

# 레일의 라체팅에 미치는 접촉응력 및 열응력에 대한 해석적 연구

## An Analytic Study on the Contact Stress and Thermal Stress of Rails

구병춘\*  
Goo, Byeong-Choon

유원희\*\*  
You, Won-Hee

---

### ABSTRACT

Even though a constant repeated load is applied, plastic deformation may cumulate. This kind of behavior is called ratcheting. Ratcheting may lead to cracks and finally to failure of the rail. Usually ratcheting occurs on high rails in curves. Ratcheting is influenced by residual stresses, wheel-rail contact stresses, thermal stresses due to wheel/rail rolling contact, shear strength of the rail, strain hardening behavior, etc. In this study, contact stresses and thermal stresses are examined. It is found their value is considerable compared to the maximum contact pressure.

---

### 1. 레일의 라체팅

일정한 크기의 응력이 반복적으로 작용할 때 매 사이클마다 변형률이 증가하는 현상을 라체팅이라 한다. 변형의 증가 모양이 톱니와 유사하여 이러한 이름이 붙은 것이다. 라체팅은 차륜과 레일과 같은 구름접촉, 디스크와 디스크의 구름접촉, 열 사이클, 인장 반복 하중 등 다양한 조건에서 발견되고 있다. Fig. 1은 일반적인 금속재료의 응력과 변형률의 관계가 작용 하중의 크기에 따라 어떻게 변화하는 지를 보여준다. Fig. 1(a)는 최대응력의 크기가 재료의 항복점보다 작은 경우로 재료는 탄성거동을 한다. (b)는 작용 응력의 크기가 재료의 항복응력을 초과하여 소성변형을 일으키지만 몇 사이클 후에는 가공경화의 영향으로 재료는 탄성 거동을 하는 경우로 이 경우를 elastic shakedown 이라 한다. (c)의 경우는 소성변형이 있지만 이 소성변형이 계속 증가하지 않고 일정한 크기로 유지되는 경우로 이런 현상을 plastic shakedown 이라 한다. plastic shakedown을 초과하는 하중이 작용하면 (d)와 같이 일정 크기의 하중 사이클에서 소성변형이 계속하여 증가하는 현상이 발생하는데 이러한 현상을 라체팅이라 한다.

수직력과 마찰력이 작용할 때 항복은 수직력과 마찰력의 크기에 따라 표면에서 먼저 일어날 수도 있고 표면 아래에서 먼저 일어날 수도 있다. Tresca 항복조건을 적용하면  $\mu \geq 0.25$  이면 표면에서 항복이 먼저 일어나고, von Mises 항복조건을 사용하면  $\mu \geq 0.30$ 이면 표면에서 먼저 항복이 일어난다. 마찰계수와 Hertz 압력분포의 최고값  $p_0$ 의 값에 따라 탄성영역, elastic shakedown, plastic shakedown 그리고 라체팅 영역을 나타면 Fig. 2와 같이 표현할 수 있다. 이 영역의 경계는 적용하는 항복조건과 소성영역에서의 재료 경화특성에 따라 달라진다.

---

\* 책임저자 : 한국철도기술연구원, 정회원

E-mail : bcgoo@krri.re.kr

TEL : (031)460-5243, FAX : (031)460-5279

\*\* 한국철도기술연구원, 정회원

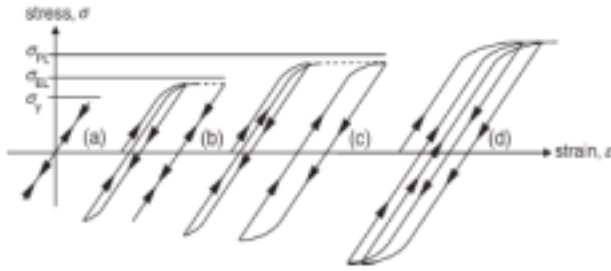


Fig. 1 하중에 따른 기계적 거동

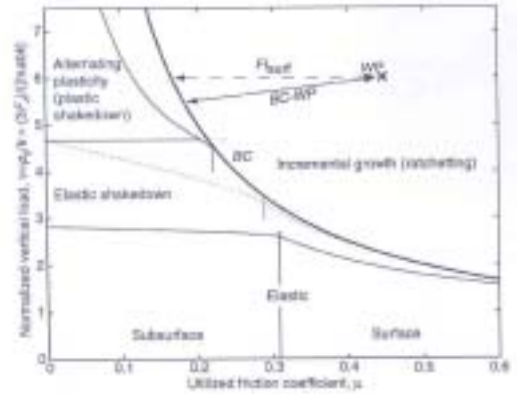


Fig. 2 라체팅 영역도

철도 레일의 경우 차륜과 수많은 구름접촉을 하게 되는데 첫 번째 구름접촉에서 탄성한계를 초과하면 소성변형이 일어나고 이 소성변형은 잔류응력을 발생시킨다. 두 번째 구름접촉에서는 첫 번째 구름접촉에서 발생한 잔류응력과 두 번째 구름접촉의 접촉력이 합쳐져 작용하게 된다. 일반적으로 표면근처에서 이 잔류응력은 접촉하중에 의해 발생하는 응력을 상쇄하는 방향으로 작용할 수 있다. 따라서 몇 사이클 동안 축적된 잔류응력은 그 이후의 접촉이 탄성 거동을 하도록 작용할 수 있는데 이러한 현상을 elastic shakedown이라 한다. 차륜과 레일의 접촉문제를 반 무한판에 실린더가 구르는 경우와 같이 2차원으로 간략화하여 마찰력이 없는 순수 구름의 경우 elastic shakedown을 설명하면 다음과 같다. 평면변형률 상태로 가정하면  $(\tau_{xy})_r = (\tau_{yz})_r = 0$  (여기서 첨자  $r$ 은 잔류응력을 나타냄), 나머지 성분은  $y$ 에 의존하지 않는다. 자유표면의 경계조건으로부터  $(\sigma_z)_r = (\tau_{zx})_r = 0$ . 따라서 가능한 잔류응력의 상태는<sup>(1)</sup>

$$(\sigma_x)_r = f_1(z), \quad (\sigma_y)_r = f_2(z) \quad (1)$$

따라서 접촉응력과 잔류응력에 의한 주응력은 다음과 같이 주어진다.

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \{ \sigma_x + (\sigma_x)_r + \sigma_z \} + \frac{1}{2} [ \{ \sigma_x + (\sigma_x)_r - \sigma_z \}^2 + 4\tau_{zx}^2 ]^{1/2} \quad (2)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} \{ \sigma_x + (\sigma_x)_r + \sigma_z \} - \frac{1}{2} [ \{ \sigma_x + (\sigma_x)_r - \sigma_z \}^2 + 4\tau_{zx}^2 ]^{1/2} \quad (3)$$

$$\sigma_3 = \nu \{ \sigma_x + (\sigma_x)_r + \sigma_z \} + (\sigma_y)_r \quad (4)$$

잔류응력은 어느 깊이에서 항복이 일어나지 않도록 어떠한 깊이라도 가질 수 있으므로,  $(\sigma_y)_r$ 은  $\sigma_3$ 이 중간에 놓이도록 선택할 수 있다. 따라서 Tresca 항복조건을 적용하면 항복이 일어나지 않기 위해서는

$$\frac{1}{4} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 = \frac{1}{4} \{ \sigma_x + (\sigma_x)_r - \sigma_z \}^2 + \tau_{zx}^2 \leq k^2 \quad (5)$$

여기서  $k$ 는 전단항복강도이다. 식 (5)가 만족하는 조건은  $(\sigma_x)_r = \sigma_z - \sigma_x$ 일 때,  $\tau_{zx} = k$ 이다. 따라서 elastic shakedown의 한계조건은  $\tau_{zx}$ 가  $k$ 에 도달할 때이다. 한편 순수구름접촉에서 최대전단력은  $(\pm 0.87a, 0.50a)$  위치에서 발생하며 그 크기는  $0.25p_0$ 이다. 따라서 elastic shakedown은<sup>(1)</sup>

$$p_0 \leq 4.00k \quad (6)$$

일 때 발생한다.

## 2. 차륜의 구름접촉에 의한 레일의 응력

차륜과 레일의 접촉현상은 엄밀하게는 3차원으로 취급하여야 하지만 구름접촉 연구에서는 해석대상에 따라 2차원으로 근사시켜 해석하여도 충분한 경우가 많다. 레일의 구름접촉피로나 라체팅 현상을 연구할 때에도 Fig. 3과 같이 레일을 반 무한체로 보고 그 표면에 Hertz 접촉압력과 이에 대응하는 마찰력이 작용하는 것으로 간략화하는 것이 가능하다.

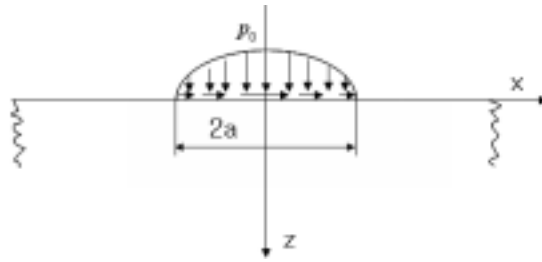


Fig. 3 차륜에 의해 레일에 작용하는 접촉응력

작용하중의 크기가 P일 때 Hertz 압력분포는 식 (7)과 같이 주어진다<sup>(2)</sup>.

$$p(x) = \frac{2P}{\pi a^2} (a^2 - x^2)^{1/2} \quad (7)$$

이 때 최고압력  $p_0$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$p_0 = \frac{2P}{\pi a} \quad (8)$$

한편 차륜과 레일 사이에 슬립이 있을 때 마찰계수를  $\mu$ 라 하고 차륜과 레일의 탄성계수들이 ( $E, \nu$ )이 같은 경우 마찰력  $q(x)$ 은 Amonton의 마찰법칙을 적용하면 식 (8)과 같이 표현된다.

$$q(x) = \frac{2\mu P}{\pi a^2} (a^2 - x^2)^{1/2} \quad (9)$$

수직력과 마찰력이 작용하는 경우에 레일에 작용하는 응력은 그 결과를 요약하면 다음과 같다.

### 2.1 수직력이 작용할 때

식 (7)과 같은 수직력이 작용할 때의 응력을  $(\sigma_x)_p$ ,  $(\sigma_z)_p$ ,  $(\tau_{xz})_p$ 라 하면 아래와 같이 주어진다<sup>(1)</sup>.

$$(\sigma_x)_p = \frac{-p_0}{a} \left( m \left( 1 + \frac{z^2 + n^2}{m^2 + n^2} \right) - 2z \right) \quad (10)$$

$$(\sigma_z)_p = \frac{-p_0}{a} m \left( 1 - \frac{z^2 + n^2}{m^2 + n^2} \right) \quad (11)$$

$$(\tau_{xz})_p = \frac{-p_0}{a} n \left( \frac{m^2 - z^2}{m^2 + n^2} \right) \quad (12)$$

평면변형률 상태라면  $\sigma_z = v(\sigma_x + \sigma_y)$ .

여기서,

$$m^2 = \frac{1}{2} \left( (a^2 - x^2 + z^2)^2 + 4x^2 z^2 \right)^{1/2} + (a^2 - x^2 + z^2) \quad (13)$$

$$n^2 = \frac{1}{2} \left( (a^2 - x^2 + z^2)^2 + 4x^2 z^2 \right)^{1/2} - (a^2 - x^2 + z^2) \quad (14)$$

m, n의 부호는 각각 z, x의 부호와 일치한다.

## 2.2 마찰력만 작용할 때

식 (7)과 같은 수직력이 작용할 때의 응력을  $(\sigma_x)_q$ ,  $(\sigma_y)_q$ ,  $(\tau_{xz})_q$  라 하면 아래와 같이 주어진다<sup>(1)</sup>.

$$(\sigma_x)_q = \frac{\mu p_0}{a} \left( n \left( 2 - \frac{z^2 - m^2}{m^2 + n^2} \right) - 2x \right) \quad (15)$$

$$(\sigma_y)_q = \mu (\tau_{xz})_p = \frac{-\mu p_0}{a} n \left( \frac{m^2 - z^2}{m^2 + n^2} \right) \quad (16)$$

$$(\tau_{xz})_q = \mu (\sigma_x)_p = \frac{-\mu p_0}{a} \left( m \left( 1 + \frac{z^2 + n^2}{m^2 + n^2} \right) - 2z \right) \quad (17)$$

m, n은 식 (13), (14)로 주어진다.

## 2.3 수직력과 마찰력이 동시에 작용할 때

수직력과 마찰력이 동시에 작용하는 경우 접촉한 두 물체의 탄성계수들이 ( $E, \nu$ ) 같은 경우 각 하중에 의한 탄성해는 서로 간섭이 없다고 할 수 있다. 탄성계수들이 다른 경우도 간섭의 효과는 미미하다. 따라서 수직력과 마찰력이 동시에 작용하는 경우의 응력은 각 응력을 중첩하여 구할 수 있다. Fig. 3과 같은 하중이 작용할 때 레일의 표면에 (정확하게는 반 무한체의 표면) 작용하는 응력은 아래와 같이 간략하게 표현된다<sup>(1)</sup>.

$$\overline{\sigma_x} = -p_0 \left\{ (1 - x^2/a^2)^{1/2} + 2\mu x/a \right\} \quad (18)$$

$$\overline{\sigma_y} = -p_0 (1 - x^2/a^2)^{1/2} \quad (19)$$

$$\overline{\sigma_z} = -2\nu p_0 \left\{ (1 - x^2/a^2)^{1/2} + \mu x/a \right\} \quad (20)$$

$$\overline{\tau_{xz}} = -\mu p_0 (1 - x^2/a^2)^{1/2} \quad (21)$$

## 3. 구름접촉 시 레일의 온도<sup>(3)</sup>

휠과 레일 사이에 접촉력 T가 전달되기 위해서는 접촉점에서는 상대운동이 있어야 한다. 일부 영역에서는 상대운동이 있고 나머지 접촉영역에서는 상대운동이 없는 스틱-슬립이 혼재하는 경우도 있으나 여기서는 접촉영역의 모든 점에서 상대운동이 있는 경우를 대상으로 한다. 레일과 차륜의 접촉으로 생기는 온도는 제동이나 구동 시 미끄럼이 큰 경우이다. 수직력이 N이고 차륜과 레일 사이의 마찰계수가  $\mu$ 일 때 접촉력  $T = \mu N$ 이다. 차륜에 고정된 관찰자의 입장에서 볼 때 접촉영역은 차륜 표면에 대해 이동하고 접촉영역의 마찰열은 시간에 의존하는 열원이 된다. 표면의 모든 점이 접촉하고 있는 짧은 시간

동안에 열침투깊이(Thermal penetration depth)  $\delta$ 는

$$\delta = \frac{a}{L} \quad (22)$$

로 주어지며 접촉영역의 크기에 비해 매우 작다.  $L$ 는 차원이 없는 Péclet number로 표면속도와 열확산 속도의 비로 생각할 수 있다.

$$L = \frac{av}{2\kappa} \quad (23)$$

여기서  $a$ 는 접촉영역 폭의 반,  $v$ 는 이동열원의 속도,  $\kappa$ 는 열확산계수로 다음과 같이 표현된다.

$$\kappa = \frac{\lambda}{\rho c} \quad (24)$$

여기서  $\lambda$ 는 열전도도,  $\rho$ 는 밀도,  $c$ 는 비열이다.  $L > 10$ 이면 열전도는 접촉면에 수직으로만 일어난다고 할 수 있다. 휠/레일 접촉의 경우,  $a \approx 5\text{mm}$ ,  $\kappa = 14.2 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ ,  $v = 30\text{m/s}$ 일 때,  $L = 5,300$ 으로 열이 표면에 수직방향으로만 흐른다고 할 수 가정할 수 있다. 이 경우 열전도방정식은 다음과 같다.

$$\kappa \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = \frac{\partial \Theta}{\partial t} \quad (25)$$

여기서 온도의 기준점을 대기온도라 하면  $\Theta$ 는 접촉마찰력에 의한 온도의 상승을 나타낸다. 휠과 레일이 접촉 전에 대기온도 상태에 있고, 접촉영역에서 마찰열이 주어지는 경우를 고려하면 열유동은 일차원이므로 이 문제는 임의의 분포를 갖는 이동열원  $\dot{q}(t)$ 이  $t \geq 0$ 에 무한평판에 작용하는 문제와 같다. 이 문제의 해  $\Theta(z, t)$ 는 식 (24)를 만족하고 다음의 초기조건과 경계조건을 만족하여야 한다.

$$\Theta(z, t=0) = 0 \quad (26)$$

$$-\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial z}(z=0, t) = \dot{q}(t) \quad (27)$$

Carslaw와 Jaeger에 의하면 이 문제에 일반해는 다음과 같이 주어진다<sup>(3)</sup>.

$$\Theta(z, t) = \frac{1}{\beta \sqrt{\pi}} \int_0^t \dot{q}(t-t') \exp\left(-\frac{z^2}{4\kappa t'}\right) \frac{dt'}{\sqrt{t'}} \quad (28)$$

Tanvir는 접촉영역에서의 압력분포가 Hertz 해를 따를 때 이때 발생하는 마찰열을 4차 다항식으로 표현하여 Laplace 변환을 이용하여 온도분포를 구하였다. 마찰열을 4차 다항식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\dot{q}_{friction}(\xi) = \mu v_s p_0 f(\xi) \quad (29)$$

여기서

$$f(\xi) = \frac{\pi}{2048} (645 - 210\xi^2 - 315\xi^4) \text{ for } -1 \leq \xi \leq 1 \quad (30)$$

Equ. (28)에 대입하면 레일표면에서의 온도는 다음과 같이 주어진다.

$$\Theta_r(\xi) = \frac{(1-\varepsilon)\mu v_s p_0}{\beta_r} \sqrt{\frac{a}{\pi v_r}} F(\xi) \quad (31)$$

여기서

$$F(\xi) = \int_{-1}^{\xi} f(\xi') \frac{d\xi'}{\sqrt{\xi - \xi'}} \quad (32)$$

Equ. (31)은 접촉영역 밖에서도 적용된다. Equ. (31)를 적분하면 다음과 같다.

접촉영역 ( $-1 \leq \xi \leq 1$ )에서,

$$F(\xi) = \frac{\pi}{128} \sqrt{\xi+1} (71 + 12\xi - 20\xi^2 + 8\xi^3 - 16\xi^4) \quad (33)$$

접촉영역 바깥부분 ( $\xi > 1$ ),

$$F(\xi) = \frac{\pi}{128} \{ \sqrt{\xi+1} (71 + 12\xi - 20\xi^2 + 8\xi^3 - 16\xi^4) - \sqrt{\xi-1} (71 - 12\xi - 20\xi^2 - 8\xi^3 - 16\xi^4) \} \quad (34)$$

따라서 표면에서의 최대온도는 다음과 같이 주어진다.

$$\Theta_{\max} = 1.240 \frac{(1-\varepsilon)\mu v_s p_0}{\beta_r} \sqrt{\frac{a}{v_r}} \quad (35)$$

최고온도를 슬립률을 이용하여 나타내면 아래 식과 같으며 슬립률이 일정한 경우 차량속도의 평방근에 비례하여 증가함을 알 수 있다.

$$\Theta_{\max} = 1.240 \frac{(1-\varepsilon)\mu s p_0}{\beta_r} \sqrt{v_0 a} \quad (36)$$

Fig. 4는 Equ. (35)를 사용하여 구한 레일 표면에서의 온도 상승을 보여준다. Fig. 5는 슬립률 ( $s = v_s/v_0$ )을 일정하게 두고 차량속도의 변화에 대한 레일 표면에서의 최고온도를 보여준다. 계산에 사용된 상수의 값은 Table 1과 같다.

Table 1 Values of the parameters<sup>(3)</sup>

Symbol	Value	Symbol	Value
$\varepsilon$	0.5	$p_0$	770 MPa
$\mu$	0.3	$\beta = \sqrt{\lambda \rho c}$	13,290 $W_s^{0.5}/Km^2$
$v_0$	30 m/s	$a$	5.88
$v_s$	1 m/s	$b$	10.54
P	100 KN		

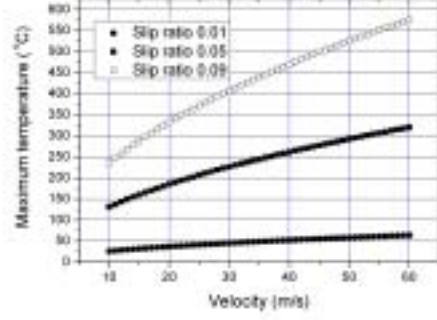
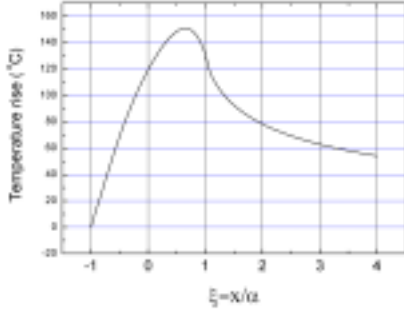


Fig. 4 Temperature rise on the rail surface Fig. 5 Maximum temperature vs. vehicle speed

#### 4. 구름접촉 마찰열에 의한 열응력

구름접촉에 의한 마찰열은 휠과 레일의 표면에 상당한 크기의 온도 상승을 유발한다. 이 온도상승은 레일과 휠의 표면에 국한되므로 이러한 온도 변화에 의한 열응력을 근사적으로 평가할 수 있다. 구름접촉에 의한 온도분포는 좁은 영역에서 일어나고 침투 깊이도 작으므로 평면응력 상태로 가정할 수 있다. 따라서 레일에 발생하는 열응력은 근사적으로 다음과 같이 주어진다<sup>(4)</sup>.

$$\sigma_x^\theta = \sigma_y^\theta = -\frac{E\alpha}{1-\nu} \Delta\theta_r \quad (37)$$

레일의 초기온도에 비해 휠의 초기온도가  $\theta_0$  만큼 높은 경우 Hertz 압력분포에 대한 온도의 근사식을 사용하면 레일에 작용하는 열응력은 다음과 같다<sup>(4)</sup>.

$$\sigma_x^\theta = \sigma_y^\theta = -\mu p_0 \mathcal{J} [f_1(\xi) + \overline{\theta}_0 f_2(\xi)] \quad (38)$$

여기서  $\mathcal{J}$ 는 Johnson number로 무차원이다.

$$\mathcal{J} = \frac{E\alpha |v_s|}{1-\nu} \sqrt{\frac{a}{\lambda \rho c v_0}} \quad (39)$$

그리고  $f_2(\xi)$ 는 참고문헌 (3)에 주어지고,  $f_1(\xi)$ 는 다음과 같이 주어진다<sup>(4)</sup>.

접촉영역 바깥부분 ( $\xi < -1$ )

$$f_1(\xi) = 0 \quad (40)$$

접촉영역 ( $-1 \leq \xi \leq 1$ ),

$$f_1(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{256} \sqrt{\xi+1} (71 + 12\xi - 20\xi^2 + 8\xi^3 - 16\xi^4) \quad (41)$$

접촉영역 바깥부분 ( $\xi > 1$ ),

$$f_1(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{256} \{ \sqrt{\xi+1}(71+12\xi-20\xi^2+8\xi^3-16\xi^4) - \sqrt{\xi-1}(71-12\xi-20\xi^2-8\xi^3-16\xi^4) \} \quad (42)$$

Fig. 6, 7은  $\Theta_0=0$ 인 경우 다시 말해 접촉 전 휠과 레일의 온도가 같은 경우 구름접촉 마찰열에 의해 접촉부에 발생하는 열응력의 크기를 Hertz 최대접촉압  $p_0$ 로 무차원화 한 경우와 절대값을 보여준다. 최대응력은 520 MPa 정도로 상당히 큰 값이다.

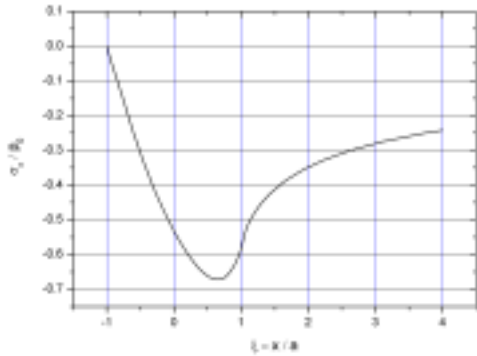


Fig. 6 구름접촉에 의한 열응력 (무차원화)

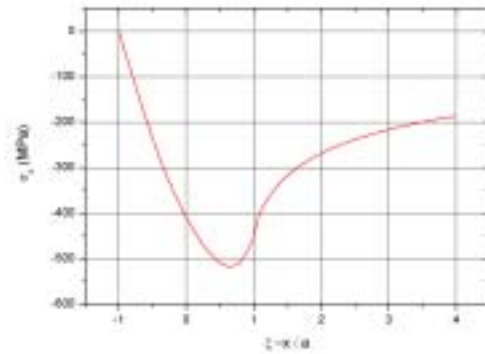


Fig. 7 구름접촉에 의한 열응력 (MPa)

## 5. 결론

본 연구에서는 레일의 라체팅에 영향을 미칠 수 있는 여러 변수 중에서 휠/레일의 접촉에 의한 응력, 레일의 온도 상승, 마찰열에 의한 열응력에 대하여 이론해를 토대로 검토하였다.

- 1) 휠/레일 마찰에 의한 레일의 온도 상승은 마찰계수, 슬립률, Hertz 최대 접촉압력에 선형적으로 비례하고, 열전도도, 밀도, 비열에는 평방근에 반비례한다.
- 2) 레일의 최대온도는 차량의 속도가 증가할수록 상승한다. 슬립률이 클수록 상승의 정도가 크다. 마찰계수  $\mu=0.3$ , 슬립속도  $v_s=1$ , 차량속도  $v_0=30$  m/s 일 때 최대 온도는 약  $150^\circ\text{C}$ 이다.
- 3) 휠/레일 마찰열에 의한 레일의 열응력은 마찰계수  $\mu=0.3$ , 슬립속도  $v_s=1$ , 차량속도  $v_0=30$  m/s 일 때 최대응력은  $-520$  MPa 정도로 상당히 큰 값이다.
- 4) 차량속도와 슬립률이 큰 경우 레일의 최고온도는 변태점 이상까지 상승할 수 있고, 발생하는 열응력도 항복강도를 초과할 수 있으므로 레일의 온도상승과 열응력은 레일 손상의 한 원인이 될 수 있음을 알 수 있다. 따라서 레일의 라체팅 해석에서도 이러한 사실을 반영하여야 할 것으로 판단된다.

## 감사의 글

본 연구는 건교부의 철도종합안전기술개발사업 중 ‘철도차량 탈선 안전성능평가 및 사고방지기술 개발’ 과제의 지원으로 수행되었습니다. 관계자 여러분께 감사드립니다.

## 참고문헌

1. K. L. Johnson (1985), "Contact Mechanics," Cambridge University Press.
2. A. C. Ugural, S. K. Fenster (1981), "Advanced Strength and Applied Elasticity," Elsevier.
3. M. Ertz, K. Knothe (2002), "A Comparison of analytical and numerical methods for the calculation of temperatures in wheel/rail contact," Wear 253, pp. 498-508.
4. A. Böhmer, M. Ertz, K. Knothe (2003), "Shakedown limit of rail surfaces including material hardening and thermal stress," Fatigue Frac Engng Mater Struc 26, pp. 985-998.