

곡선 보의 면외 진동해석을 위한 얇은 원형 보 유한요소
**A Thin Circular Beam Finite Element for Out-of-plane Vibration Analysis
of Curved Beams**

김창부* 김보연** 송승관**
Kim, Chang-Boo Kim, Bo Yeon Song, Seung Gwan

ABSTRACT

In this paper, we present a thin circular beam finite element for the out-of-plane vibration analysis of curved beams. The element stiffness matrix and the element mass matrix are derived respectively from the strain energy and the kinetic energy by using the natural shape functions which are obtained from an integration of the differential equations of the finite element in static equilibrium. The matrices are formulated with respect to the local polar coordinate system or to the global Cartesian coordinate system in consideration of the effects of shear deformation and rotary inertias. Some example problems are analysed. The FEM results are compared with the theoretical ones to show that the presented finite element can describe quite efficiently and accurately the out-of-plane motion of thin curved beams.

1. 서 론

곡선 보의 면외 정적 또는 진동해석은 굽힘과 비틀림의 연성과 전단변형 및 회전관성의 2차 효과로 인하여 매우 복잡하게 된다. 상기의 2차 효과를 무시하면 곡선 보의 곡률반경 대 반경 두께의 비가 작지 않은 경우에 정적 또는 진동해석 결과는 정확하지 않게 되며 비록 그 비가 매우 작은 경우에도 고차모드의 고유진동수 해석결과는 부정확하게 된다. 최근까지 곡선 보의 면외 정적 또는 진동해석을 위한 유한요소에 관한 많은 연구가 있었다. 대표적인 연구로는 참고논문[1~5]를 들 수 있다.

본 논문에서는 원형 보의 반경방향 두께가 중심선의 반경에 비하여 매우 작아서 단면에 걸친 곡률 변화의 효과가 무시되는 얇은 곡선 보의 면외 진동해석을 위한 얇은 원형 보 유한요소를 제시하고자 한다. 유한요소의 강성행렬과 질량행렬은 정적 평형상태에 있는 유한요소의 미분방정식을 적분하여 얻어지는 정확한 변위를 형상함수로 사용하여 참고논문[1,3]과 달리 유한요소의 변형에너지와 운동에너지로부터 얻어진다. 또한 요소행렬들은 전단변형 및 회전관성을 고려하여 국부 극좌표계 또는 전체 Cartesian좌표계에 대하여 구축된다. 예제 문제 해석을 통하여 FEM결과와 이론결과를 비교함으로써 제시된 유한요소가 얇은 곡선 보의 면외 운동을 매우 효율적이면서 정확히 묘사할 수 있음을 보인다.

* 인하대학교 기계공학부, 교수, 정회원

E-mail : kimcb@inha.ac.kr

TEL : (032)860-7383 FAX : (032)868-1716

** 인하대학교 대학원 기계공학과, 석사과정, 비회원

2. 얇은 원형 보 유한요소

2.1 원형 보의 면의 변형

그림1에서 보이는 바와 같이 원형 보 유한요소의 기준좌표계는 O_{XYZ} 이고, O 는 요소의 곡률 중심이다. 요소의 원주방향에 수직인 단면은 $\xi-\eta$ 면과 $\eta-\zeta$ 면에 대하여 대칭이다. 단면 중심을 통과하는 중심선의 반경은 a 이며 요소 절점인 C_1 과 C_2 는 중심선 상에 있고, 요소의 원호 각은 $\psi = (\theta_2 - \theta_1)/2$ 이다.

원형 보의 $x-y$ 면에 대한 면의 변형만을 고려할 때, 원주각 θ 에 위치한 단면 중심 C 의 변위는 국부 좌표계 $C_{\xi\eta\zeta}$ 에 대하여 ξ -축 성분 u_ξ 만을 가지며 단면의 회전은 반경 성분 ϕ_ξ 와 원주 성분 ϕ_η 를 갖는다. 이와 같은 회전 성분은 매우 작다고 가정한다. 따라서 원형 보의 단면 중심 C 에서의 ξ -축 방향 굽힘 곡률 κ_ξ , η -축 방향 비틀림 τ_η 및 ζ -축 방향 전단 변형도 γ_ξ 는 다음과 같다.

$$\kappa_\xi = \frac{1}{a}(\phi_{\xi,\theta} - \phi_\eta), \quad \tau_\eta = \frac{1}{a}(\phi_{\eta,\theta} + \phi_\xi), \quad \gamma_\xi = -\phi_\xi + \frac{1}{a}u_{\xi,\theta} \quad (1)$$

여기서 $(\cdot)_{,\theta}$ 는 원주각 θ 에 대한 편미분이다.

원형 보의 반경방향 두께가 중심선의 반경에 비하여 매우 작아서 단면에 걸친 곡률 변화의 효과가 무시되는 경우의 원형 보를 얇은 원형 보라고 한다. 이와 같은 얇은 원형 보의 단면 중심 C 에서의 ξ -축 방향 굽힘 모멘트 M_ξ , η -축 방향 비틀림 모멘트 M_η 및 ζ -축 방향 전단력 N_ξ 은 다음과 같다.

$$M_\xi = EI_\xi \kappa_\xi, \quad M_\eta = GJ_\eta \tau_\eta, \quad N_\xi = K_\xi GA \gamma_\xi \quad (2)$$

여기서 A , I_ξ , J_η 및 K_ξ 는 각각 단면의 면적, ξ -축 방향 관성모멘트, 비틀림 관성모멘트[6] 및 전단계수[7]이다. E 는 재료의 탄성계수이며 G 는 전단계수로서 프아송 비 ν 를 가지고 표현하면 $G = E/2(1 + \nu)$ 이다.

2.2 형상함수

원형 보 유한요소의 절점 C_1 과 C_2 에 ξ -축 방향 굽힘 모멘트, η -축 방향 비틀림 모멘트 및 ζ -축 방향 전단력이 작용하여 평형상태에 있을 때, 단면 중심 C 에서의 굽힘 모멘트 M_ξ , 비틀림 모멘트 M_η 및 전단력 N_ξ 은 $\phi=0$ 에 위치한 중간 단면의 중심에서의 굽힘 모멘트 $M_{\xi 0}$, 비틀림 모멘트 $M_{\eta 0}$ 및 전단력 $N_{\xi 0}$ 을 가지고 다음과 같이 표현된다.

$$M_\xi = M_{\xi 0} c\phi + (M_{\eta 0} - aN_{\xi 0})s\phi, \quad M_\eta = -M_{\xi 0} s\phi + (M_{\eta 0} - aN_{\xi 0})c\phi + aN_{\xi 0}, \quad N_\xi = N_{\xi 0} \quad (3)$$

여기서 $s\phi = \sin\phi$, $c\phi = \cos\phi$, $\phi = \theta - (\theta_2 + \theta_1)/2$

식(3)을 식(2)에 대입하여 얻어지는 κ_ξ , τ_η 및 γ_ξ 를 식(1)에 대입하여 유도되는 미분방정식계의 해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi_\xi &= \frac{1}{a} \{ B_2 c\phi + B_3 s\phi + B_4 f_2(1 - c\phi) + B_5(f_4 s\phi + f_3 \phi c\phi) + B_6 f_3 \phi s\phi \} \\ \phi_\eta &= \frac{1}{a} \{ -B_2 s\phi + B_3 c\phi + B_4 f_2 s\phi - B_5 f_3 \phi s\phi - B_6(f_4 s\phi - f_3 \phi c\phi) \} \\ u_\xi &= B_1 + B_2 s\phi - B_3 c\phi + B_4(f_1 \phi + f_2 \phi - f_2 s\phi) + B_5(-f_2 + f_2 c\phi + f_3 \phi s\phi) + B_6(f_2 s\phi + f_4 s\phi - f_3 \phi c\phi) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 B_1, B_2 및 B_3 는 미분방정식계의 적분상수로서 B_1 는 곡률 중심의 축방향의 강제변위, B_2/a 및 B_3/a 는 각각 곡률 중심에 대한 중간 단면에서의 반경방향 강제회전 및 원주방향 강제회전을 의미하고,

$$B_4 = \left(\frac{a^2}{EI_\xi}\right) a N_{30}, \quad B_5 = \left(\frac{a^2}{EI_\xi}\right) M_{30}, \quad B_6 = \left(\frac{a^2}{EI_\xi}\right) (M_{n0} - a N_{30}), \quad \alpha_\xi = \frac{EI_\xi}{K_\xi G A a^2}, \quad \beta_n = \frac{EI_\xi}{G J_n},$$

$$f_1 = \alpha_\xi, \quad f_2 = \beta_n, \quad f_3 = \frac{1}{2}(1 + \beta_n), \quad f_4 = \frac{1}{2}(1 - \beta_n),$$

만일 $\alpha_\xi = 0$ 이면 $\gamma_\xi = 0$ 로서 굽힘 전단변형이 무시된다.

따라서 절점 C_1 과 C_2 에서의 면외 변위 및 회전은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\{v\} = [a]\{B\} \quad (5)$$

여기서

$$\{v\} = (\phi_{11} \phi_{n1} u_{\xi 1} \phi_{12} \phi_{n2} u_{\xi 2})^T, \quad \{B\} = (B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6)^T,$$

$$[a] = \begin{bmatrix} \textcircled{0} & c\psi/a & -s\psi/a & f_2(1-c\psi)/a & -(f_4 s\psi + f_3 \psi c\psi)/a & f_3 \psi s\psi/a & \textcircled{0} \\ 0 & s\psi/a & c\psi/a & -f_2 s\psi/a & -f_3 \psi s\psi/a & (f_4 s\psi - f_3 \psi c\psi)/a & \textcircled{0} \\ 1 & -s\psi & -c\psi & -(f_1 + f_2)\psi + f_2 s\psi & -f_2(1-c\psi) + f_3 \psi s\psi & -(f_2 + f_4)s\psi + f_3 \psi c\psi & \textcircled{0} \\ 0 & c\psi/a & s\psi/a & f_2(1-c\psi)/a & (f_4 s\psi + f_3 \psi c\psi)/a & f_3 \psi s\psi/a & \textcircled{0} \\ 0 & -s\psi/a & c\psi/a & f_2 s\psi/a & -f_3 \psi s\psi/a & -(f_4 s\psi - f_3 \psi c\psi)/a & \textcircled{0} \\ \textcircled{0} & 1 & s\psi & -c\psi & (f_1 + f_2)\psi - f_2 s\psi & -f_2(1-c\psi) + f_3 \psi s\psi & (f_2 + f_4)s\psi - f_3 \psi c\psi \end{bmatrix}$$

형상함수의 계수벡터 $\{B\}$ 를 국부 극 좌표계에 대한 절점변위벡터 $\{v\}$ 로 표현하면 다음과 같다.

$$\{B\} = [a]^{-1}\{v\} \quad (6)$$

국부 극 좌표계에 대한 절점변위벡터 $\{v\}$ 와 기준좌표계인 전체 Cartesian 좌표계에 대한 절점변위벡터 $\{\bar{v}\}$ 의 관계는 다음과 같이 주어진다.

$$\{v\} = [T]\{\bar{v}\} \quad (7)$$

여기서

$$\{\bar{v}\} = (\phi_{x1} \phi_{y1} u_{x1} \phi_{x2} \phi_{y2} u_{x2})^T,$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \textcircled{0} & \mathcal{C}_1 & \mathcal{S}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{0} \\ 0 & -\mathcal{S}_1 & \mathcal{C}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{C}_2 & \mathcal{S}_2 & 0 & \textcircled{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{S}_2 & \mathcal{C}_2 & 0 & \textcircled{0} \\ \textcircled{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \textcircled{0} \end{bmatrix}$$

2.3 강성행렬 및 질량행렬

원형 보 유한요소의 면외 변형에너지 V 는 다음과 같이 표현된다.

$$V = \frac{1}{2} \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} (EI_\xi \kappa_\xi^2 + GJ_n \tau_n^2 + K_\xi G A \gamma_\xi^2) a d\Theta \quad (8)$$

식(1)을 식(8)에 대입하고 식(4)를 고려하면 변형에너지 V 를 다음과 같이 형상함수의 계수벡터 $\{B\}$ 항으로 표현할 수 있다.

$$V = \frac{1}{2} \{B\}^T [K_B] \{B\} \quad (9)$$

여기서 $[K_B]$ 는 원형 보 유한요소의 $\{B\}$ 에 대한 강성행렬이며 그 성분이 부록에 표현되어 있다.

또한 식(6)을 식(9)에 대입하여 변형에너지를 국부 극 좌표계에 대한 절점변위벡터 $\{v\}$ 항으로 표현하면 다음과 같다.

$$V = \frac{1}{2} \{v\}^T [K] \{v\}$$

여기서 $[K]$ 는 원형 보 유한요소의 $\{v\}$ 에 대한 강성행렬이며 다음과 같다.

$$[K] = [a]^{-T} [K_B] [a]^{-1} \quad (10)$$

필요하면 국부 극 좌표계에 대한 강성행렬을 다음과 같이 전체 Cartesian 좌표계에 대하여 변환할 수 있다.

$$[\bar{K}] = [T]^T [K] [T] \quad (11)$$

원형 보 유한요소의 면외 운동에너지 T 는 다음과 같이 표현된다.

$$T = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\rho I_{\xi} \dot{\phi}_{\xi}^2 + \rho I_{\eta} \dot{\phi}_{\eta}^2 + \rho A u_{\xi}^2) a d\theta \quad (12)$$

여기서 ρ 는 재료의 밀도이고 I_{ξ} 는 단면의 ξ -축 방향 관성모멘트이며 (\cdot) 는 시간 t 에 대한 편미분이다.

변형에너지와 마찬가지로 운동에너지를 형상함수의 계수벡터 $\{B\}$ 항으로 표현하면 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2} \{B\}^T [M_B] \{B\} \quad (13)$$

여기서 $[M_B]$ 는 원형 보 유한요소의 $\{B\}$ 에 대한 질량행렬이며 그 성분이 부록에 표현되어 있으며 μ_{ξ} , μ_{η} 는 다음과 같다.

$$\mu_{\xi} = \frac{\rho I_{\xi}}{\rho A a^2}, \quad \mu_{\eta} = \frac{\rho I_{\eta}}{\rho A a^2} \quad (14)$$

$\mu_{\xi} = 0$ 인 경우에는 굽힘 회전관성모멘트가 무시되며, $\mu_{\eta} = 0$ 인 경우에는 비틀림 회전관성모멘트가 무시된다.

또한 변형에너지와 마찬가지로 운동에너지를 국부 극 좌표계에 대한 절점변위벡터 $\{v\}$ 항으로 표현하면 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2} \{v\}^T [M] \{v\} \quad (15)$$

여기서 $[M]$ 는 원형 보 유한요소의 $\{v\}$ 에 대한 질량행렬이며 다음과 같다.

$$[M] = [a]^{-T} [M_B] [a]^{-1} \quad (16)$$

필요하면 국부 극 좌표계에 대한 질량행렬을 다음과 같이 전체 Cartesian 좌표계에 대하여 변환할 수 있다.

$$[\bar{M}] = [T]^T [M] [T] \quad (17)$$

3. 수치 예

수치 예로서 말단 부하를 받는 1/4 내다지 링의 선형 정적해석 및 자유 링의 고유진동해석 문제를 선택하여 유한요소법에 의한 해석결과와 이론치를 비교하였다. 수치해석에서 링은 직각단면을 갖고 있으며 재료 및 기하학적 성질은 다음과 같다.

$$E = 200 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.25, \quad \rho = 7830 \text{ kg/m}^3, \quad a = 1 \text{ m}, \quad A = 6 \times 10^{-3} \text{ m}^2, \quad I_{\xi} = 1.8 \times 10^{-6} \text{ m}^4,$$

$$I_n = 6.8 \times 10^{-6} \text{ m}^4, \quad J_n = 4.506 \times 10^{-6} \text{ m}^4, \quad K_s = 0.847.$$

3.1 말단 부하를 받는 1/4 내다지 링의 선형 정적해석

그림2에서 보이는 바와 같이 1/4 내다지 링의 말단에 축방향의 집중 부하 P 를 가했을 때의 링의 면외 변위는 양단에서의 경계조건을 고려하여 식(3)과 식(4)으로부터 얻어질 수 있다. 말단에서의 반경방향 회전 $\phi_{\xi T}$, 원주방향 회전 $\phi_{\eta T}$, 축방향 변위 $u_{\xi T}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\phi_{\xi T} = \left(\frac{a^2}{EI_s}\right) \left\{ \frac{1}{2}(1 + \beta_n) \right\} P, \quad \phi_{\eta T} = \left(\frac{a^2}{EI_s}\right) \left\{ \beta_n - \frac{\pi}{4}(1 + \beta_n) \right\} P, \quad u_{\xi T} = \left(\frac{a^3}{EI_s}\right) \left\{ \left[\alpha_s + \frac{1}{2}(1 + 3\beta_n) \right] \frac{\pi}{2} - 2\beta_n \right\} P \quad (18)$$

상기와 같은 이론식은 Castigliano 정리를 사용하여 얻어질 수도 있다.[4]

도표 1에 굽힘 전단변형을 고려하는 경우와 무시하는 경우에 대하여 단위 말단 부하에 의한 말단 회전 및 변위의 값이 정리되어 있다. 1/4 링을 한 개, 두 개 또는 16개의 얇은 원형 보 유한요소로 모델링하고 유한요소법을 이용하여 얻어진 결과도 이론식으로부터 얻어진 결과와 일치한다. 그 이유는 본 논문에서 제시된 얇은 원형 보 유한요소의 형상함수는 집중하중의 경우에 정적으로 정확하기 때문이다.

3.2 자유 링의 고유진동해석

절 직경수 n 과 고유 진동수 ω 의 모드로 진동하는 자유 링의 면외 회전 및 변위는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\phi_{\xi} = (\Phi_{\xi C} \cos n\theta + \Phi_{\xi S} \sin n\theta) e^{i\omega t}, \quad \phi_{\eta} = (\Phi_{\eta C} \cos n\theta + \Phi_{\eta S} \sin n\theta) e^{i\omega t}, \quad u_{\xi} = (U_{\xi C} \cos n\theta + U_{\xi S} \sin n\theta) e^{i\omega t} \quad (19)$$

참고논문[8]에서와 같은 방법으로 식(19)를 식(8) 및 식(12)에 대입하여 적분하고, Lagrange 방정식을 적용하면 자유 링의 고유진동을 이론적으로 해석할 수 있는 고유진동 방정식이 얻어진다. 이와 같은 이론적 해석 결과는 참고논문[9,10]에서 얻어진 결과와 거의 같다.

본 논문에서 제시된 얇은 원형 보 유한요소의 수렴성을 보이기 위하여 자유 링을 16개, 32개, 48개 또는 64개의 유한요소로 모델링하고 굽힘 전단변형, 굽힘 회전관성 및 비틀림 회전관성의 2차 효과를 모두 고려하여 자유 링의 면외 고유진동을 유한요소법을 사용하여 해석하였다. 도표 2에는 유한요소법을 사용하여 계산된 유연 모드의 최저차 8개의 고유진동수가 이론해석에 의한 결과와 비교하여 제시되어 있다. 유한요소법을 사용하여 계산된 고유진동수는 유한요소의 수를 증가시키기에 따라서 이론치에 상방에서 빠르게 수렴하고 있다. 또한 고유진동수의 백분율 오차는 절 직경수 및 진동 차수에 따라서 증가하고 있다.

도표 3 및 도표 4에는 비틀림 회전관성, 굽힘 전단변형 및 굽힘 회전관성의 2차 효과에 대한 자유 링의 유연 모드의 고유진동수 변화가 제시되어 있다. 유한요소법을 사용하여 계산된 고유진동수는 이론치와 비교하여 매우 정확함을 알 수 있다. 또한 상기의 2차 효과를 무시하면 특히 높은 절 직경수에 관한 고유진동수가 증가함을 알 수 있다.

4. 결론

얇은 원형 보의 굽힘 전단변형, 굽힘 회전관성 및 비틀림 회전관성의 2차 효과를 전부 또는 일부분 고려하면서 면의 운동을 매우 효율적이면서 정확하게 묘사할 수 있는 얇은 원형 보 유한요소를 제시하였다. 제시된 유한요소는 집중 부하의 선형 정적문제에서는 정적으로 정확한 형상함수를 사용하기 때문에 정확한 결과를 얻을 수 있게 한다. 또한 제시된 유한요소를 사용하여 얻어지는 고유진동수는 유한요소의 수를 증가시킴에 따라서 이론치에 상방에서 빠르게 수렴하고 있다.

참고문헌

1. R. Davis, R.D. Henshell, and G.B. Warburton(1972), "Curved Beam Finite Elements for Coupled Bending and Torsional Vibration," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.1, pp.165-175.
2. C.H. Yoo, and J.P. Ferenbach(1981), "Natural Frequencies of Curved Girders," *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol.107, No.EM2, pp.339-354.
3. A.O. Lebeck, and J.S Knowlton(1985), "A Finite Element for the Three-Dimensional Deformation of a Circular Ring," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.21, pp.421-435.
4. J.K. Choi, and J.K. Lim(1995), "General Curved Beam Elements Based on the Assumed Strain Fields," *Computers and Structures*, Vol.55, No.3, pp.379-386.
5. J.S. Wu, and L.K. Chiang(2003), "Out-of-Plane Responses of a Circular curved Timoshenko beam due to a moving load," *International Journal of Solids and Structures*, Vol.40, pp.7425~7448.
6. I.S. Sokolnikoff(1956), *Mathematical Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, pp.107-197.
7. G.R. Cowper(1966), "The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory," *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol.33, pp. 335-340.
8. C-B. Kim, J-W. Park, S. Kim, and C. Cho(2005), "A Finite Thin Circular Beam Element for In-Plane Vibration Analysis of Curved Beams," *Journal of Mechanical and Technology (KSME Int. J.)*, Vol.19, No.12, pp.2187-2196.
9. S.S. Rao(1971), "Effects of Transverse Shear and Rotary Inertia on the Coupled Twist-Bending Vibrations of Circular Rings," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.16, No.4, pp.551~566.
10. J. Kirkhope(1976), "Out-of-Plane Vibration of Thick Circular Ring," *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol.102, No.EM2, pp.239-247.

부록

$[K_B]$ 는 대칭행렬이고 정의되지 않은 성분은 영이다.

$$K_{Bij} = (EI/a^3)k_{Bij}$$

$$k_{B44}=2(\beta_n + \alpha_\zeta)\psi, \quad k_{B46}=2\beta_n s\psi, \quad k_{B55}=(\psi + s\psi c\psi) + \beta_n(\psi - s\psi c\psi), \quad k_{B66}=(\psi - s\psi c\psi) + \beta_n(\psi + s\psi c\psi).$$

[M_B]는 대칭 행렬이고 정의되지 않은 성분은 영이다.

$$M_{Bij}=(\rho A a) m_{Bij}$$

$$m_{B11}=2\psi, \quad m_{B13}=-2s\psi, \quad m_{B15}=-2f_2(\psi - s\psi) + 2f_3(s\psi - \psi c\psi), \quad m_{B22}=2\mu_\zeta\psi + (1 - \mu_\zeta + \mu_n)(\psi - s\psi c\psi),$$

$$m_{B24}=-2\mu_\zeta f_2(\psi - s\psi) + 2(f_1 + f_2)(s\psi - \psi c\psi) - (1 - \mu_\zeta + \mu_n)f_2(\psi - s\psi c\psi),$$

$$m_{B26}=-\frac{1}{2}(1 - \mu_\zeta + \mu_n)f_3(s\psi c\psi - \psi c2\psi) + (\mu_n f_4 + f_2 + f_4)(\psi - s\psi c\psi), \quad m_{B33}=2\mu_\zeta\psi + (1 - \mu_\zeta + \mu_n)(\psi + s\psi c\psi),$$

$$m_{B35}=-\frac{1}{2}(1 - \mu_\zeta + \mu_n)f_3(s\psi c\psi - \psi c2\psi) - 2f_2(\psi - s\psi) + (\mu_\zeta f_4 + f_2)(\psi - s\psi c\psi),$$

$$m_{B44}=4\mu_\zeta f_2^2(\psi - s\psi) + (f_1 + f_2)^2 \frac{2}{3} \psi^3 - 4(f_1 + f_2)f_2(s\psi - \psi c\psi) + (1 - \mu_\zeta + \mu_n)f_2^2(\psi - s\psi c\psi),$$

$$m_{B46}=2\{\mu_\zeta f_2 f_3 + (f_1 + f_2)(f_2 + f_4)\}(s\psi - \psi c\psi) - (\mu_n f_4 + f_2 + f_4)f_2(\psi - s\psi c\psi) + \frac{1}{2}(1 - \mu_\zeta + \mu_n)f_2 f_3(s\psi c\psi - \psi c2\psi) - 2(f_1 + f_2)f_3(\psi^2 s\psi + 2\psi c\psi - 2s\psi),$$

$$m_{B55}=4f_2^2(\psi - s\psi) + (\mu_\zeta f_4^2 - f_2^2)(\psi - s\psi c\psi) - 4f_2 f_3(s\psi - \psi c\psi) + (\mu_\zeta f_4 + f_2)f_3(s\psi c\psi - \psi c2\psi) + (1 - \mu_\zeta + \mu_n)f_3^2(\frac{1}{3}\psi^3 - \frac{1}{2}\psi^2 s2\psi - \frac{1}{2}\psi c2\psi + \frac{1}{4}s2\psi) + \mu_\zeta f_3^2 \frac{2}{3}\psi^3,$$

$$m_{B66}=\{\mu_n f_4^2 + (f_2 + f_4)^2\}(\psi - s\psi c\psi) - (\mu_n f_4 + f_2 + f_4)f_3(s\psi c\psi - \psi c2\psi) + (1 - \mu_\zeta + \mu_n)f_3^2(\frac{1}{3}\psi^3 + \frac{1}{2}\psi^2 s2\psi + \frac{1}{2}\psi c2\psi - \frac{1}{4}s2\psi) + \mu_\zeta f_3^2 \frac{2}{3}\psi^3.$$

도표 1. 1/4 내다지 링의 단위 축 방향 말단 부하 당 말단 회전 및 변위

	$\alpha_\zeta \neq 0$	$\alpha_\zeta = 0$
$\phi_{\zeta T}/P$ (rad/N)	2.7759×10^{-6}	2.7759×10^{-6}
$\phi_{n T}/P$ (rad/N)	-1.5863×10^{-6}	-1.5863×10^{-6}
$u_{\zeta T}/P$ (m/N)	3.1736×10^{-6}	3.1698×10^{-6}

* $\alpha_\zeta = 0$: 굽힘 전단변형 무시

도표 2. 자유 링의 면외 고유진동수

Number of nodal diameter	Theory (Hz)	F.E.M.(Hz)/ Error(%)			
		16 elements	32 elements	48 elements	64 elements
2	37.283	37.289/ 0.016	37.283/ 0.002	37.283/ 0.001	37.283/ 0.000
3	105.11	105.24/ 0.123	105.13/ 0.014	105.12/ 0.005	105.12/ 0.002
4	200.70	201.58/ 0.436	200.80/ 0.050	200.74/ 0.017	200.72/ 0.009
5	322.89	326.40/ 1.089	323.30/ 0.129	323.03/ 0.044	322.96/ 0.022
0	413.84	416.50/ 0.643	414.51/ 0.160	414.14/ 0.071	414.01/ 0.040
6	470.72	481.11/ 2.208	472.00/ 0.271	471.16/ 0.094	470.94/ 0.047
1	585.27	592.75/ 1.278	587.15/ 0.320	586.11/ 0.142	585.74/ 0.080
7	643.22	667.68/ 3.804	646.43/ 0.499	644.34/ 0.174	643.79/ 0.088

도표 3. 비틀림 강성을 고려한 자유 링의 면외 고유진동수

Number of nodal diameter	$\alpha_i \neq 0, \mu_i \neq 0$		$\alpha_i \neq 0, \mu_i = 0$		$\alpha_i = 0, \mu_i \neq 0$	
	Theory (Hz)	F.E.M.(Hz)/ Error(%)	Theory (Hz)	F.E.M.(Hz)/ Error(%)	Theory (Hz)	F.E.M.(Hz)/ Error(%)
2	37.283	37.283/ 0.000	37.305	37.305/ 0.000	37.312	37.312/ 0.000
3	105.11	105.12/ 0.001	105.25	105.26/ 0.001	105.41	105.41/ 0.000
4	200.70	200.71/ 0.005	201.17	201.18/ 0.005	201.86	201.86/ 0.001
5	322.89	322.93/ 0.014	324.05	324.09/ 0.014	325.97	325.97/ 0.002
0	413.84	413.95/ 0.026	413.84	413.95/ 0.026	413.84	413.95/ 0.026
6	470.72	470.86/ 0.029	473.11	473.24/ 0.029	477.37	477.39/ 0.003
1	585.27	585.57/ 0.051	585.27	585.57/ 0.051	585.79	586.09/ 0.051
7	643.22	643.56/ 0.053	647.55	647.91/ 0.054	655.74	655.78/ 0.006
8	839.33	840.09/ 0.091	846.53	847.32/ 0.093	860.72	860.82/ 0.011
2	925.91	927.09/ 0.128	925.91	927.09/ 0.128	927.22	928.41/ 0.128
9	1057.9	1059.5/ 0.143	1069.1	1070.7/ 0.148	1092.0	1092.2/ 0.017
10	1297.9	1300.7/ 0.215	1314.3	1317.2/ 0.223	1349.1	1349.4/ 0.027
3	1309.8	1313.2/ 0.257	1309.8	1313.2/ 0.257	1311.9	1315.3/ 0.257
11	1558.0	1562.8/ 0.308	1581.0	1586.1/ 0.321	1631.6	1632.2/ 0.039
4	1708.0	1715.4/ 0.437	1708.0	1715.4/ 0.437	1710.8	1718.3/ 0.437
12	1837.0	1844.8/ 0.426	1868.1	1876.5/ 0.447	1939.0	1940.1/ 0.055

* $\alpha_i = 0$: 굽힘 전단변형 무시, $\mu_i = 0$: 굽힘 회전관성 무시

도표 4. 비틀림 강성을 무시한 자유 링의 면외 고유진동수

Number of nodal diameter	$\alpha_i \neq 0, \mu_i \neq 0$		$\alpha_i \neq 0, \mu_i = 0$		$\alpha_i = 0, \mu_i \neq 0$	
	Theory (Hz)	F.E.M.(Hz)/ Error(%)	Theory (Hz)	F.E.M.(Hz)/ Error(%)	Theory (Hz)	F.E.M.(Hz)/ Error(%)
2	37.336	37.337/ 0.000	37.359	37.359/ 0.000	37.366	37.366/ 0.000
3	105.30	105.31/ 0.001	105.45	105.45/ 0.002	105.60	105.60/ 0.000
4	201.10	201.11/ 0.005	201.57	201.58/ 0.005	202.26	202.27/ 0.001
5	323.55	323.59/ 0.014	324.71	324.76/ 0.014	326.66	326.67/ 0.001
6	471.70	471.83/ 0.029	474.10	474.23/ 0.029	478.42	478.43/ 0.003
7	644.56	644.90/ 0.054	648.92	649.27/ 0.055	657.21	657.25/ 0.006
8	841.07	841.84/ 0.091	848.32	849.11/ 0.093	862.71	862.80/ 0.010
9	1060.1	1061.6/ 0.144	1071.4	1072.9/ 0.148	1094.5	1094.7/ 0.016
10	1300.5	1303.3/ 0.215	1317.0	1320.0/ 0.223	1352.3	1352.6/ 0.025
11	1561.1	1565.9/ 0.308	1584.3	1589.4/ 0.322	1635.6	1636.2/ 0.037
12	1840.7	1848.5/ 0.427	1872.0	1880.3/ 0.448	1943.9	1944.9/ 0.052

* $\alpha_i = 0$: 굽힘 전단변형 무시, $\mu_i = 0$: 굽힘 회전관성 무시

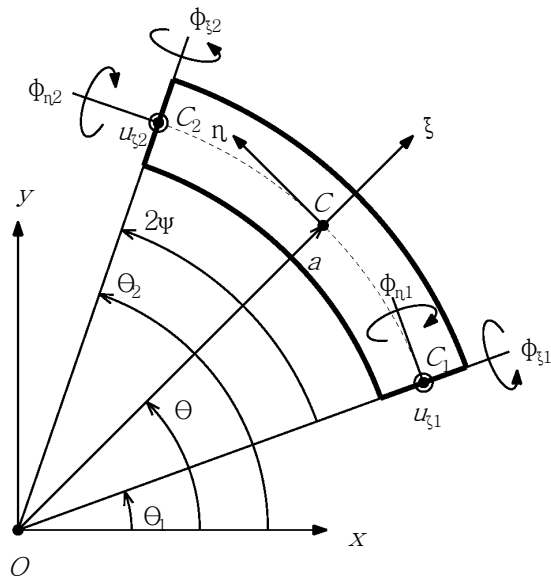


그림1. 원형 보 유한요소의 면의 변위

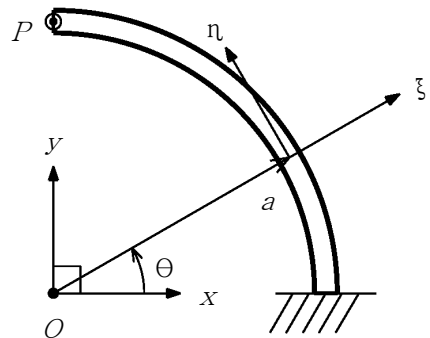


그림2. 축방향의 말단 부하를 받는 1/4 내다지 링