

# 회전축에 대한 스펙트럴요소 모델링

## Spectral Element Modeling for Rotating Shafts

이재상\*  
Lee, Jeasang

용석진\*\*  
Yong, Sukjin

이우식\*\*\*  
Lee, Usik

---

### ABSTRACT

In this paper, the vibration of a rotating shaft with a thin rigid disk is considered. It is assumed that the shaft has uniform, circular cross-section. Based on the Timoshenko-beam theory, the transverse displacements and slops in two lateral directions, the axial displacement, and the torsional deformation are considered. The spectral element method is used for the vibration analysis of the rotating shaft with a thin rigid disk, which is modeled by two shaft elements and a thin rigid disk element.

---

### 1. 서 론

회전축은 컴퓨터 하드디스크, 항공기의 가스터빈 엔진, 연마기 및 차량의 동력전달 축 등 현대산업에서 많이 사용된다. 회전축의 주축과 기하학적 축이 서로 떨어져 있을 때 발생하게 되는 질량의 불균형은 진동을 야기하는 일반적인 요소이다. 또한 축의 고속회전은 더욱 큰 불균형 힘의 원인이 되고 최근 회전축을 사용하는 장비들은 고속회전을 요구하고 있다. 그러므로 진동해석은 경면가공, 베어링의 수명, 그리고 고속회전이 요구되는 가공기계 등에서는 필수적이다. 고속회전 터빈, 압축기 등 전력발전 산업에 사용 되는 회전기계에 있어서 정확한 진동해석은 매우 큰 비용절감을 가능하게 한다.

평면운동 회전체 모델(planar rotor model)은 1919년 Jeffcott[1]에 의해서 처음 소개되었다. Jeffcott의 모델은 고정된 강체 베어링에 물려있는 회전체를 질량이 없는 탄성축에 의해 지지된 강체 디스크였다. 좀 더 복잡한 회전체로 유연한 회전체 모델이 개발되었는데 이는 회전하는 동안 회전체의 탄성변형이 고려된 모델로 강체 회전체 모델보다 더욱 정확하다.

회전체를 해석하는 방법에는 크게 두 가지 방법이 사용되었다. 이는 유한요소법과 전달행렬법이다. 1972년 Ruhl과 Booker[2]는 회전체의 동역학적 특성 연구에 유한요소방법을 사용하였다. 이 연구에서는 탄성 굽힘과 병진운동에너지는 포함하였지만 회전관성효과, 회전효과(gyroscopic effect), 축방향 토크, 축방향력, 그리고 내부 감쇠는 무시하였다. Dimaragonas[3]는 1975년에 회전관성과 회전효과 그리고 내부 감쇠가 고려된 좀 더 일반적인 모델을 제시하였고, Gasch[4]는 1976년에 Dimaragonas의 모델에 편심효과를 고려한 모델을 제시하였다. 같은 해에 Nelson과 McVaugh[5]은 회전관성과 회전모멘트(gyroscopic moments)와 축방향력이 포함된 모델을 제시하였고 Zorzi와 Nelson[6]이 내부 감쇠를 포함하여 일반화하였다. 또한 Nelson[7]은 1980년에 전단변형효과가 추가된 모델을 제시하였다. 유한요소방법은 많은 요소를 사용할수록 해가 정확해지지만 이를 계산하는 데 많은 시간이 필요하다는 단점을 가지고 있다. Lund와 Orcutt[8]는 1967년에 처음으로 회전체 동역학에 전달행렬법을 적용하였다. 이 방법은 사용하는

---

\* 인하대학교 기계공학과 석사과정

\*\* 인하대학교 기계공학과 석사과정

\*\*\* 교신저자, 정회원, 인하대학교 기계공학과 교수

E-mail : ulee@inha.ac.kr

TEL : (032)860-7318 FAX : (032)866-1434

행렬의 사이즈가 유한요소법에 비해 작다는 장점이 있다. 하지만 Kumar와 Sankar[9]는 1984년에 시간영역에서와 비선형문제의 해석에 어려움이 있다는 단점을 제시하였다.

본 연구에서는 위 두 방법의 단점을 보완할 수 있고 회전체의 진동해석에 있어 아직 사용 되지 않은 스펙트럴요소방법을 통해 모델링을 수행하였다.

## 2. 회전축에 대한 스펙트럴요소 행렬 유도

회전축에 대한 축방향 변위, 비틀림 변위, 그리고 티모센코 보이론에 따르는 횡방향 변위와 기울기에 대한 각각의 지배방정식을 도출하였다. 그리고 각각의 경우에 따라 스펙트럴요소 행렬을 도출해 내어 이를 중첩함으로써 회전축에 대한 스펙트럴요소 행렬을 유도할 수 있었다.

축방향 변위에 대한 지배 방정식은 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, t) \quad (1)$$

여기서 E는 탄성계수,  $\rho$ 는 질량 밀도, 그리고 A는 축의 단면적이다. 또한 위 식 (1)의 해는 다음처럼 가정할 수 있다.

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{u}_n(x; \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (2)$$

이를 위의 (1)식에 적용하여 다음의 스펙트럴요소 행렬을 유도할 수 있다.[10]

$$\bar{\mathbf{F}}_x = \begin{bmatrix} s_{u11} & s_{u12} \\ s_{u21} & s_{u22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

여기서,

$$s_{u11} = s_{u22} = \frac{EA}{L} (k_u L) \cot(k_u L), \quad s_{u12} = s_{u21} = -\frac{EA}{L} (k_u L) \operatorname{csc}(k_u L) \quad (4)$$

$$k_u = \omega_n \sqrt{\frac{\rho A}{EA}}$$

비틀림 변위에 대한 지배방정식은 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( GI_a \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \rho I_a \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \tau(x, t) \quad (5)$$

여기서 G는 전단탄성계수이며  $I_a$ 는 축방향의 관성모멘트이다. 또한 위 식 (5)의 해는 다음처럼 가정할 수 있다.

$$\theta(x, t) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{\theta}_n(x; \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (6)$$

이 역시 식 (5)에 적용되어 다음의 스펙트럴요소 행렬을 유도할 수 있다.[10]

$$\bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} s_{\theta11} & s_{\theta12} \\ s_{\theta21} & s_{\theta22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

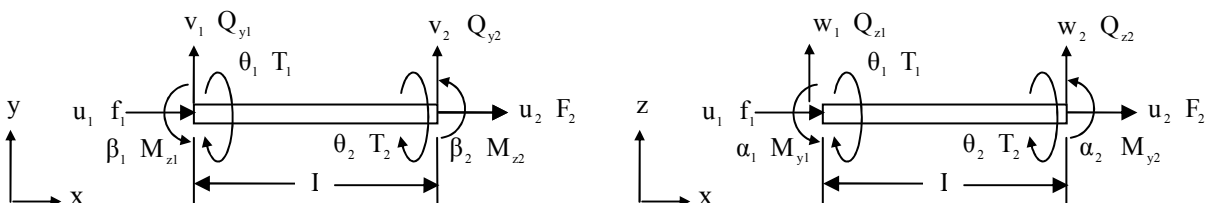


그림 1. 회전축에 대한 자유도와 외력

여기서,

$$s_{\theta 11} = s_{\theta 22} = \frac{GI_a}{L}(k_\theta L)\cot(k_\theta L), \quad s_{\theta 12} = s_{\theta 21} = -\frac{GI_a}{L}(k_\theta L)\csc(k_\theta L) \quad (8)$$

$$k_\theta = \omega_n \sqrt{\frac{\rho I_a}{GI_a}}$$

티모셴코 보이론에 따른 횡방향 변위와 기울기에 대한 지배 방정식은 다음과 같다.[11]

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \beta \right) \right] &= f_y \\ \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \kappa GA \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \alpha \right) \right] &= f_z \\ \rho I \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} - \Omega \rho I_a \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) - \kappa GA \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \beta \right) &= \tau_z \\ \rho I \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \Omega \rho I_a \frac{\partial \beta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) + \kappa GA \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \alpha \right) &= \tau_y \end{aligned} \quad (9)$$

여기서  $I$ 는 축의 단면지름 방향의 관성 모멘트이며,  $\kappa GA$ 는 유효 전단계수(effective shear modulus)이고  $\Omega$ 는 축방향의 회전속도이다.  $y$ 축방향 변위  $v$ 와 기울기  $\alpha$ ,  $z$ 축방향 변위  $w$ 와 기울기  $\beta$ 의 해는 다음과 같이 가정될 수 있다.

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \sum_{n=0}^{N-1} \bar{v}_n(x; \omega_n) e^{i\omega_n t}, & \beta(x, t) &= \sum_{n=0}^{N-1} \bar{\beta}_n(x; \omega_n) e^{i\omega_n t} \\ w(x, t) &= \sum_{n=0}^{N-1} \bar{w}_n(x; \omega_n) e^{i\omega_n t}, & \alpha(x, t) &= \sum_{n=0}^{N-1} \bar{\alpha}_n(x; \omega_n) e^{i\omega_n t} \end{aligned} \quad (10)$$

위 식(10)의 각 스펙트럴성분은 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} \bar{v}_n(x) &= c e^{-ik_n x}, & \bar{\beta}_n(x) &= g c e^{-ik_n x} \\ \bar{w}_n(x) &= h c e^{-ik_n x}, & \bar{\alpha}_n(x) &= h g^* c e^{-ik_n x} \end{aligned} \quad (11)$$

위의  $k_n$ 은 고유치 문제에 의해 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} k_{n1} &= -\sqrt{\frac{\eta_1 k_F^4 + k_G^4}{2} - \frac{\sqrt{\eta_1^2 k_G^8 - 2\eta_1 \eta_2 k_G^8 - 2i\eta_1 k_G^4 J - J^2 + \eta_2^2 k_G^8 + 4\eta_2 k_G^4 + 2i\eta_2 k_G^4 J} - iJ}{2\eta_2}} \\ k_{n3} &= -\sqrt{\frac{\eta_1 k_F^4 + k_G^4}{2} + \frac{\sqrt{\eta_1^2 k_G^8 - 2\eta_1 \eta_2 k_G^8 - 2i\eta_1 k_G^4 J - J^2 + \eta_2^2 k_G^8 + 4\eta_2 k_G^4 + 2i\eta_2 k_G^4 J} - iJ}{2\eta_2}} \\ k_{n5} &= -\sqrt{\frac{\eta_1 k_F^4 + k_G^4}{2} - \frac{\sqrt{\eta_1^2 k_G^8 - 2\eta_1 \eta_2 k_G^8 + 2i\eta_1 k_G^4 J - J^2 + \eta_2^2 k_G^8 + 4\eta_2 k_G^4 - 2i\eta_2 k_G^4 J} + iJ}{2\eta_2}} \\ k_{n7} &= -\sqrt{\frac{\eta_1 k_F^4 + k_G^4}{2} + \frac{\sqrt{\eta_1^2 k_G^8 - 2\eta_1 \eta_2 k_G^8 + 2i\eta_1 k_G^4 J - J^2 + \eta_2^2 k_G^8 + 4\eta_2 k_G^4 - 2i\eta_2 k_G^4 J} + iJ}{2\eta_2}} \\ k_{n2} &= -k_{n1}, \quad k_{n4} = -k_{n3}, \quad k_{n6} = -k_{n5}, \quad k_{n8} = -k_{n7} \end{aligned} \quad (12)$$

또한 상수  $g$ ,  $g^*$ ,  $h$ 는 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} g_j &= \frac{1}{i k_{n_j}} (k_{n_j}^2 - k_G^4) \quad (j=1, 2, \dots, 8) \\ g_j^* &= -\frac{1}{i k_{n_j}} (k_{n_j}^2 - k_G^4) = -g_j \\ h_j &= \frac{i k_{n_j} + (\eta_2 k_{n_j}^2 - \eta_1 k_G^4) g_j}{J g_j^*} = \frac{J g_j}{i k_{n_j} - (\eta_2 k_{n_j}^2 - \eta_1 k_G^4) g_j^*} = i \end{aligned} \quad (13)$$

여기서,

$$k_F = \sqrt{\omega_n \left( \frac{\rho A}{EI} \right)^{1/4}}, \quad k_G = \sqrt{\omega_n \left( \frac{\rho A}{\kappa GA} \right)^{1/4}} \quad (14)$$

$$\eta_1 = \frac{\rho I}{\rho A}, \quad \eta_2 = \frac{EI}{\kappa GA}, \quad J = \Omega \rho I_a i \omega_n$$

여기서 얻어진 스펙트럴요소 행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{S}_T = \mathbf{G} \cdot \mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} S_{T11} & S_{T12} & S_{T13} & S_{T14} & S_{T15} & S_{T16} & S_{T17} & S_{T18} \\ S_{T21} & S_{T22} & S_{T23} & S_{T24} & S_{T25} & S_{T26} & S_{T27} & S_{T28} \\ S_{T31} & S_{T32} & S_{T33} & S_{T34} & S_{T35} & S_{T36} & S_{T37} & S_{T38} \\ S_{T41} & S_{T42} & S_{T43} & S_{T44} & S_{T45} & S_{T46} & S_{T47} & S_{T48} \\ S_{T51} & S_{T52} & S_{T53} & S_{T54} & S_{T55} & S_{T56} & S_{T57} & S_{T58} \\ S_{T61} & S_{T62} & S_{T63} & S_{T64} & S_{T65} & S_{T66} & S_{T67} & S_{T68} \\ S_{T71} & S_{T72} & S_{T73} & S_{T74} & S_{T75} & S_{T76} & S_{T77} & S_{T78} \\ S_{T81} & S_{T82} & S_{T83} & S_{T84} & S_{T85} & S_{T86} & S_{T87} & S_{T88} \end{bmatrix} \quad (15)$$

여기서,

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ g_1 & -g_1 & g_3 & -g_3 & g_5 & -g_5 & g_7 & -g_7 \\ i & i & i & i & -i & -i & -i & -i \\ -ig_1 & ig_1 & -ig_3 & ig_3 & ig_5 & -ig_5 & ig_7 & -ig_7 \\ e_1 & \bar{e}_1 & e_3 & \bar{e}_3 & e_5 & \bar{e}_5 & e_7 & \bar{e}_7 \\ g_1 e_1 & -g_1 \bar{e}_1 & g_3 e_3 & -g_3 \bar{e}_3 & g_5 e_5 & -g_5 \bar{e}_5 & g_7 e_7 & -g_7 \bar{e}_7 \\ ie_1 & i\bar{e}_1 & ie_3 & i\bar{e}_3 & -ie_5 & -i\bar{e}_5 & -ie_7 & -i\bar{e}_7 \\ -ig_1 e_1 & ig_1 \bar{e}_1 & -ig_3 e_3 & ig_3 \bar{e}_3 & ig_5 e_5 & -ig_5 \bar{e}_5 & ig_7 e_7 & -ig_7 \bar{e}_7 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{G} = \kappa GA \begin{bmatrix} M_1 & -M_1 & M_3 & -M_3 & M_5 & -M_5 & M_7 & -M_7 \\ iP_1 & iP_1 & iP_3 & iP_3 & iP_5 & iP_5 & iP_7 & iP_7 \\ -O_1 & O_1 & -O_3 & O_3 & O_5 & -O_5 & O_7 & -O_7 \\ P_1 & P_1 & P_3 & P_3 & -P_5 & -P_5 & -P_7 & -P_7 \\ -M_1 e_1 & M_1 \bar{e}_1 & -M_3 e_3 & M_3 \bar{e}_3 & -M_5 e_5 & M_5 \bar{e}_5 & -M_7 e_7 & M_7 \bar{e}_7 \\ -iP_1 e_1 & -iP_1 \bar{e}_1 & -iP_3 e_3 & -iP_3 \bar{e}_3 & -iP_5 e_5 & -iP_5 \bar{e}_5 & -iP_7 e_7 & -iP_7 \bar{e}_7 \\ O_1 e_1 & -O_1 \bar{e}_1 & O_3 e_3 & -O_3 \bar{e}_3 & -O_5 e_5 & O_5 \bar{e}_5 & -O_7 e_7 & O_7 \bar{e}_7 \\ -P_1 e_1 & -P_1 \bar{e}_1 & -P_3 e_3 & -P_3 \bar{e}_3 & P_5 e_5 & P_5 \bar{e}_5 & P_7 e_7 & P_7 \bar{e}_7 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$e_j = e^{-ik_{nj}L}, \quad \bar{e}_j = e^{ik_{nj}L}, \quad M_j = ik_{nj} + g_j, \quad O_j = k_{nj} - ig_j, \quad P_j = \eta_2 k_{nj} g_j$$

### 3. 디스크에 대한 스펙트럴요소 행렬 유도

회전축의 임펄러 등을 얇은 강체 디스크로 모델링하여 운동방정식을 유도하였다. 이는 회전축과 같이 축방향 변위, 그리고 티모셴코 보이론에 의한 횡방향 변위와 기울기로 자유도를 나타낼 수 있다. 디스크의 운동방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.[10]

$$\begin{bmatrix} m_D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\alpha} \end{Bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{\beta} \\ \dot{w} \\ \dot{\alpha} \end{Bmatrix} + \dot{\Omega} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \beta \\ w \\ \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_D \\ Q_{Dy} \\ M_{Dz} \\ Q_{Dz} \\ M_{Dy} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

여기서  $m_D$ 는 디스크의 질량이고  $I_{11}$ ,  $I_{22}$ ,  $I_{33}$ 은 각각  $x$ ,  $y$ ,  $z$ 축에 대한 관성모멘트이다. 위의 식 (18)을 스펙트럴요소 형태로 나타내면 두 가지 경우를 생각할 수 있다.

먼저 축의 회전속도인  $\Omega$ 가 시간에 따라 변하는 값일 경우  $\Omega$ 와 자유도의 곱으로 되어있는 항들은 모두 두 개의 시간의 함수 곱으로 나타나 비선형 항이 된다. 이는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 m_D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2 I_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega^2 m_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega^2 I_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{\beta} \\ \bar{w} \\ \bar{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_D \\ \bar{Q}_{Dy} \\ \bar{M}_{Dz} \\ \bar{Q}_{Dz} \\ \bar{M}_{Dy} \end{bmatrix} + \text{Nonlinear Terms} \quad (19)$$

그리고 축의 회전속도인  $\Omega$ 가 상수일 경우 회전가속도항이 0이 되어 스펙트럴요소 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 m_D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2 I_{33} & 0 & -i\omega\Omega I_{11} \\ 0 & 0 & 0 & -\omega^2 m_D & 0 \\ 0 & 0 & i\omega\Omega I_{11} & 0 & -\omega^2 I_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{\beta} \\ \bar{w} \\ \bar{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_D \\ \bar{Q}_{Dy} \\ \bar{M}_{Dz} \\ \bar{Q}_{Dz} \\ \bar{M}_{Dy} \end{bmatrix} \quad (20)$$

#### 4. 스펙트럴요소 행렬의 결합

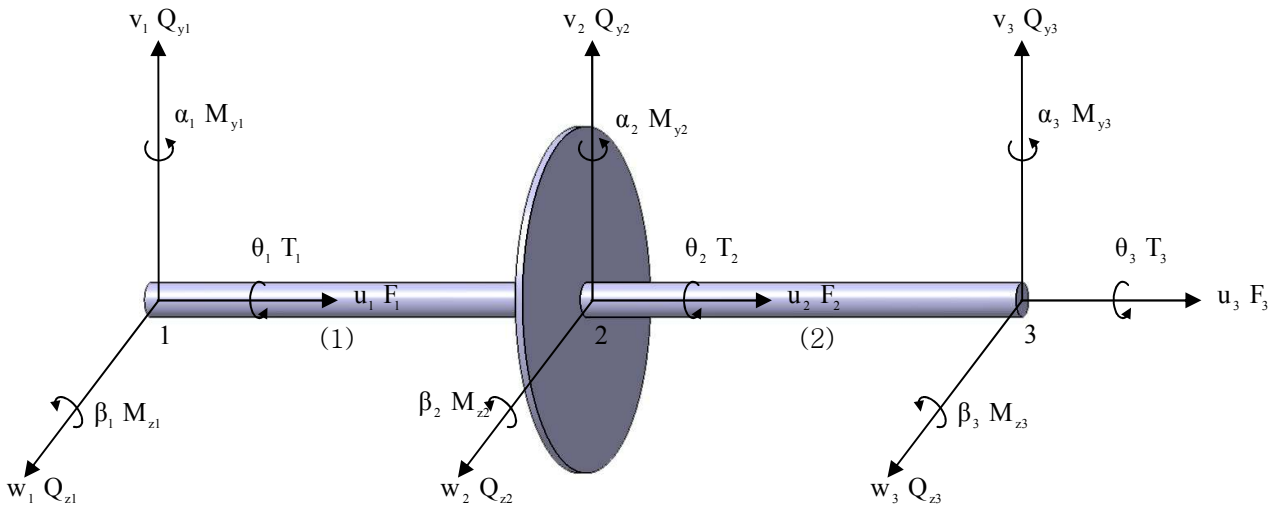


그림 2. 요소 결합에 대한 자유도와 외력

이 논문에서는 보다 간단한 경우인  $\Omega$ 가 상수일 경우에 대해 고찰해보았다. 이 경우 스펙트럴요소 식의 결합은 다음과 같다.

$$\bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} & \mathbf{S}_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{32} & \mathbf{S}_{33} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{d}} \quad (21)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}} &= \{\bar{F}_1, \bar{T}_1, \bar{Q}_{y1}, \bar{M}_{z1}, \bar{Q}_{z1}, \bar{M}_{y1}, \dots, \bar{F}_3, \bar{T}_3, \bar{Q}_{y3}, \bar{M}_{z3}, \bar{Q}_{z3}, \bar{M}_{y3}\}^T \\ \bar{\mathbf{d}} &= \{\bar{u}_1, \bar{\theta}_1, \bar{v}_1, \bar{\beta}_1, \bar{w}_1, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{u}_3, \bar{\theta}_3, \bar{v}_3, \bar{\beta}_3, \bar{w}_3, \bar{\beta}_3\}^T \end{aligned} \quad (22)$$

그리고 스펙트럴요소 행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{S}_{11} = \begin{bmatrix} s_{u11}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{\theta11}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{T11}^1 & s_{T12}^1 & s_{T13}^1 & s_{T14}^1 \\ 0 & 0 & s_{T21}^1 & s_{T22}^1 & s_{T23}^1 & s_{T24}^1 \\ 0 & 0 & s_{T31}^1 & s_{T32}^1 & s_{T33}^1 & s_{T34}^1 \\ 0 & 0 & s_{T41}^1 & s_{T42}^1 & s_{T43}^1 & s_{T44}^1 \end{bmatrix}, \mathbf{S}_{12} = \begin{bmatrix} s_{u12}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{\theta12}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{T15}^1 & s_{T16}^1 & s_{T17}^1 & s_{T18}^1 \\ 0 & 0 & s_{T25}^1 & s_{T26}^1 & s_{T27}^1 & s_{T28}^1 \\ 0 & 0 & s_{T35}^1 & s_{T36}^1 & s_{T37}^1 & s_{T38}^1 \\ 0 & 0 & s_{T45}^1 & s_{T46}^1 & s_{T47}^1 & s_{T48}^1 \end{bmatrix}, \mathbf{S}_{21} = \begin{bmatrix} s_{u21}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{\theta21}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{T51}^1 & s_{T52}^1 & s_{T53}^1 & s_{T54}^1 \\ 0 & 0 & s_{T61}^1 & s_{T62}^1 & s_{T63}^1 & s_{T64}^1 \\ 0 & 0 & s_{T71}^1 & s_{T72}^1 & s_{T73}^1 & s_{T74}^1 \\ 0 & 0 & s_{T81}^1 & s_{T82}^1 & s_{T83}^1 & s_{T84}^1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_{22} = \begin{bmatrix} s_{u22}^1 + s_{u11}^2 - \omega^2 m_D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{022}^1 + s_{011}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{T55}^1 + s_{T11}^2 - \omega^2 m_D & s_{T56}^1 + s_{T12}^2 & s_{T57}^1 + s_{T13}^2 & s_{T58}^1 + s_{T14}^2 \\ 0 & 0 & s_{T65}^1 + s_{T21}^2 & s_{T66}^1 + s_{T22}^2 - \omega^2 I_{33} & s_{T67}^1 + s_{T23}^2 & s_{T68}^1 + s_{T24}^2 - i\omega\Omega I_{11} \\ 0 & 0 & s_{T75}^1 + s_{T31}^2 & s_{T76}^1 + s_{T32}^2 & s_{T77}^1 + s_{T33}^2 - \omega^2 m_D & s_{T78}^1 + s_{T34}^2 \\ 0 & 0 & s_{T85}^1 + s_{T41}^2 & s_{T86}^1 + s_{T42}^2 + i\omega\Omega I_{11} & s_{T87}^1 + s_{T43}^2 & s_{T88}^1 + s_{T44}^2 - \omega^2 I_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_{23} = \begin{bmatrix} s_{u12}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{012}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{T15}^2 & s_{T16}^2 & s_{T17}^2 & s_{T18}^2 \\ 0 & 0 & s_{T25}^2 & s_{T26}^2 & s_{T27}^2 & s_{T28}^2 \\ 0 & 0 & s_{T35}^2 & s_{T36}^2 & s_{T37}^2 & s_{T38}^2 \\ 0 & 0 & s_{T45}^2 & s_{T46}^2 & s_{T47}^2 & s_{T48}^2 \end{bmatrix}, \mathbf{S}_{32} = \begin{bmatrix} s_{u21}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{021}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{T51}^2 & s_{T52}^2 & s_{T53}^2 & s_{T54}^2 \\ 0 & 0 & s_{T61}^2 & s_{T62}^2 & s_{T63}^2 & s_{T64}^2 \\ 0 & 0 & s_{T71}^2 & s_{T72}^2 & s_{T73}^2 & s_{T74}^2 \\ 0 & 0 & s_{T81}^2 & s_{T82}^2 & s_{T83}^2 & s_{T84}^2 \end{bmatrix}, \mathbf{S}_{33} = \begin{bmatrix} s_{u22}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{022}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{T55}^2 & s_{T56}^2 & s_{T57}^2 & s_{T58}^2 \\ 0 & 0 & s_{T65}^2 & s_{T66}^2 & s_{T67}^2 & s_{T68}^2 \\ 0 & 0 & s_{T75}^2 & s_{T76}^2 & s_{T77}^2 & s_{T78}^2 \\ 0 & 0 & s_{T85}^2 & s_{T86}^2 & s_{T87}^2 & s_{T88}^2 \end{bmatrix}$$

## 5. 결론

본 연구에서는 이제까지 회전축에 대해 적용되지 않았던 스펙트럴요소 모델링을 유도하였다. 앞으로 이러한 모델링을 통한 해석과 지금까지 널리 사용 되어왔던 유한요소법이나 전달행렬법등의 해석과 비교를 통해 스펙트럴요소 모델링과의 차이를 제시하는 후행연구가 진행되어야 한다. 또한 축방향 회전속도인  $\Omega$ 가 시간에 따라 변하는 경우와 편심된 디스크의 경우를 고려하는 후행연구도 진행되어야 할 것이다.

## 후 기

본 연구는 2006년도 산학협력실 지원사업에 의해 지원되었습니다.

## 참고 문헌

1. Jeffcott, H. H. (1919) "Lateral Vibration of Loaded Shafts in the Neighborhood of a Whirling Speed-The Effect of Want of Balance," *Philosophical Magazine*, Vol. 37, 304-314.
2. Ruhl, R. L., and Booker, J. F. (1972) "A Finite Element Model for Distributed Parameter Turbo-rotor System," *Transactions of ASME, Journal of Engineering for Industry*, February, 126-132.
3. Dimarogonas, A. D. (1975) "A General Method for Stability Analysis of Rotating Shafts," *Ingenieur-Archiv*, Vol. 44, 9-20.
4. Gasch, R. (1976) "Vibration of Large Turbo-Rotors in Fluid-Film Bearings on an Elastic Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 47, 53-73.
5. Nelson, H. D., and McVaugh, J. M. (1976) "The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements," *ASME Transactions, Journal of Engineering for Industry*, May, 593-600.
6. Zorzi, E. S., and Nelson, H. D. (1977) "Finite Element Simulation of Rotor-Bearing Systems with Internal Damping," *Journal of Engineering for Power, Series A*, Vol. 99, No. 1, 71-76.
7. Nelson, H. D. (1980) "A Finite Rotating Shaft Element Using Timoshenko Beam Theory," *ASME Transactions, Journal of Mechanical Design*, Vol. 102, 793-803.
8. Lund, J. W., and Orcutt, F. K. (1967) "Calculations and Experiments on the Unbalance Response of a Flexible Rotor," *ASME Transactions, Journal of Engineering for Industry*, Vol. 89, 785-796.
9. Kumar, A. S., and Sankar, T. S. (1984) "A New Transfer Matrix Method for Response Analysis of Large Dynamic Systems," *Computers and Structures*, Vol. 23, 545-552.
10. Lee, U. (2004) "Spectral Element Method in Structural Dynamics," Inha University Press, Incheon, Korea.
11. Ehrich, F. F. (1992) "Handbook of Rotordynamics," McGraw-Hill, New York.