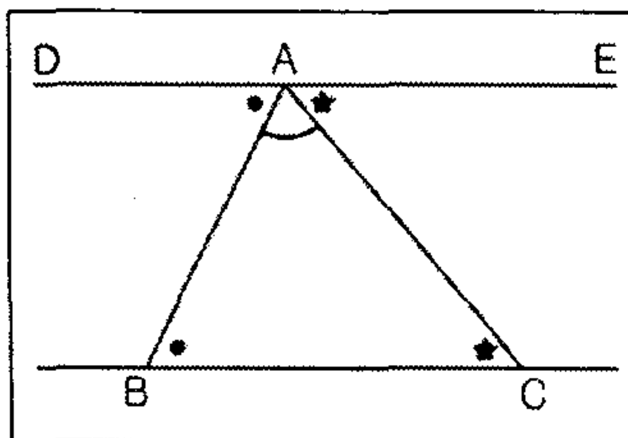
2. 도형의 성질들을 증명할 때 증명과정이 필요하다고 생각합니까?
   ① 매우 그렇다 ② 그렇다 ③ 보통이다
   ④ 그렇지 않다 ⑤ 전혀 그렇지 않다
   왜 그렇게 생각합니까?

3. 명제가 참임을 증명하는 방법이 유일하다고 생각하는가? ( 예 , 아니오 )
   왜 그렇게 생각하는가?

4. 다음은 "삼각형의 세 내각의 합은 180°이다."라는 명제가 참임을 증명한 것이다. 다음 방법 중 자신이 생각하는 올바른 증명 방법은? (중복선택 가능)
   ① 여러 가지 다른 모양의 삼각형의 각을 각도기로 재어보았더니, 세 내각의 합이 180°가 되었다. 그러므로 "삼각형의 세 내각의 합은 180°이다."라는 명제는 참이다.
   ②


직사각형은 두 개의 직각삼각형으로 이루어져있다. 직사각형의 내각의 합은 360°이므로 한 개의 직각삼각형의 내각의 합은 180°이다.
또한, 모든 $\triangle ABC$는 두 개의 직각$\triangle ABD$와 직각$\triangle ADB$로 나누어 나타낼 수 있다. $\triangle ADB$와 $\triangle ADC$는 직각삼각형이므로 내각의 합은 각각 180°이다. 그리고 $\angle ADB = 90° = \angle ADC$ 이므로 $\angle ABD + \angle BAD = 90°$ 이고 $\angle ACD + \angle CAD = 90°$이다.
따라서 $\triangle ABC$의 내각의 합은 180°이다.

③

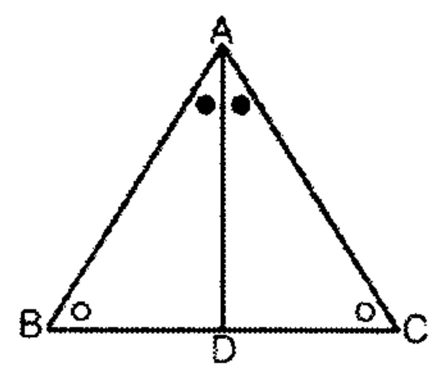



$\triangle ABC$에서 변BC와 평행하고 점A를 지나는 선분을 그리자. 그러면
$\angle DAB + \angle BAC + \angle EAC = 180°$ 이다. 그런데,
$\angle DAB = \angle ABC$
$\angle EAC = \angle ACB$ (∵엇각)
이므로, $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180°$ 이다.
즉, $\triangle ABC$의 내각의 합은 180°이다.

## (부록 2) <증명능력 테스트>

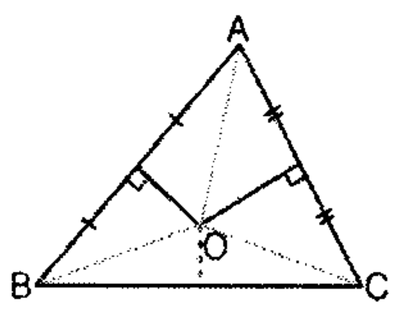
학년 ________ 이름 ____________

1. '이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다'라는 명제를 증명하려고 한다. 왼쪽 그림을 보고 주어진 명제를 가정과 결론으로 나누고, 다음 빈 칸을 채워라.




$\triangle ABC$에서
(가정)
(결론)
(증명) $\angle A$의 이등분선과 변 BC의 교점을 D라고 하면
$\angle BAD = \angle CAD$ , ______________
(왜냐하면, ______________이므로)
$\overline{AD}$는 공통인 변이므로 __________ $\therefore$ $\overline{AB}$ = ________

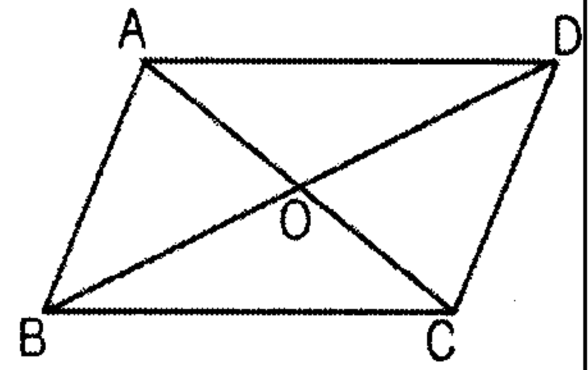
2. 다음은 삼각형 $ABC$의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만남을 다음 순서에 따라 증명하여라.
(1) 왼쪽 그림을 보고 주어진 명제를 가정과 결론으로 나누어라.




(가정) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$의 중점을 각각 D, E, F라고 하자. 그러면
$\overline{AD} = \overline{DB}$ , ______________ , ______________
(결론) ________________________________

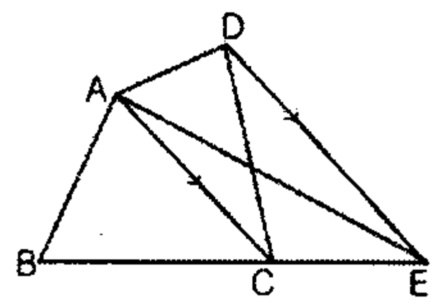
(2) 이 명제를 증명하여라.

3. 다음은 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분함을 증명한 것이다. 빈 칸을 채워라.



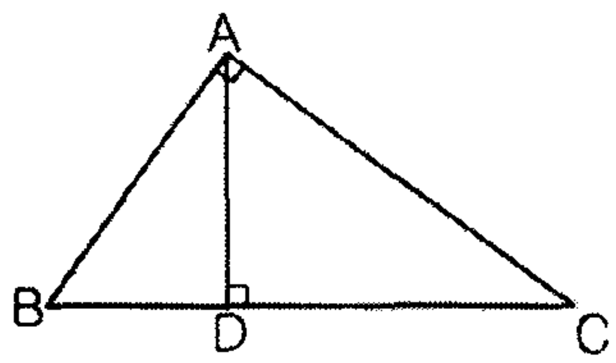

(증명) □$ABCD$에서
$\overline{AB} \,//\, \overline{DC}$ , $\overline{AD} \,//$ _____ 점 $O$는 $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 교점이다.
$\triangle ABO$와 $\triangle CDO$에서 ______//______이므로
$\angle ABO = \angle CDO$ (엇각) ……㉠
________________________ ……㉡
로 평행사변형의 대변의 길이는 같으므로 ____________ ……㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 $\overline{OA}$ = $\triangle ABO$ ___ $\triangle CDO$ $\therefore$ ___ , $\overline{OB}$ = ___
따라서, 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분 한다.

4. 다음 그림에서 $\overline{AC} \,//\, \overline{DE}$일 때, □$ABCD$와 $\triangle ABE$의 넓이가 같음을 증명하여라.



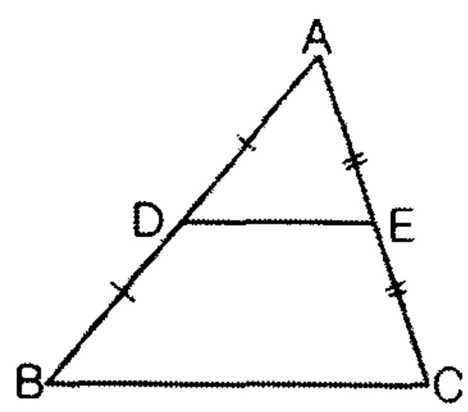

(증명)
________________________________________
________________________________________
________________________________________

5. 다음 그림과 같이 $\angle A = 90°$인 직각삼각형 $ABC$의 꼭지점 $A$에서 변 $BC$에 내린 수선의 발을 $D$라고 할 때 $\dfrac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{BA}}$임을 증명하여라.




(증명)

6. 다음 그림과 같이 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$의 중점을 각각 $D$, $E$라고 할 때, 다음을 증명하여라.

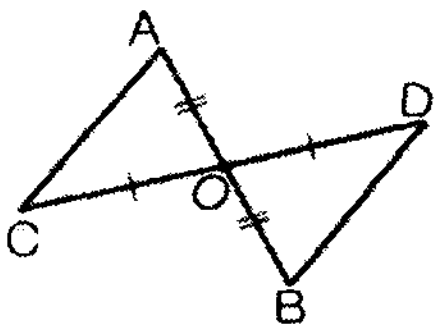



(1) $\overline{BC} // \overline{DE}$

(2) $\overline{DE} = \dfrac{1}{2}\overline{BC}$

## (부록 3) 증명능력 테스트

1. 다음 그림에서 점O가 $\overline{AB}$ , $\overline{CD}$의 중점일 때, $\overline{AC} = = \overline{BD}$임을 다음과 같이 증명하였다. $\boxed{\ \ }$ 안에 들어갈 내용이 맞지 않은 것은?




[증명] $\triangle ACO$와 $\triangle BDO$에서

$\overline{AO} = \boxed{㉠}$, $\boxed{㉡} = \overline{DO}$, $\angle AOC = \boxed{㉢}$

두 쌍의 대응하는 변의 길이가 각각 같고

그 끼인각의 크기가 같으므로 $\triangle ACO \equiv \boxed{㉣}$.

$\therefore\ \overline{AC} = \boxed{㉤}$

① $\boxed{㉠} = \overline{BO}$ ② $\boxed{㉡} = \overline{CO}$ ③ $\boxed{㉢} = \angle BDO$

④ $\boxed{㉣} = \triangle BDO$ ⑤ $\boxed{㉤} = \overline{BD}$

2. '이등변 삼각형의 두 밑각의 크기는 같다.'를 증명할 때, 다음 $\boxed{\ \ }$ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

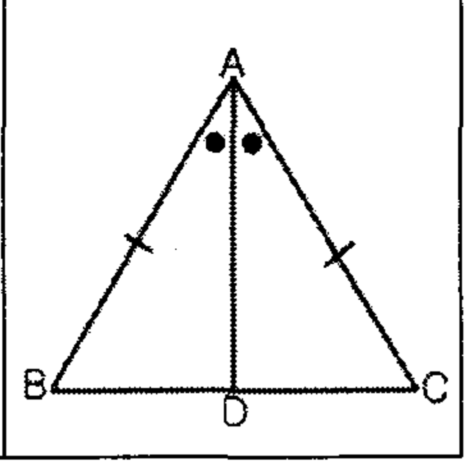
| $\angle ACD$ , $\overline{AC}$ , $\triangle ACD$ , $\angle CAD$ |
|---|

[가정] $\triangle ABC$에서 $\overline{AB} = \boxed{\ \ \ \ }$ [결론] $\angle ABD = \boxed{\ \ \ \ }$

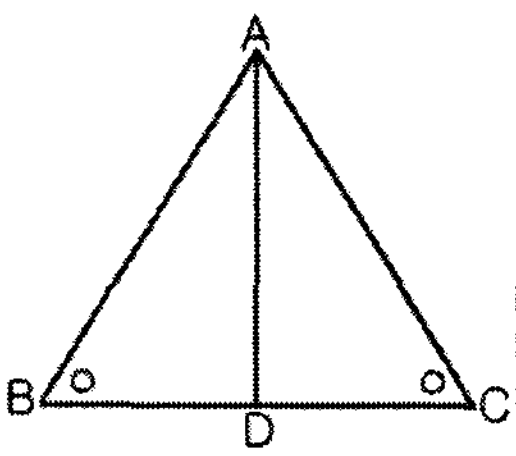
[증명] $\angle A$의 이등분선과 $\overline{BC}$와의 교점을 $D$라고 하면,

$\triangle ABD$와 $\triangle ACD$에서 $\overline{AB} = \boxed{\ \ }$ (가정), $\overline{AD}$는 공통, $\angle BAD = \boxed{\ \ }$

따라서, $\triangle ABD \equiv \boxed{\ \ \ \ }$ ($SAS$합동) $\therefore\ \angle ABD = \boxed{\ \ \ \ }$




3. 다음은 '$\triangle ABC$에서 $\angle B = \angle C$이면 $\overline{AB} = \overline{AC}$이다.'를 증명한 것이다. $\boxed{\ \ }$ 안에 알맞은 것을 써 넣어라.




[가정] $\triangle ABC$에서 $\angle B = \angle C$

[결론] $\overline{AB} = \overline{AC}$

[증명] $\angle A$의 이등분선과 밑변 $BC$의 교점을 $D$라하면,

$\triangle ABD$와 $\triangle ACD$에서 $\angle B = \angle C$……㉠ $\angle BAD = \boxed{\ \ \ \ }$……㉡

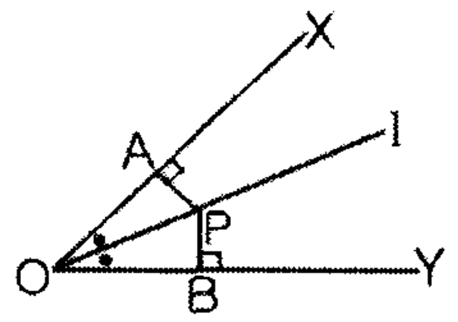
삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

㉠, ㉡으로부터 $\boxed{\ \ \ \ } = \angle ADC$…… ㉢ $\overline{AD}$는 공통 …… ㉣

㉡, ㉢, ㉣로부터, $\triangle ABD \equiv \boxed{\ \ \ \ }$ $\therefore\ \overline{AB} = \overline{AC}$

4. 오른쪽 그림과 같이 $\angle XOY$의 이등분선 $l$ 위의 한 점 $P$에서 두 변에 내린 수선의 길이가 같음을 증명할 때, 다음 □ 안에 알맞은 것을 써 넣어라.

$\angle PBO$ , $\angle POB$ , $\overline{PB}$



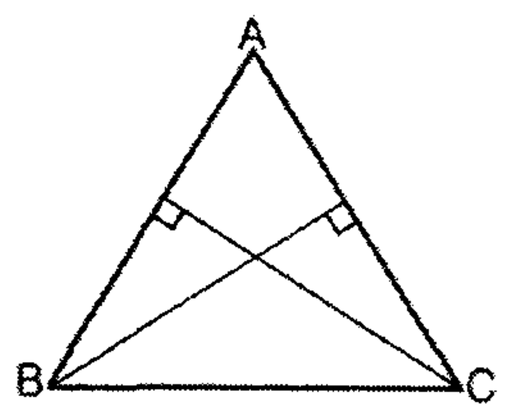

[가정] $\angle POA =$ □ , $\angle PAO =$ □ $=90°$ [결론] $\overline{PA} =$ □

[증명] $\triangle PAO$와 $\triangle PBO$에서 $\angle PAO =$ □ $=90°$ …… ㉠

$\angle POA =$ □ (가정) …… ㉡ $\overline{OP}$는 공통 …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 두 직각삼각형의 빗변의 길이와 한 예각의 크기가 각각 같으므로 $\triangle PAO \equiv \triangle PBO$. $\therefore \overline{PA} =$ □

5. 다음 그림과 같이 $\triangle ABC$의 두 점 $B$ , $C$에서 변 $AC$ , $AB$에 내린 수선의 발을 각각 $D$ , $E$ 라 할 때, $\overline{BD} = \overline{CE}$이면 $\overline{AB} = \overline{AC}$임을 다음과 같이 증명하였다. □ 안에 알맞은 것을 써 넣어라.




·[증명] $\triangle EBC$와 $\triangle DCB$에서 $\angle BEC =$ □ $= 90°$

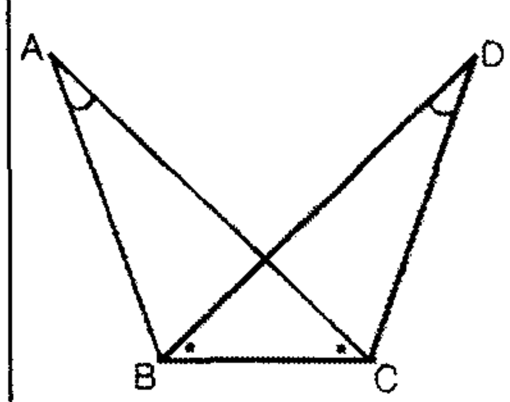
$\overline{CE} =$ □ (가정), $\overline{BC}$는 공통

$\therefore$ $\triangle EBC \equiv \triangle DCB$ ( □ 합동)

따라서, $\angle EBC = \angle DCB$

즉, $\triangle ABC$는 이등변삼각형이므로 $\overline{AB} = \overline{AC}$

6. 다음 그림에서 $\angle A = \angle D$ , $\angle ACB = \angle DBC$이면 $\overline{AB} = \overline{DC}$임을 다음과 같이 증명할 때, □ 안에 알맞은 것을 써 넣어라.




[가정] □ [결론] $\overline{AB} = \overline{DC}$

[증명] $\triangle ABC$와 $\triangle DCB$에서

$\angle ACB =$ □ (가정) …… ㉠ $\overline{BC}$는 공통 …… ㉡

삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°이고,

$\angle A = \angle D$ , $\angle ACB =$ □ 이므 $\angle ABC =$ □ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $\triangle ABC \equiv \triangle DCB$ ($ASA$합동) $\therefore$ $\overline{AB} = \overline{DC}$

7. $\angle A = 90°$인 직각삼각형 $ABC$의 꼭지점 $A$에서 빗변에 내린 수선의 발을 $H$라고 할 때, $\triangle ABC \backsim \triangle HAC$임을 증명하여라.

[증명]