

이산 시간 비선형 상호 결합 시스템의 T-S 퍼지 모델을 위한 분산 동적 출력 제한 제어기 설계

Decentralized Dynamic Output Feedback Controller for Discrete-time Nonlinear Interconnected Systems via T-S Fuzzy Models

구근범¹, 주영훈², 박진배¹

¹ 연세대학교 전기전자공학과
E-mail: {milbam, jbpark}@control.yonsei.ac.kr
² 군산대학교 전기전자공학부
E-mail: yhjoo@kunsan.ac.kr

요 약

본 논문은 Takagi-Sugeno (T-S) 퍼지 모델을 이용하여 이산 시간에서의 비선형 상호 결합 시스템에 대한 분산 동적 출력 제한 제어기를 제시한다. 이산시간 비선형 상호 결합 시스템의 각 하위 시스템에 대한 T-S 퍼지 모델링을 한 후, 각각에 대해 동적 출력 제한 제어기를 설계한다. 제어가 된 페루프 하위 시스템들로 전체 시스템의 평형점이 안정화되는 선형 행렬 부등식 (LMI) 을 구하고, 부등식을 이용하여 동적 출력 제한 제어기의 이득값을 구한다. 마지막으로 모의실험을 통해 분산 동적 출력 제한 제어기의 효용성을 확인한다.

Key Words : Discrete-time nonlinear interconnected system, T-S fuzzy modeling, Decentralized dynamic output feedback, Linear matrix inequality

1. 서 론

사회가 고도화되고 시스템이 복잡해지면서 각 시스템 사이에 상호 결합의 형태가 나타나게 되었다. 이렇게 서로의 상태변수에 영향을 주는 시스템을 묶어 상호 결합 시스템이라 한다. 이 상호 결합 시스템은 특히, 전력 계통 등과 같은 우리 생활과 밀접한 여러 시스템에 그 특성이 나타나게 되었고, 이에 상호 결합 시스템에 대한 사람들의 관심이 커지고, 연구 또한 활발히 진행되고 있다.[1-5]

상호 결합 시스템을 제어하는 방법에는 크게 중앙집중 제어, 분산(distributed) 제어, 분산(비집중, decentralized)제어, 이렇게 세가지가 있다. 여기서, 중앙집중 제어는 확실한 제어는 가능하나, 경제성과 효율이 매우 떨어진다. 또한 분산(distributed) 제어는 각 시스템을 독립시켜서 제어하는 기법으로 효율은 좋으나 서로의 상호 결합성을 무시하고 제어하기 때문에 정확한 제어는 불가능하다. 이러한 두가지 방법의 단점을 보완한 것이 분산(decentralized) 제어이다. 이는 상호결합성을 고려하면서 각 시스

템에 대해 독립적인 제어를 가능케 한다. 하지만 상호결합성을 고려해야 하기 때문에 제어기를 설계하기에 매우 까다롭다. 뿐만 아니라, 시스템의 비선형성까지 고려한다면 더욱 제어기 설계는 어렵다고 할 수 있다.

이러한 상호 결합 시스템의 제어에 대한 연구는 여러 연구자를 통해 진행되어 왔다. Tseng[1]은 비선형 상호 결합 시스템에 대한 퍼지 모델을 제시하고, 이를 통해 제어기를 설계하였다. 또한 Šiljak와 Stanković[2-3]는 비선형의 상호 결합성을 가지는 선형 상호 결합 시스템에 대한 출력 제한 제어기를 제시하였다. 이에 본 논문에서는 이산 시간에서의 비선형 상호 결합 시스템을 위한 동적 출력 제한 제어기를 설계한다.

먼저, 이산시간 비선형 상호 결합 시스템에 대한 Takagi-Sugeno (T-S) 퍼지 모델을 제시하고, 이를 바탕으로 동적 출력 제한 제어기를 설계한다. 모델링된 시스템의 설계된 제어기가 포함된 페루프 시스템의 안정화 충분 조건을 제시한다. 그리고 안정화 조건을 통해 동적 출력 제한 제어기의 이득값을 구하기 위한 선형

행렬 부등식 (LMI)를 얻는다. 마지막으로 검증 을 위해 간단한 예제를 제시하고 모의 실험을 통해 제어가 됨을 증명한다.

2. 이산 시간 비선형 상호 결합 시스템의 T-S 퍼지 모델링

일반적인 이산시간에서의 비선형 상호 결합 시스템을 T-S 퍼지 시스템으로 모델링하기 위해서는 다음과 같은 규칙을 따르게 된다:

Plant Rule k:

IF x_{i1} *is* Γ_{i1}^k , ..., and x_{ip} *is* Γ_{ip}^k ,

THEN

$$\begin{cases} x_i(t+1) = A_{ik}x_i(t) + B_{ik}u_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^n A_{ijk}x_j(t) \\ y_i(t) = C_i x_i(t) \end{cases} \quad (1)$$

여기서, Γ_{iq}^k 는 $i \in I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ 에서 i 번째의 $q \in I_p = \{1, 2, \dots, p\}$ 를 만족하는 k 번째 퍼지 규칙이다. $x_i(t)$ 와 $u_i(t)$ 는 i 번째 하위 시스템의 상태변수와 입력변수이고, A_{ik} 와 B_{ik} 는 시스템 행렬과 입력 행렬이다. A_{ijk} 는 i 번째와 j 번째의 하위 시스템 사이의 상호결합행렬을 나타낸다. $y_i(t)$ 는 출력변수, C_i 는 출력 행렬로 계산상의 편의를 위해 선형이고 선형계수라 가정한다.[6]

(1)을 이용하여 n 개의 하위 시스템을 가지는 이산시간에서의 비선형 상호 결합 시스템을 T-S 퍼지 시스템으로 모델링하면 다음과 같다:

$$\begin{aligned} x_i(t+1) &= \sum_{k=1}^r \mu_k(x_i(t))(A_{ik}x_i(t) + B_{ik}u_i(t) \\ &\quad + \sum_{j=1, j \neq i}^n A_{ijk}x_j(t)), \\ y_i(t) &= \sum_{k=1}^r \mu_k(x_i(t))(C_{ik}x_i(t)) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \mu_k(x_i(t)) &= \frac{\omega_k(x_i(t))}{\sum_{k=1}^r \omega_k(x_i(t))}, \\ \omega_k(x_i(t)) &= \prod_{q=1}^p \Gamma_{iq}^k(x_{iq}(t)) \end{aligned} \quad (3)$$

이고, $\Gamma_{iq}^k(x_{iq}(t))$ 는 소속함수의 소속정도를 나타낸다. 이 때, $\omega_k(x_i(t))$ 는 다음의 특성을 따르게 된다.

$$\begin{aligned} \omega_k(x_i(t)) &\geq 0 \\ \sum_{k=1}^r \omega_k(x_i(t)) &> 0 \end{aligned} \quad (4)$$

또한, $\omega_k(x_i(t))$ 의 특성에 의해서 $\mu_k(x_i(t))$ 역시 다음과 같은 특성을 따르게 된다.

$$\begin{aligned} \mu_k(x_i(t)) &\geq 0 \\ \sum_{k=1}^n \mu_k(x_i(t)) &= 1 \end{aligned} \quad (5)$$

모델링된 이산시간 비선형 상호 결합 시스템의 제어를 위해 분산 동적 출력 제한 제어기의 제어 규칙을 다음과 같이 제시한다:

Controller Rule k:

IF x_{i1} *is* Γ_{i1}^k and, ..., x_{iq} *is* Γ_{iq}^k ,

$$\text{THEN} \begin{cases} u_i(t) = C_{ik}^c z_i(t) + D_{ik}^c y_i(t) \\ z_i(t+1) = A_{ik}^c x_i(t) + B_{ik}^c y_i(t) \end{cases} \quad (6)$$

여기서, $z_i(t)$ 는 제어기의 상태변수로 동적성이 존재하여 제어 입력값을 결정하게 된다. 퍼지 규칙의 전제부는 플랜트 시스템의 퍼지 규칙 전제부와 동일하게 된다. 또한 A_{ik}^c , B_{ik}^c , C_{ik}^c , D_{ik}^c 는 제어기의 이득값이 된다. 퍼지규칙을 통해 동적 출력 제한 제어기를 구하면 다음과 같다:

$$\begin{aligned} u_i(t) &= \sum_{k=1}^r \mu_k(x_i(t))(C_{ik}^c z_i(t) + D_{ik}^c y_i(t)) \\ z_i(t+1) &= \sum_{k=1}^r \mu_k(x_i(t))(A_{ik}^c z_i(t) + B_{ik}^c y_i(t)) \end{aligned} \quad (7)$$

제어기의 이득값을 구하기 위한 선형 행렬 부등식의 도출해야 한다. 하지만 상호 결합 시스템에서는 다른 시스템과의 상호 결합성을 항상 고려해야 하기 때문에 선형 행렬 부등식을 구하기가 어렵다. 또한 동적 출력 제한 제어기 자체도 매우 복잡한 형태이기 때문에 선형 행렬 부등식을 구하기가 매우 어렵다고 할 수 있다.

3. 동적 출력 제한 제어기의 설계를 위한 선형 행렬 부등식

여기서는 동적 출력 제한 제어기의 이득값을 구하기 위해 이산 시간의 상호 결합 T-S 퍼지 시스템을 안정화 시키는 충분조건을 구한다. 이를 위해 먼저 다음의 보조 정리가 필요하다.

보조 정리 1 [7] 적합한 차원의 어떤 상수 대칭 행렬 N, O, L 이 주어졌을 때 다음의 두 개의 부등식은 서로 필요충분조건이 된다:

$$O > 0, \quad N + L^T O L < 0 \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} N & L^T \\ L & -O^{-1} \end{bmatrix} < 0 \text{ or } \begin{bmatrix} -O^{-1} & L^T \\ L & N \end{bmatrix} < 0. \quad (9)$$

설계된 제어기 (5)를 상호 결합 시스템인 (2)에 대입하면 다음의 폐루프 시스템을 구할 수 있다:

$$\begin{bmatrix} x_i(t+1) \\ z_i(t+1) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^r \sum_{m=1}^r \mu_k(x_i(t)) \mu_m(x_i(t)) \times \begin{bmatrix} A_{ik} + B_{ik} D_{im}^c C_{ik} & B_{ik} C_{im}^c \\ B_{im}^c C_{ik} & A_{im}^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i(t) \\ z_i(t) \end{bmatrix} + \sum_{j=1, j \neq i}^n \begin{bmatrix} A_{ijk} \\ 0 \end{bmatrix} x_j(t) \quad (10)$$

$$u_i(t) = \sum_{k=1}^r \mu_k(x_i(t)) (C_{ik}^c z_i(t) + D_{ik}^c y_i(t)) \quad (11)$$

$$y_i(t) = C_{ik} x_i(t) \quad (12)$$

다음의 정리에서 위의 폐루프 시스템의 안정화 조건을 만족하는 선형 행렬 부등식을 구하게 된다:

정리 1 만약 다음의 선형 행렬 부등식과 특정한 조건을 만족하는 양한정 행렬 P_i 와 어떤 행렬 N_{ik} 가 존재하기 된다면, 동적 출력 제한 제어기에 의해 제어된 이산 시간 비선형 상호 결합 시스템 (7)은 점근적으로 안정하게 된다.

$$\begin{bmatrix} -4Q_i & * & * \\ 0 & 0 & * \\ A_{ik}^d Q_i + B_{ik}^d N_{im} C_i^d & \Theta_{ijk} + \Theta_{ijm} & -Q_i \\ + A_{im}^d Q_i + B_{im}^d N_{ik} C_i^d & & \end{bmatrix} < 0$$

그리고

$$C_i Q_i = M_i C_i \quad (13)$$

여기서,

$$Q = P^{-1}, \quad N_{ik} = K_{ik} M_i, \quad K_{ik} = \begin{bmatrix} D_{ik}^c & C_{ik}^c \\ B_{ik}^c & A_{ik}^c \end{bmatrix}$$

$$A_{ik}^d = \begin{bmatrix} A_{ik} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{ik}^d = \begin{bmatrix} B_{ik} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad C_{ik}^d = \begin{bmatrix} C_{ik} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\Theta_{ijk} = \begin{bmatrix} A_{ijk} \\ 0 \end{bmatrix}$$

이고, *는 행렬에서의 전칭요소를 의미한다. 제어기 이득값은 다음을 통해 구한다.

$$K_{ik} = N_{ik} \{ C_i Q_i C_i^T (C_i C_i^T)^{-1} \}^{-1} \quad (14)$$

증명 선형 행렬 부등식을 구하기 위해 다음의 Lyapunov 함수를 고려한다.

$$V(t, x) = \sum_{i=1}^n V_i(t, x_i) \quad (15)$$

$$V_i(t, x_i) = \begin{bmatrix} x_i(t) \\ z_i(t) \end{bmatrix}^T P_i \begin{bmatrix} x_i(t) \\ z_i(t) \end{bmatrix}$$

위의 Lyapunov 함수 $V(t, x)$ 의 값은 언제나 양수가 된다. 이때, Lyapunov 함수의 변화율이 언제나 음수가 된다면, 평형점 $x(t) = 0$ 는 언제나 점근적으로 안정하게 된다. 결국 $\Delta V(t, x)$ 를 전개하여서 음수가 되는 영역을 찾으면 다음과 같이 나오게 된다:

$$\begin{bmatrix} (\Gamma_{ikm} + \Gamma_{imk})^T P & (\Gamma_{ikm} + \Gamma_{imk})^T P \\ \times (\Gamma_{ikm} + \Gamma_{imk}) - 4P & \times (\Theta_{ijk} + \Theta_{ijm}) \\ (\Theta_{ijk} + \Theta_{ijm})^T P & (\Theta_{ijk} + \Theta_{ijm})^T P \\ \times (\Gamma_{ikm} + \Gamma_{imk}) & \times (\Theta_{ijk} + \Theta_{ijm}) \end{bmatrix} < 0$$

이를 보조정리 1과 합동변환을 이용하게 되면 정리 1에서의 수식이 나오게 된다. ■

참조 1 비선형 상호 결합 시스템에서 출력행렬 C_i 의 경우 역행렬을 가지고 있을 필요는 없다. 하지만, 선형계수는 항상 만족해야 한다. 즉, $C_i C_i^T$ 의 역행렬은 항상 존재해야 한다.

참조 2 선형 행렬 부등식을 통해 K_{ik} 를 통해서 동적 출력 제한 제어기의 이득값을 구할 수 있다. 이 때, D_{ik}^c 값을 제외한 나머지 이득값들이 모두 0이 될 수도 있다. 이때는 정적 출력 제한 제어기가 설계된 것으로, 이것만을 통해 제어가 가능하게 될 수도 있다.

4. 모의실험

논문에 대한 예제로 다음과 같은 이산시간 chaotic Lorenz 시스템을 고려한다.[8]

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ y(t+1) \\ z(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.8x + 0.02y \\ 0.056x + 0.998y - 0.002xz \\ 0.002xy + 0.9947z \end{bmatrix}$$

Lorenz 시스템을 (x, y) 와 z 의 두 개의 하위 시스템으로 이루어진 상호 결합 시스템으로 간주한다. 그리고 T-S 퍼지 모델링을 하면 다음과 같다:

$$A_{11} = A_{12} = \begin{bmatrix} 0.98 & 0.02 \\ 0.056 & 0.998 \end{bmatrix}, \quad A_{121} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.04 \end{bmatrix},$$

$$A_{122} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.06 \end{bmatrix}, \quad B_{11} = B_{12} = \begin{bmatrix} 0.002 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C_1 = [1 \ 1] \\ A_{21} = A_{22} = 0.9947, \quad A_{211} = [0 \ -0.04], \\ A_{212} = [0 \ 0.06], \quad B_{21} = B_{22} = 0.002, \quad C_2 = 1$$

모델링된 시스템을 정리1에 대입하여 이득값을 구하면 다음과 같이 나타난다.

$$K_{11} = \begin{bmatrix} -236.6703 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ K_{12} = \begin{bmatrix} -144.4024 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ K_{21} = K_{22} = \begin{bmatrix} -497.3500 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

선형 행렬 부등식을 통해 구한 이득값에서는 D_{ik}^c 의 값만 존재하고 나머지는 모두 0으로 나왔다. 이는 이 시스템에 정적 출력 제한 제어기만으로도 제어가 가능하다는 것을 보여주며, 또한, 제어기의 이득값을 동적 출력 제한 제어기의 방법으로 구할 수 있음을 보여준다. 그림 1은 상태변수의 초기값이 $[10 \ -10 \ -10]$ 일 때의 제어가 포함된 페루프 시스템의 상태변수를 나타낸 것으로 보는 것과 같이 0으로 수렴하고 있음을 알 수 있다.

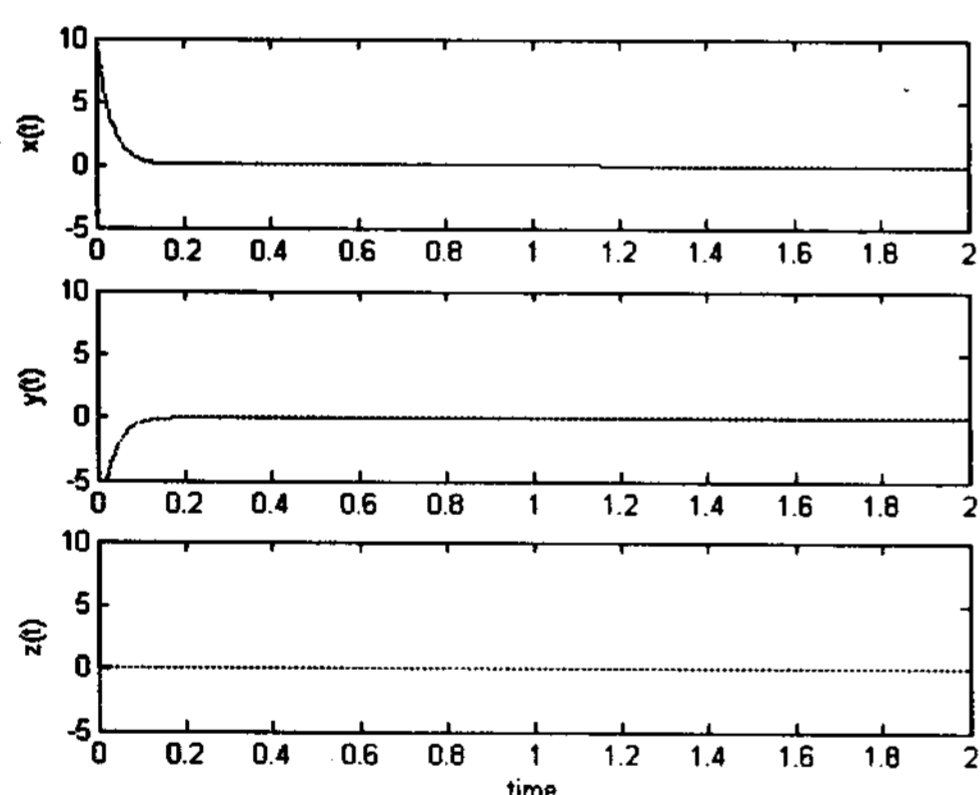


그림 1. 비선형 상호 결합 시스템의 상태변수

4. 결론

본 논문에서는 이산시간에서의 비선형 상호 결합 시스템을 위한 동적 출력 제한 제어기를 설계하였다. 비선형 상호 결합 시스템에 대한 T-S 퍼지 모델을 제시하였고, 제약 조건이 있는 선형 행렬 부등식을 통해 상호 결합 시스템을 안정화 시키는 제어기를 설계하였다. 그리고 이를 모의실험을 통해 제어기의 우수성을

증명하였다. 앞으로 더욱 복잡한 비선형 상호 결합 시스템에 대한 제어기 설계 연구가 의미가 있으리라 생각된다.

참 고 문 헌

- [1] C. S. Tseng, " H_∞ decentralized fuzzy model reference tracking control design for nonlinear interconnected systems," IEEE Transactions on fuzzy Systems, Vol. 9, No. 6, pp. 795-809, 2001.
- [2] S. S. Stanković, "Decentralized dynamic output feedback for robust stabilization of a class of nonlinear interconnected systems," Automatica, Vol. 43, pp. 861-867, 2007.
- [3] Šiljak, D. D. "Design of robust static output feedback for large-scale systems," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 49, pp. 2040-2044, 2004.
- [4] C. W. Chen, "Stability analysis of T-S fuzzy models for nonlinear multiple time-delay interconnected systems," Mathematics and Computers in Simulation, Vol. 66, pp. 523-537, 2004.
- [5] X. G. Yan, "Decentralised robust sliding mode for a class of nonlinear interconnected systems by static output feedback," Automatica, Vol. 40, pp.613-620. 2004.
- [6] W. Chang, "Static output-feedback fuzzy controller for Chen's chaotic system with uncertainties," Information Sciences, Vol. 151, pp. 227-244, 2003.
- [7] L. Xie, "Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainties," Int. J. Contr., Vol. 63, No. 4, pp. 741-750, 1996.
- [8] H. J. Lee, "Robust fuzzy control of nonlinear systems with parametric uncertainties," IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 9, No. 2, pp. 369-379, 2001.