

3층매질 Green함수의 수렴성 개선

황재호*

*경주대학교

Improvement of the Convergence for the Green's Function in Three Layered Media

Jae-Ho Hwang*

*Gyeongju University

E-mail : jhhwang@gju.ac.kr

요 약

유전체기판 위에 놓여있는 안테나를 엄밀히 해석하기 위해서는 파원의 위치에 따른 각 매질에서의 Green함수를 도출하여야한다. 그런데 이와 같은 Green함수는 Sommerfeld적분식으로 표현되기 때문에 적분의 수렴성이 좋지 않아서 수치계산시간이 길어지는 등 곤란한 점이 많다. 본 논문은 접지면이 없는 유전체 슬라브에 위치한 안테나를 해석함에 필요한 3층매질 Green함수를 도출하고, 파수공간에서의 Sommerfeld적분의 수렴성을 개선하는 방법으로 피적분함수로부터 수렴이 늦는 부분을 해석적으로 해결하는 Extraction법을 적용하여 수치계산시간을 단축하였다. 또한 파수공간의 무한적분을 함에 있어 적분로상에 존재하는 표면파 모드를 분석하고 이를 처리하는 방법을 제안 한다.

ABSTRACT

The paper deals with the rigorous analysis of three layered media structures. The dyadic Green's function for three layer medium is derived. The Green's functions belonging to the kernel of the integral equation are expressed as Sommerfeld integrals, in which surface wave effects are automatically included. We propose this integral representation as the most appropriate in the spatial domain analysis of slive structure. Also, we used extraction method for the convergence of this integral function. Finally, some numerical results are presented. These computed value show good agreement with proposed this method.

키워드

3층매질Green함수, Sommerfeld적분, 수렴성, Extraction법, 표면파

I. 서 론

최근, 유비쿼터스 서비스에 대한 관심이 커지면서 RFID를 비롯한 각종 이동통신 단말기의 수요가 폭발적으로 증대하고 있다. 특히 디자인을 고려한 다양한 형태의 소형단말기의 출현은 제품의 경쟁력으로 까지 작용을 하고 있다. 그러나 이와 같은 무선통신 단말기의 외형은 통신의 주요 부품인 안테나의 설계에 필히 고려해야 할 대상이 된다. 즉 안테나의 설계단계에 기구의 형태

및 재질이 포함 되어야 한다. 또한 단말기의 소형화에 사용되는 안테나의 소형 박형화에 대해서는 많은 연구개발이 진행되고 있으나, 가장 대표적인 방법으로는 안테나의 기판으로 사용되는 매질의 유전율을 높이는 방법이 사용되고 있다.[1]-[3] 그러나 유전체 기판 상에 인쇄된 안테나의 경우 자유공간 중에 위치한 안테나의 해석보다 복잡해진다. 이는 유전체 경계 및 내부에서의 전자계의 형태가 달라지기 때문이다. 유전체내부의 전자계를 엄밀히 해석하려면 매질의 Green함수를 도출해야

하는데 일반적으로 Sommerfeld적분식으로 표현되기 때문에 적분의 수렴성이 좋지 않아서 수치계산시간이 길어지는 단점이 있다. 이에 적분을 해석적으로 취급하는 방법에 대한 연구가 많이 수행되고 있지만 대부분 마이크로스트립 구조와 같은 접지면을 포함하는 형태로 한정되어 있다.[4]-[6] 그러나 최근의 안테나는 어떠한 형태에도 적용이 가능해야하고 RFID와 같은 경우 카드 형태로도 사용되어야 하므로 접지면이 없는 구조의 대한 해석이 절실하다 할 수 있다.

본 논문은 접지면이 없는 유전체 슬라브 상에 위치한 안테나를 해석함에 필요한 3층매질 Green 함수를 도출하고, 파수공간에서의 Sommerfeld적분의 수렴성을 개선하는 방법으로 피적분함수로부터 수렴이 늦는 부분을 해석적으로 해결하는 Extraction법을 적용하여 수치계산시간을 단축한다. 또한 파수공간의 무한적분을 함에 있어 적분 경로 상에 존재하는 극점의 처리방법을 모색하고 이에 따른 표면파 손실을 분석 한다.

II. 3층매질 dyadic Green 함수

그림1은 접지면이 없는 3층매질의 구조와 좌표계를 나타내고 있다. $z \geq 0$ 인 공간은 공기층이고 $-d < z < 0$ 인 공간은 비유전율이 ϵ_r 인 유전체 매질이 xy 면에 무한히 펼쳐져 있으며, $z \leq 0$ 인 공간은 공기층으로 되어있는 무한한 평면 슬라브가 공기층 가운데 놓여 있는 구조이다.

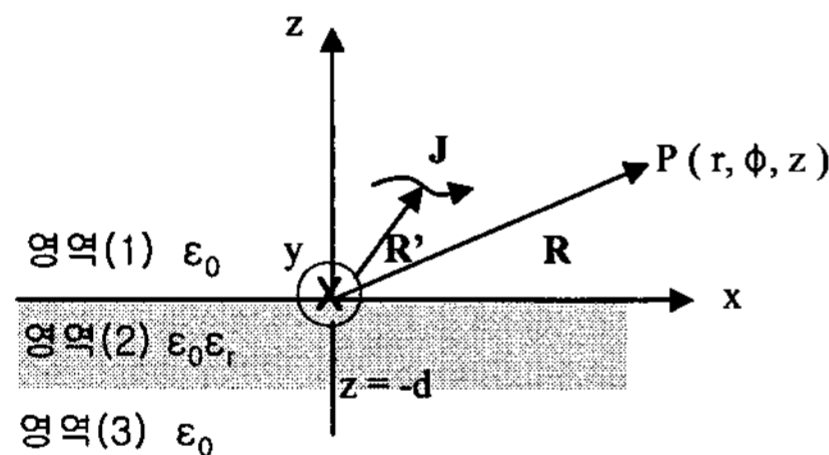


그림 1. 3층매질 구조와 좌표계

여기서 J와 P는 각각 파원과 관측점을 나타내고 있으며 이와 같은 경우의 관측점 P에서의 전계는 다음 식으로 구할 수 있다.

$$E_1 = -j\omega\mu_0 \iiint \bar{G}_1(R, R') \cdot J(R') dV \quad (1)$$

여기서 \bar{G}_1 과 J는 각각 영역(1)에 대한 dyadic Green 함수와 전류원이다. 이와 같이 각 매질에서의 전자계를 구하려면 해당 매질의 dyadic Green 함수를 도출 해야만 한다.

한편 유전체 기판위에 수평하게 위치한 안테나의 경우 영역(1)과 (2)의 경계면에 파원이 위치하나 유전체기판의 특성이 포함되어야 하므로 원점에서 조금 떨어진 $x=0, y=0, z=z_0$ 인 지점에 x방향

으로 향한 미소 다이폴을 파원으로 가정한다. 따라서 관측점에서의 전계는 파원으로부터 직접 도달하는 직접파 성분과 유전체기판에 반사, 산란되어 도달하는 산란파성분으로 구분된다. 결국 영역(1)에서의 전계에 대응하는 dyadic Green 함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{G}_1 = \bar{G}_1^d + \bar{G}_1^s \quad (2)$$

여기서 \bar{G}_1^d 는 자유공간의 dyadic Green 함수로 다음 식으로 나타낸다.

$$\bar{G}_1^d(R, R') = (\nabla\nabla \cdot + k_0^2) \bar{I} \frac{e^{-jk_0|R-R'|}}{4\pi|R-R'|} \quad (3)$$

또한 매질의 산란성분에 해당하는 \bar{G}_1^s 는 다음과 같이 나타낸다.

$$\bar{G}_1^s(R, R') = -\frac{j}{4\pi} \int_0^\infty d\lambda \sum_{n=0}^\infty \frac{2-\delta_0}{\lambda h_0} \{ a M_{0n\lambda}^e(h_0) M_{0n\lambda}^e(-h_0) + b N_{0n\lambda}^e(h_0) N_{0n\lambda}^e(-h_0) \} \quad (4)$$

여기서 δ_0 는 Kronecker 델타로, $n=0$ 일 때 $\delta_0=1$, $n \neq 0$ 일 때는 $\delta_0=0$ 이 되며 계수 a와 b는 주어진 모델의 경계 및 방사조건으로부터 구해진다. 또한 식(4)의 벡터파동함수는 다음과 같다.

$$M_{0n\lambda}^e(h) = \left[\mp \frac{n J_n(\lambda r)}{r} \frac{\sin n\phi \hat{r}}{\cos n\phi \hat{\phi}} - \frac{\partial J_n(\lambda r)}{\partial r} \frac{\cos n\phi \hat{\phi}}{\sin n\phi \hat{r}} \right] e^{-jh_z} \quad (5)$$

$$N_{0n\lambda}^e(h) = \frac{1}{k_\lambda} \left[-jh \frac{\partial J_n(\lambda r)}{\partial r} \frac{\cos n\phi \hat{r}}{\sin n\phi \hat{\phi}} - \frac{jhn J_n(\lambda r)}{r} \frac{\sin n\phi \hat{\phi}}{\cos n\phi \hat{r}} + \lambda^2 J_n(\lambda r) \frac{\cos n\phi \hat{z}}{\sin n\phi \hat{\phi}} \right] \quad (6)$$

가정한 미소전류원은 xy 면에 평행하므로 관측점에서의 산란전계는 x, y 성분만 생기게 되므로 Green 함수 또한 xx, xy, yx, yy 성분만 필요하게 되며 각 성분은 다음과 같이 나타낸다.

$$G_{1xx}^s = -\frac{j}{4\pi} \int_0^\infty d\lambda \left\{ \frac{J_1(\lambda r)}{r} \left[\frac{a}{h_0} \cos^2 \phi - \frac{h_0}{k_0^2} b \sin^2 \phi \right] + \frac{\partial J_1(\lambda r)}{\partial r} \left[\frac{a}{h_0} \sin^2 \phi - \frac{h_0}{k_0^2} b \cos^2 \phi \right] \right\} e^{-jh_0(z+z_0)} \quad (7)$$

$$G_{1xy}^s = G_{1yx}^s = -\frac{j}{4\pi} \int_0^\infty d\lambda \left\{ \frac{J_1(\lambda r)}{r} \left[\frac{a}{h_0} + \frac{h_0}{k_0^2} b \right] - \frac{\partial J_1(\lambda r)}{\partial r} \left[\frac{a}{h_0} + \frac{h_0}{k_0^2} b \right] \right\} \cos \phi \sin \phi e^{-jh_0(z-z_0)} \quad (8)$$

$$G_{1yy}^s = -\frac{j}{4\pi} \int_0^\infty d\lambda \left\{ \frac{J_1(\lambda r)}{r} \left[\frac{a}{h_0} \sin^2 \phi - \frac{h_0}{k_0^2} b \cos^2 \phi \right] + \frac{\partial J_1(\lambda r)}{\partial r} \left[\frac{a}{h_0} \cos^2 \phi - \frac{h_0}{k_0^2} b \sin^2 \phi \right] \right\} e^{-jh_0(z+z_0)} \quad (9)$$

단,

$$a = \frac{(h_0^2 - h_1^2)(e^{jh_1 d} - e^{-jh_1 d})e^{jh_0 d}}{(h_0 + h_1)^2 e^{jh_1 d} - (h_0 - h_1)^2 e^{-jh_1 d}} \quad (10)$$

$$b = \frac{(k_1^4 h_0^2 - k_0^4 h_1^2)(e^{jh_1 d} - e^{-jh_1 d})e^{jh_0 d}}{(k_1^2 h_0 + k_0^2 h_1)^2 e^{jh_1 d} - (k_1^2 h_0 - k_0^2 h_1)^2 e^{-jh_1 d}} \quad (11)$$

이며
 $h_0 = \sqrt{k_0^2 - \lambda^2}$, $h_1 = \sqrt{k_1^2 - \lambda^2}$, $d = z + z_0$
 가 된다. 여기서 k_0 , k_1 은 각각 공기층과 유전체매질 중의 파수이다.

III. Sommerfeld적분의 수렴성개선

식(7)~(9)에 나타낸 dyadic Green함수에 포함된 무한적분은 Sommerfeld적분이라 불리 우며, 파원과 관측점이 근접하게 되면 수렴성이 극히 악화된다. 특히, 파원과 관측점이 똑같이 공기와 유전체매질의 경계면에 놓이게 되면 수치계산이 불가능하게 된다. 그림2는 식(7)의 피적분함수 수렴성을 나타내고 있다. 이와 같이 수렴성이 나쁜 함수의 수렴성 개선을 위해 식(7)의 피적분 함수에서 수렴성이 나쁜 항을 다음과 같이 추출한다.

$$e_1 = -\frac{j}{4\pi} \int_0^\infty d\lambda \frac{h_0 \lambda}{k_0^2} J_0(\lambda r) \left\{ \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{h_0^2} \right\} \cos^2 \phi \quad (12)$$

$$e_2 = \frac{j}{4\pi} \int_0^\infty d\lambda \frac{h_0 \lambda}{k_0^2} \frac{J_1(\lambda r)}{r} \left\{ \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{h_0^2} \right\} (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi) \quad (13)$$

추출된 항은 다음과 같이 해석적으로 풀어진단.

$$e_1 = -\frac{j}{4\pi k_0^2} \left\{ \alpha_1 \left[-\frac{ke^{-jkr}}{r^2} + j\frac{e^{-jkr}}{r^3} \right] + j\alpha_2 \frac{e^{-jkr}}{r} \right\} \cos^2 \phi \quad (14)$$

$$e_2 = \frac{j}{4\pi k_0^2 r} \left\{ \frac{\alpha_1}{r} \left[k - j\frac{e^{-jkr}}{r} \right] - \frac{\alpha_2}{kr} [1 - e^{-jkr}] \right\} (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi) \quad (15)$$

여기서

$$\alpha_1 = \frac{k_1^2 - k_0^2}{k_1^2 + k_0^2}, \quad \alpha_2 = \frac{k_0^2 k_1^2 (k_1^2 - k_0^2)}{(k_1^2 + k_0^2)^2}$$

이 되며, 이와 같이 Extraction법을 적용한 경우 피적분함수의 수렴성은 그림3과 같이 개선된다.

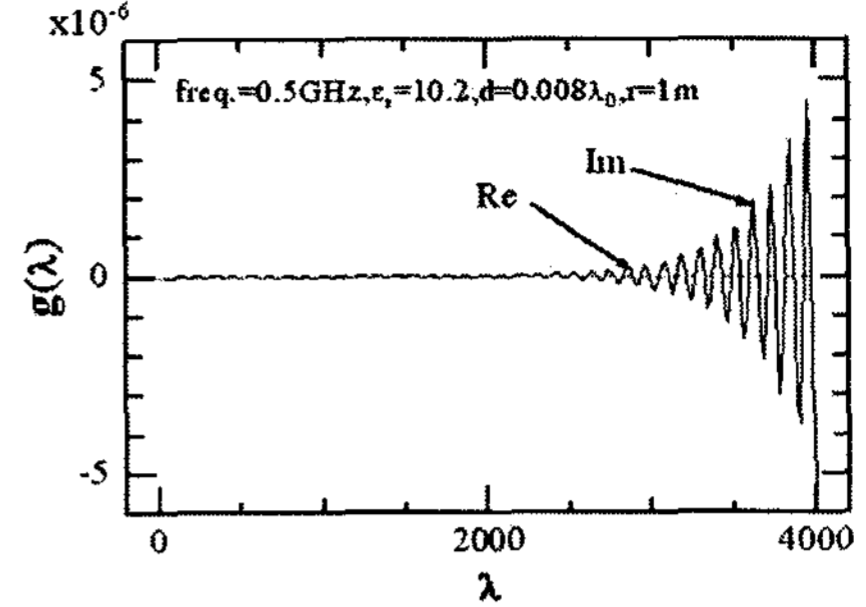


그림 2. Extraction법 적용 전 수렴성

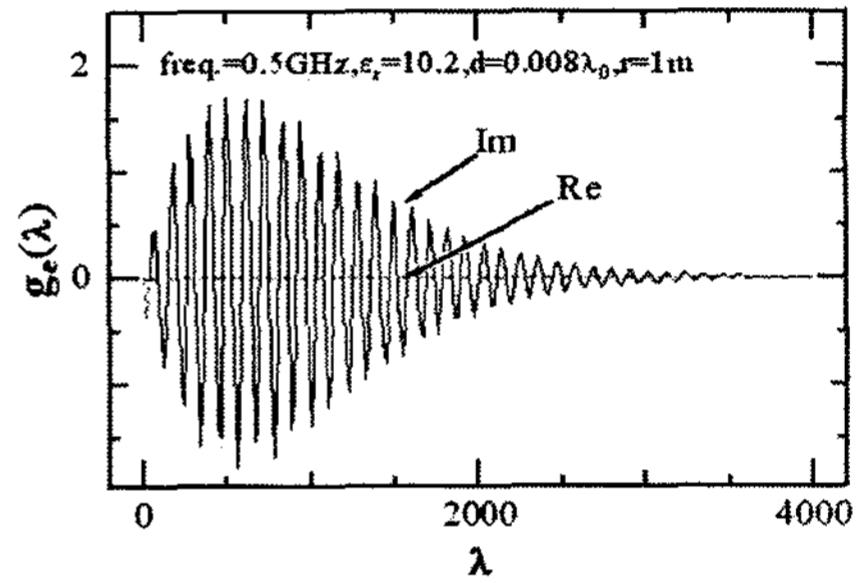


그림 3. Extraction법 적용 후 수렴성

이와 같이 도출된 Green함수는 안테나를 해석함에 있어 식(16)과 같이 상호임피던스를 계산하는데 이용되며 이때 더더욱 수렴성 개선하기 위해 무한적분을 최외곽에 두도록 적분순서를 바꾸면 그림4와 같이 파수의 2000배의 부근에서 수렴을 하게 되며, 계산시간을 크게 단축할 수 있다.

$$Z_{ij} = -j\omega\mu_0 \int_{\ell} I_i(x) \int_{\ell'} I_j(x') \int_0^\infty g_e(x;x', \lambda) d\lambda dx' dx \quad (16)$$

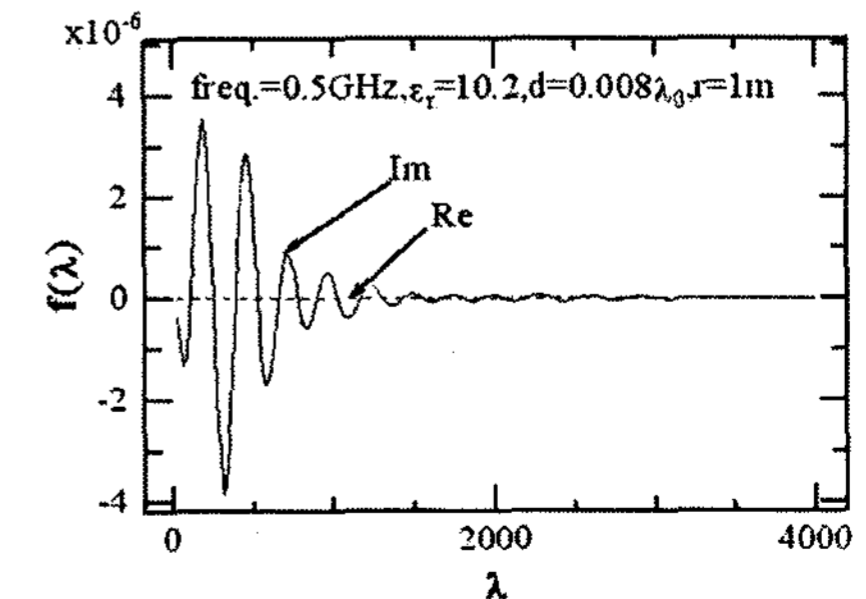


그림 4. 적분순서변경 후 수렴성

IV. 표면파 극의 처리 및 분석

파수공간의 복소무한적분을 할 때 실축상의 적분로상에는 그림5와 같이 표면파 극(pole)과 분기점(branch cut)이 존재한다. k_0 와 k_1 은 각각 공기층과 유전체매질 중의 파수이며, λ_1 과 λ_2 는 표면파 모드 극으로 각각 TM모드와 TE모드를 나타내고 있다.

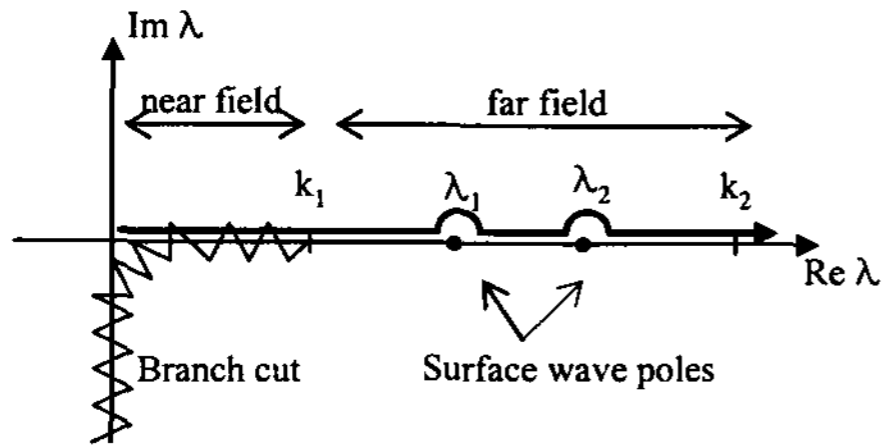


그림5. 복소평면상의 적분경로

적분경로를 살펴보면 0에서 k_0 까지는 원방계 방사에 관계하는 성분을 나타내고 그 이후는 근방계에 관계함을 알 수 있다. 특히 λ_1 과 λ_2 와 같이 적분로에 존재하는 극은 사용하는 기판의 두께와 비유전율에 따라 달라져서 안테나의 특성에 미치는 영향을 무시할 수 없다. 그림6은 기판의 두께에 대한 표면파모드의 차단상태를 나타내고 있다.

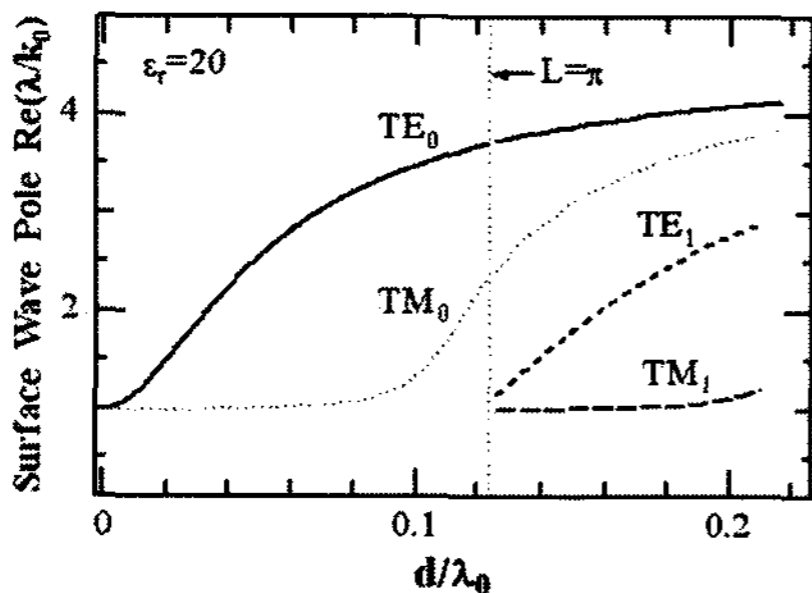


그림6. 기판의 두께에 따른 표면파 극의 변화

또한 극점에서는 적분이 불가능하므로 이를 피하는 적분경로를 선택하여 한다. 그림7은 실축상에 존재하는 극을 피하는 적분로를 나타내고 있으며 이 때 극점을 돌아가는 반원부분은 식(17)과 같이 유수로 평가할 수 있으며 이때 적분은 해석적으로 해결할 수 있다.

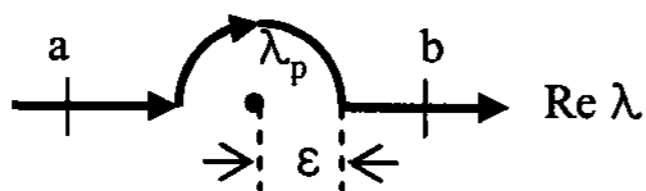


그림7. 극점을 피하는 적분로

$$\int_a^b f(\lambda)d\lambda = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{\lambda_p - \epsilon} \left\{ f(\lambda) - \frac{g_-(\lambda_p)}{\lambda - \lambda_p} \right\} d\lambda + \int_a^{\lambda_p - \epsilon} \frac{g_-(\lambda_p)}{\lambda - \lambda_p} d\lambda + \int_{\lambda_p + \epsilon}^b \left\{ f(\lambda) + \frac{g_+(\lambda_p)}{\lambda - \lambda_p} \right\} d\lambda - \int_{\lambda_p + \epsilon}^b \frac{g_+(\lambda_p)}{\lambda - \lambda_p} d\lambda - j\pi \frac{g_-(\lambda_p) - g_+(\lambda_p)}{2} \right] \quad (17)$$

V. 결론

본 논문은 접지면이 없는 유전체 슬라브 상에 위치한 안테나를 해석함에 필요한 3층매질 Green 함수를 공간영역으로 도출하였고, Extraction법을 사용하여 도출된 파수공간에서의 Sommerfeld적분의 수렴성을 개선하는 방법을 제안하였다. 무한적분의 수렴성은 전체 수치계산에 직접적으로 관여하므로 이와 같은 방법은 안테나의 수치해석 시간을 대폭 단축시킬 수 있다. 또한 파수공간의 적분경로 상에 존재하는 극점을 분석하여 표면파 모드의 차단상태를 파악하였으며 극점의 처리방법을 모색하여 적분경로의 큰 변화 없이도 적분을 해결하는 방법을 제시 하였다.

참고문헌

- [1] J. R. James and P. S. Hall, *Handbook of Microstrip Antennas*, IEE Electromagnetic Wave Series, Vol.28, 1989
- [2] D. M. Pozar, *Microwave Engineering*, Addison Wesley, 1990.
- [3] D. M. Pozar, S. M. Voda, "A rigorous analysis of a Microstripline fed patch antenna", *IEEE Trans. AP.*, Vol.35, No.12, pp. 1343-1349, Dec. 1987.
- [4] K. Naishadaham, J. B. Berry and H. A. N. Hejase, "Full-wave analysis of radiated emission from arbitrarily shaped printed circuit traces", *IEEE Trans. EMC.*, Vol.35, No.3, pp. 366-377, Aug. 1993.
- [5] A. Taektomi, K. Sawaya, S. Adachi, S. Ohshima and N. Yaoi, "A method for measuring surface impedance of superconductor and dielectric characteristics of substrate by using strip line resonator", *IEICE Trans. Electron.*, Vol.E77-C, No.8, pp. 1234 -1241, Aug. 1994.
- [6] I. Park, R. Mittra and M. I. Aksun, "Numerically efficient analysis of planar microstrip configurations using closed-form Green's functions", *IEEE Trans. MTT.*, Vol.43, No.2, pp. 394-400, Feb. 1995.