

# 전위그래프와 *RFM*그래프 사이의 일-대-일 노드 사상 방법

심현\*, 이형옥\*\*

\*순천대학교 컴퓨터공학과

\*\*순천대학교 컴퓨터교육과

e-mail: simhyun@sunchon.ac.kr, oklee@sunchon.ac.kr

## One-to-One Node Mapping Analysis for the Transposition and *RFM* graphs

Sim Hyun\* Lee Hyeong-Ok\*\*

\*Dept of Computer Science, Sunchon National University

\*\*Dept of Computer Education, Sunchon National University

### 요 약

전위그래프는 스타 그래프와 그의 변형 그래프를 포함할 수 있는 일반화된 그래프이다. *RFM* 그래프는 스타 그래프가 갖는 좋은 성질을 가지면서 하이퍼큐브보다 망 비용이 적은 값을 갖는 상호연결망이다. 본 논문에서는 그래프의 에지 정의를 이용하여 전위그래프와 *RFM*그래프 사이의 노드를 일-대-일 사상하는 방법을 제시한다. 이러한 사상 결과를 통해 전위그래프는 *RFM*그래프에 연장율 4, 확장율 1에 임베딩 가능하고, *RFM*그래프는 전위그래프에  $O(n)$ 에 임베딩 가능하다.

### 1. 서론

최근 반도체 기술의 발달과 높은 성능을 요구하는 응용 분야의 증대로 고성능 컴퓨터에 대한 관심이 증대하고 있다. 고성능을 얻기 위한 방법으로 병렬처리에 대한 필요성이 크게 증가하여 병렬컴퓨터에 대한 연구가 많이 진행되고 있다. 병렬컴퓨터는 크게 공유 기억 장치를 갖는 다중프로세서(multiprocessor) 시스템과 분산 기억장치를 사용하는 다중컴퓨터(multicomputer) 시스템으로 분류한다. 다중컴퓨터 시스템은 각각의 프로세서들이 자신의 기억 장치를 갖고 각 프로세서는 상호연결망에 의해 연결되어 있으며 프로세서간의 통신은 상호 연결망을 통하여 메시지 전송방식으로 이루어진다[5]. 다중컴퓨터에서 상호연결망은 전체 시스템의 성능과 시스템의 확장성에 큰 영향을 미친다. 지금까지 널리 알려진 상호연결망으로 메쉬, 하이퍼큐브, 스타그래프 등이 있다. 상호연결망을 평가하는 척도는 분지수(degree), 지름(diameter), 대칭성(symmetry), 확장성(scalability), 고장허용도(fault tolerance), 임베딩(embedding) 등이 있다. 상호연결망의 임베딩은 어떤 그래프  $G$ 가 다른 그래프  $H$ 에 포함 혹은 어떻게 연관되어 있는지를 알아보기 위해 그래프들간의 관계를 분석하기 위한 평가 척도이다. 그래프  $G$ 가 다른 그래프  $H$ 에 적은 비용으로 임베딩 가능하다는 것은 연결망  $G$ 에서 개발된 알고리즘을 연결망  $H$ 에서 적은 비용으로 효율적으로 이용할 수 있기 때문에 상호연결망의 임베딩 평가는 의미가 있다[1,6].

본 논문에서는 스타그래프 부류로 알려진 전위그래프와

*RFM*그래프간의 임베딩을 분석한다. 논문의 구성은 2장에서 본 연구에서 적용되는 그래프의 정의와 성질을 그래프 이론 관점에서 알아보고, 3장에서 임베딩 방법과 연장율을 분석하고, 마지막으로 결론을 맺는다.

### 2. 상호연결망

상호연결망은 각 프로세서를 노드로 프로세서들 간의 통신 채널을 에지로 나타내는 무방향 그래프  $G=(V,E)$ 로 표현된다. 여기서  $V(G)$ 는 노드들의 집합 즉  $V(G)=\{0,1,2,\dots,N-1\}$ 이고,  $E(G)$ 는 에지의 집합으로써  $V(G)$  내의 임의의 두 노드  $v$ 와  $w$ 의 쌍  $(v,w)$ 으로서 에지  $(v,w)$ 가 존재할 필요충분조건은 노드  $v$ 와  $w$  사이에 통신 채널이 존재하는 것이다[7]. 지금까지 제안된 상호연결망을 노드 수를 중심으로 분류하면  $n \times k$ 개 노드를 갖는 메쉬 부류,  $2^n$ 개 노드를 갖는 하이퍼큐브[1,5] 부류,  $n!$ 개 노드를 갖는 스타그래프 부류로 나눌 수 있다. 스타그래프 부류는 스타(star)그래프[2], 팬케익(pancake)그래프[2], Rotator 그래프[3,8], Faber-Moore 그래프[4], *RFM* 그래프[8], 행렬-스타(matrix-star)그래프[9], 전위그래프[7] 등이 제안되었다.

$n$ -차원 Rotator-Faber-Moore(이하 *RFM<sub>n</sub>*) 그래프는  $n$ 개 심볼  $\{1,2,3,\dots,n\}$ 의 순열로 노드를 나타내고, 노드간의 연결 관계는 방향그래프인 Rotator 그래프와 Faber-Moore 그래프의 에지 발생기 즉, 차원에지를 함께 적용하여 에지를 정의하고 있다[8]. Rotator 그래프의 차원에지  $R^i$ 는  $(123\dots i\dots n) \rightarrow (23\dots i1\dots n)$ ,  $2 \leq i \leq n$ 이고, Faber-Moore 그래프의 차원에지  $F^j$ 는  $(123\dots j-1jj+1\dots n) \rightarrow$

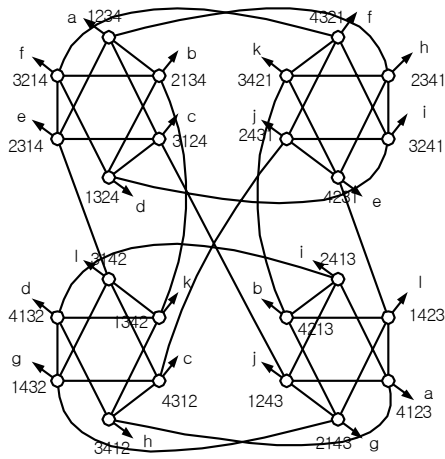
$(j123\dots j-1j+1\dots n)$ ,  $2 \leq j \leq n$ 이다.  $n$ 개의 서로 다른 집합  $\langle N \rangle = \{1, 2, \dots, n\}$  이라 하고,  $\langle N \rangle$ 의 순열  $r_1 r_2 \dots r_i \dots r_n$ ,  $r_i \in \langle N \rangle$  이라 하면  $RFM_n$  그래프는 다음과 같이 정의된다.

$$V(RFM_n) = \{(r_1 r_2 \dots r_i \dots r_n) \mid r_i \in \langle N \rangle, i \neq j, r_i \neq r_j\}$$

$$E(RFM_n) = (R^i, F^j)$$

$$R^i : \{(r_1 r_2 \dots r_i \dots r_n)(r_2 p_3 p_4 \dots r_i r_1 \dots r_n) \mid (r_1 r_2 \dots r_i \dots r_n) \in V(RFM_n), 2 \leq i \leq n\}$$

$$F^j : \{(r_1 r_2 \dots r_{j-1} r_j r_{j+1} \dots r_n)(r_j r_1 r_2 \dots r_{j-1} r_{j+1} \dots r_n) \mid (r_1 r_2 \dots r_{j-1} r_j r_{j+1} \dots r_n) \in V(RFM_n), 2 \leq j \leq n\}$$



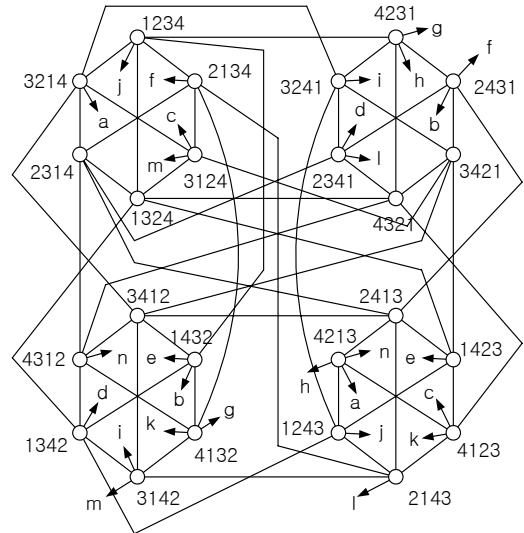
(그림 3) 4 차원 RFM 그래프

$RFM_n$  그래프는  $n!$ 개의 노드 개수를 갖고, 분지수가  $2n-3$ 이고 노드 대칭적인 정규연결망임이 알려졌다.  $RFM_n$  그래프의 지름은  $n-1$ 이고, 최대 고장허용도를 갖고, 노드 중복하지 않는 싸이클이 존재하고, 일-대-다 방송 알고리즘이 제시되었다. 또한 임베딩에 있어서는 스타그래프  $S_n$ 을  $RFM_n$  그래프에 연장을 2, 버블정렬 그래프  $B_n$ 를  $RFM_n$  그래프에 연장을 2, 2차원 토러스  $n \times (n-1)!$ 을  $RFM_n$  그래프에 연장을 2로 임베딩한 결과가 있다[8].

$n$ -차원 전위(Transposition) 그래프  $T_n$ 은  $n!$ 개의 노드와  $n(n-1)n!/4$ 개의 에지로 구성된다. 각 노드의 주소는  $n$ 개의 서로 다른 심볼의 순열로 표현될 수 있고, 노드  $v$ 와  $w$ 의  $n$ 개 비트 스트링에서 임의의 위치의 두개 심볼만 교환된 순열을 갖는 노드  $v$ 와  $w$  사이에 에지가 존재한다.  $n$ 개의 서로 다른 심볼 집합을  $\langle n \rangle = \{1, 2, \dots, n\}$ 이라 하고,  $\langle n \rangle$ 의 순열을  $T = t_1 t_2 \dots t_n$ ,  $t_i \in \langle n \rangle$ 이라 할 때 전위 그래프  $T_n$ 은 다음과 같이 정의된다[2].

$$V(T_n) = \{(t_1 t_2 \dots t_i \dots t_j \dots t_n) \mid t_i \in \langle n \rangle, i \neq j, t_i \neq t_j\}$$

$$E(T_n) = \{(t_1 t_2 \dots t_i \dots t_j \dots t_n)(t_1 t_2 \dots t_j \dots t_i \dots t_n) \mid (t_1 t_2 \dots t_i \dots t_j \dots t_n) \in V(T_n), 1 \leq i < j \leq n, i \neq j\}$$



(그림 2) 4 차원 전위 그래프

$n$ 개의 심볼로 구성된 순열과 그 순열에서 임의의 서로 다른 두개 심볼이 교환된 순열을 갖는 노드 사이에 에지가 있으므로  $T_n$ 은 분지수가  $n(n-1)/2$ 인 정규 그래프이다. 전위 그래프  $T_n$ 은 에지에 고장(fault)이 발생했을 때 고장난 에지를 제외한 나머지 에지들과 노드들을 통하여 스타(star) 그래프와 버블정렬(bubblesort) 그래프를 서브 그래프로 구성할 수 있도록 에지를 추가하여 구성한 상호 연결망이다. 전위 그래프  $T_n$ 은 노드 대칭적이고, 이분 그래프(bipartite graph)이다. 또한, 전위 그래프  $T_n$ 의 지름은  $n-1$ 이고, 고장 지름은  $n$ 이며 최대 고장허용도를 가짐이 알려져 있다[16].

### 3. 일-대-일 노드 사상 방법

임의의 한 연결망을  $G$ 라고 하고,  $G$ 의 노드 집합, 에지 집합과 경로 집합을  $V(G)$ ,  $E(G)$ , 그리고  $P(G)$ 라고 표현 하겠다.  $G(V, E)$ 의  $G'(V', E')$ 로의 임베딩  $(\Phi, \rho)$ 은  $V(G)$ 의 노드들을  $V'(G')$ 의 노드들로 사상하고,  $E(G)$ 의 에지들을  $P(G')$ 의 경로들로 사상하는 것을 말한다. 즉,  $\Phi: V \rightarrow V'$ 이고,  $\rho: E \rightarrow P(G')$ 이다. 임베딩의 비용을 나타내는 대표적인 척도로 연장을(dilation)과 밀집율(congestion)이 있다. 연장은  $G$ 의 한 에지가  $G'$ 에 사상되었을 때의 경로 길이를 나타내고, 밀집율은  $G$ 가  $G'$ 에 사상되었을 때  $G'$ 의 한 에지가 중복 사용되는 횟수를 나타낸다.

**정리 1** 전위 그래프  $T_n$ 은  $RFM$  그래프  $R_n$ 에 연장을 4, 확장율 1에 임베딩 가능하다.

**증명** 전위 그래프  $T_n$ 의 노드  $T$ 의 비트스트링을  $t_1 t_2 \dots t_i \dots t_j \dots t_n$ 이라 하자(단,  $1 \leq i \neq j \leq n$ ). 전위 그래프의 정의에 의해 노드  $T$ 의 순열에서  $i$ 번째 심볼  $t_i$ 와  $j$ 번째 심볼  $t_j$ 이 서로 교환된 순열을 연결하는 에지를  $T(i, j)$ 라 하고, 노드  $T$ 와 에지  $T(i, j)$ 에 의해 인접한 노드를  $T'$ 이라 하자. 이때 노드  $T'$ 의 순열은  $t_1 t_2 \dots t_{i-1} t_j t_{i+1} \dots t_j t_i t_{j+1} \dots t_n$ 이다.

$RFM_n$  그래프의 한 노드를  $R(=r_1r_2\dots r_i\dots r_j\dots r_n)$ 이라 할 때, 노드  $R$ 에 부속(incident)한 에지는  $R^i$ 와  $F^j$ 가 있다. 노드  $R(=r_1r_2\dots r_i\dots r_j\dots r_n)$ 이 에지  $R^i$ 에 의해 인접한 노드의 순열은  $r_2\dots r_i r_1 r_{i+1} \dots r_j \dots r_n$ 이고, 노드  $R$ 이 에지에 의해 인접한 노드의 순열은  $r_j r_1 r_2 \dots r_i \dots r_{j-1} r_{j+1} \dots r_n$ 이다.

전위그래프와  $RFM_n$  그래프 사이의 사상 방법은 전위그래프의 노드  $T(=t_1t_2\dots t_i\dots t_j\dots t_n)$ 를  $RFM_n$  그래프의 노드  $R(=r_1r_2\dots r_i\dots r_j\dots r_n)$ 로 사상한다. 즉, 두 그래프에서 동일한 노드 주소를 갖는 노드들로 사상한다. 전위그래프의 노드  $T$ 를  $RFM_n$  그래프의 노드  $R$ 로 사상하고, 노드  $T$ 와 인접한 노드  $T'$ 를  $RFM_n$  그래프의 노드  $R'$ 로 사상할 때,  $RFM_n$  그래프의 에지 정의에 의해 노드  $R$ 로부터 노드  $R'$ 로 이동하는 최단 경로의 차원에지 시퀀스 개수를 통해 임베딩의 연장율을 알아본다. 전위그래프와  $RFM_n$  그래프는 노드 대칭적인 성질이 있으므로, 전위그래프의 임의의 한 노드  $T$ 와 인접한 노드  $T'$ 를 연결하는 에지  $T(i,j)$ 에 따라 2가지 경우로 나누어 보인다.

경우1. 에지  $T(i,j)$ 에서  $i=1, 2 \leq j \leq n$ 인 경우

경우 1은 전위그래프의 노드  $T(=t_1t_2\dots t_i\dots t_j\dots t_n)$ 의 순열에서 첫 번째 심벌  $t_1$ 과  $j$ 번째 심벌  $t_j(2 \leq j \leq n)$ 가 서로 교환된 노드  $T'(=t_jt_2\dots t_i\dots t_1\dots t_n)$ 를 연결하는 에지이다. 노드  $T(=t_1t_2\dots t_i\dots t_j\dots t_n)$ 는  $RFM_n$  그래프의 노드  $R(=r_1r_2\dots r_i\dots r_j\dots r_n)$ 로 사상하고, 노드  $T'(=t_jt_2\dots t_i\dots t_1\dots t_n)$ 는  $RFM_n$  그래프의 노드  $R'(=r_jr_2\dots r_i\dots r_1\dots r_n)$ 로 사상한다.  $RFM_n$  그래프의 에지 정의에 의해 노드  $R$ 은 노드  $R'$ 와 인접하지 않으므로 노드  $R$ 에서 노드  $R'$ 로 이동하는 최단 경로의 에지 시퀀스를 구성하여 연장율을 분석한다.  $RFM_n$  그래프의 노드  $R$ 에서 노드  $R'$ 로 최단경로 라우팅을 위한 차원에지 시퀀스는  $\langle R^i, F^{j-1} \rangle$ 이다. 노드  $R$ 에서 차원에지 시퀀스를 순차적으로 적용하여 노드  $R'$ 로 도달 가능함을 살펴보자. 첫째, 노드  $R(=r_1r_2\dots r_i\dots r_j\dots r_n)$ 와 에지  $R^i$ 에 의해 인접한 노드의 순열은  $r_1r_2\dots r_i\dots r_jr_1\dots r_n$ 이다. 둘째, 노드 순열  $r_1r_2\dots r_i\dots r_jr_1\dots r_n$ 에서 에지  $F^{j-1}$ 에 의해 인접한 노드의 순열은  $r_jr_2\dots r_i\dots r_1\dots r_n$ 이다.  $RFM_n$  그래프의 노드  $R$ 에서 차원에지 시퀀스  $\langle R^i, F^{j-1} \rangle$ 를 적용한 노드의 순열은 전위그래프의 노드  $T'(=t_jt_2\dots t_i\dots t_1\dots t_n)$ 과 동일한 주소임을 알 수 있다. 따라서  $RFM_n$  그래프의 노드  $R$ 에서 노드  $R'$ 까지 최단경로 라우팅을 위해 적용해야 할 차원에지 개수는 2개 이므로 연장율 2임을 알 수 있다.

경우2. 에지  $T(i,j)$ 에서  $2 \leq i \neq j \leq n$ 인 경우

경우 2는 전위그래프의 노드  $T(=t_1t_2\dots t_i\dots t_j\dots t_n)$ 의 순열에서  $i$ 번째 심벌  $t_i$ 와  $j$ 번째 심벌  $t_j(2 \leq i \neq j \leq n)$ 가 서로 교환된 노드  $T'(=t_1t_2\dots t_j\dots t_i\dots t_n)$ 를 연결하는 에지이다. 노드  $T(=t_1t_2\dots t_i\dots t_j\dots t_n)$ 는  $RFM_n$  그래프의 노드  $R(=r_1r_2\dots r_i\dots r_j\dots r_n)$ 로 사상하고, 노드  $T'(=t_1t_2\dots t_j\dots t_i\dots t_n)$ 는  $RFM_n$  그래프의 노드  $R'(=r_1r_2\dots r_j\dots r_i\dots r_n)$ 로 사상한다.  $RFM_n$  그래프의 에지 정의에 의해 노드  $R$ 은 노드  $R'$ 와

인접하지 않으므로 노드  $R$ 에서 노드  $R'$ 로 이동하는 최단 경로의 에지 시퀀스를 구성하여 연장율을 분석한다.  $RFM_n$  그래프의 노드  $R$ 에서 노드  $R'$ 로 최단경로 라우팅을 위한 차원에지 시퀀스는  $\langle F^i, R^{j-1}, F^j, R^i \rangle$ 이다. 노드  $R$ 에서 차원에지 시퀀스를 순차적으로 적용하여 노드  $R'$ 로 도달 가능함을 살펴보자. 첫째, 노드  $R(=r_1r_2\dots r_i\dots r_j\dots r_n)$ 와 에지  $F^i$ 에 의해 인접한 노드의 순열은  $r_i r_1 r_2 \dots r_{i-1} r_{i+1} \dots r_j \dots r_n$ 이다. 둘째, 노드 순열  $r_i r_1 r_2 \dots r_{i-1} r_{i+1} \dots r_j \dots r_n$ 에서 에지  $R^{j-1}$ 에 의해 인접한 노드의 순열은  $r_1 r_2 \dots r_{i-1} r_i r_{i+1} \dots r_{j-1} r_i r_j \dots r_n$ 이다. 셋째, 노드 순열  $r_1 r_2 \dots r_{i-1} r_i r_{i+1} \dots r_{j-1} r_i r_j \dots r_n$ 에서 에지  $F^j$ 에 의해 인접한 노드의 순열은  $r_j r_1 r_2 \dots r_{i-1} r_i r_{i+1} \dots r_{j-1} r_i r_{j+1} \dots r_n$ 이다. 넷째, 노드 순열  $r_j r_1 r_2 \dots r_{i-1} r_i r_{i+1} \dots r_{j-1} r_i r_{j+1} \dots r_n$ 에서 에지  $R^i$ 에 의해 인접한 노드의 순열은  $r_1 r_2 \dots r_j \dots r_i \dots r_n$ 이다.  $RFM_n$  그래프의 노드  $R$ 에서 차원에지 시퀀스  $\langle F^i, R^{j-1}, F^j, R^i \rangle$ 를 적용한 노드의 순열은 전위그래프의 노드  $T'(=t_1t_2\dots t_j\dots t_i\dots t_n)$ 과 동일한 주소임을 알 수 있다. 따라서  $RFM_n$  그래프의 노드  $R$ 에서 노드  $R'$ 까지 최단경로 라우팅을 위해 적용해야 할 차원에지 개수는 4개 이므로 연장율 4임을 알 수 있다. □

$RFM_n$  그래프의 한 노드를  $R(=r_1r_2\dots r_i\dots r_j\dots r_n)$ 이라 할 때, 임의의 노드  $R$ 에서 에지  $R^i$ 에 인접한 노드를  $V$ 라 하자. 노드  $V$ 는 다음과 같이  $V=R^i(R)$ 로 표현한다. 또한, 노드  $R$ 에서 에지  $R^i$ 와  $F^j$ 를 순차적으로 적용하여 도달한 노드를  $V$ 라 할 때, 적용한 에지 시퀀스는  $\langle R^i, F^j \rangle$ 이라 하자. 에지를 순차적으로 적용한다는 것은 노드  $R$ 에서 에지  $R^i$ 에 의해 인접한 노드  $R^i(R)$ 의 순열을 생성함을 의미하고, 두 번째에는 노드  $R^i(R)$ 에서 에지  $F^j$ 에 인접한 노드  $V=F^j(R^i(R))$ 를 의미한다. 전위그래프  $T_n$ 에서 에지  $T(i,j)$ 에 의해 인접한 노드도 동일하게 적용한다.

**정리 2**  $RFM_n$  그래프를 전위그래프  $T_n$ 에 임베딩하는 연장율은  $O(n)$ 이다.

**증명**  $RFM_n$  그래프의 한 노드를  $R(=r_1r_2\dots r_i\dots r_j\dots r_n)$ 이라 할 때, 노드  $R$ 에 부속(incident)한 에지는  $R^i$ 와  $F^j$ 가 있다. 노드  $R(=r_1r_2\dots r_i\dots r_j\dots r_n)$ 이 에지  $R^i$ 에 의해 인접한 노드  $R^i(R)$ 의 순열은  $R^i(R)(=r_2\dots r_i r_1 r_{i+1} \dots r_j \dots r_n)$ 이고, 노드  $R$ 이 에지  $F^j$ 에 의해 인접한 노드  $F^j(R)$ 의 순열은  $F^j(R)(=r_j r_1 r_2 \dots r_i \dots r_{j-1} r_{j+1} \dots r_n)$ 이다.  $RFM_n$  그래프에서 전위그래프  $T_n$ 으로 노드를 일-대-일 사상하는 방법은  $RFM_n$  그래프의 노드  $R(=r_1r_2\dots r_i\dots r_j\dots r_n)$ 을 전위그래프의 노드  $T(=t_1t_2\dots t_i\dots t_j\dots t_n)$  사상하고, 노드  $R$ 에 부속(incident)한 2개 에지  $R^i$ 와  $F^j$ 에 각각 인접한 노드  $R^i(R)$ 와  $F^j(R)$ 를 전위그래프의 노드  $T'$ 로 사상한다. 이때 전위그래프의 에지 정의에 의해 노드  $T(=t_1t_2\dots t_i\dots t_j\dots t_n)$ 로부터 노드  $T'(=r_2\dots r_i r_1 r_{i+1} \dots r_j \dots r_n)$ 와 노드  $T'(=r_j r_1 r_2 \dots r_i \dots r_{j-1} r_{j+1} \dots r_n)$ 로 이동하는 최단 경로의 에지 시퀀스 개수를 통해 임베딩의 연장율을 알아본다.

경우1. 에지  $R^i$ 에 의해 인접한 노드, ( $2 \leq i \leq n$ )

$RFM_n$  그래프의 노드  $R(=r_1r_2\dots r_i\dots r_j\dots r_n)$ 에서 에지  $R^i$ 에 의해 인접한 노드  $R^i(R)$ 의 순열은  $r_2\dots r_i r_1 r_{i+1}\dots r_j\dots r_n$ 이다.  $RFM_n$  그래프의 노드  $R(=r_1r_2\dots r_i\dots r_j\dots r_n)$ 은 전위그래프의 노드  $T(=t_1t_2\dots t_i\dots t_j\dots t_n)$ 로 사상하고,  $RFM_n$  그래프의 노드  $R^i(R)(=r_2\dots r_i r_1 r_{i+1}\dots r_j\dots r_n)$ 은 전위그래프의 노드  $T'(=t_2\dots t_i t_1 t_{i+1}\dots t_j\dots t_n)$ 로 사상한다. 전위그래프  $T_n$ 의 정의에서 노드  $T(=t_1t_2\dots t_i\dots t_j\dots t_n)$ 는 노드  $T'(=t_2\dots t_i t_1 t_{i+1}\dots t_j\dots t_n)$ 와 인접하지 않는다. 전위그래프의 노드  $T(=t_1t_2\dots t_i\dots t_j\dots t_n)$ 에서 노드  $T'(=t_2\dots t_i t_1 t_{i+1}\dots t_j\dots t_n)$ 로 최단경로 라우팅을 위한 에지 시퀀스는  $\langle T(1,2), T(2,3), T(3,4), \dots, T(i-1,i) \rangle$ 이다. 이때  $T(i-1,i)$ 에서  $i$ 가 가질 수 있는 최대 값은  $n$ 이고, 에지 시퀀스의 개수는  $n-1$ 개이므로 연장율은  $O(n)$ 임을 알 수 있다.

경우2. 에지  $F^j$ 에 의해 인접한 노드, ( $2 \leq j \leq n$ )

$RFM_n$  그래프의 노드  $R(=r_1r_2\dots r_i\dots r_j\dots r_n)$ 에서 에지  $F^j$ 에 의해 인접한 노드  $F^j(R)$ 의 순열은  $r_j r_1 r_2\dots r_i\dots r_{j-1} r_{j+1}\dots r_n$ 이다.  $RFM_n$  그래프의 노드  $R(=r_1r_2\dots r_i\dots r_j\dots r_n)$ 은 전위그래프의 노드  $T(=t_1t_2\dots t_i\dots t_j\dots t_n)$ 로 사상하고,  $RFM_n$  그래프의 노드  $R^j(R)(=r_j r_1 r_2\dots r_i\dots r_{j-1} r_{j+1}\dots r_n)$ 은 전위그래프의 노드  $T'(=t_j t_1 t_2\dots t_i\dots t_{j-1} t_{j+1}\dots r_n)$ 로 사상한다. 전위그래프  $T_n$ 의 정의에서 노드  $T(=t_1t_2\dots t_i\dots t_j\dots t_n)$ 는 노드  $T'(=t_j t_1 t_2\dots t_i\dots t_{j-1} t_{j+1}\dots r_n)$ 와 인접하지 않는다. 전위그래프의 노드  $T(=t_1t_2\dots t_i\dots t_j\dots t_n)$ 에서 노드  $T'(=t_j t_1 t_2\dots t_i\dots t_{j-1} t_{j+1}\dots r_n)$ 로 최단경로 라우팅을 위한 에지 시퀀스는  $\langle T(j,j-1), T(j-1,j-2), T(j-2,j-3), \dots, T(2,1) \rangle$ 이다. 이때  $T(j,j-1)$ 에서  $j$ 가 가질 수 있는 최대 값은  $n$ 이고, 에지 시퀀스의 개수는  $n-1$ 개이므로 연장율은  $O(n)$ 임을 알 수 있다.  $\square$

#### 4. 결론

병렬 컴퓨터의 위상으로 잘 알려진 스타그래프는 짧은 지름, 노드 대칭성, 계층적 구조와 최대 고장 허용도 등을 갖는 상호 연결망이다. 본 논문에서는 스타그래프가 갖는 상호 연결망의 중요한 성질을 가지면서 망비용이 개선된 전위그래프와  $RFM$  그래프 사이의 임베딩을 분석하였다. 본 연구의 임베딩 방법은 각 그래프가 동일한 노드 수를 가질 때 그래프의 에지 정의 즉, 에지 생성 규칙을 통해 인접한 두 노드를 사상하고자하는 대상 그래프에서 사용되는 가장 적은 수의 에지 정의로 표현하였다. 이때 적용된 에지의 수를 통해 임베딩에 대한 연장율을 분석하였다. 그래프 정의를 통해 임베딩 분석이 가능한 이유는 전위그래프와  $RFM$  그래프가 노드 대칭적인 성질이 있기 때문이다.

본 논문의 연구 결과 전위그래프  $T_n$ 은  $RFM$  그래프  $R_n$ 에 연장율 4, 확장율 1에 임베딩 가능하고,  $RFM_n$  그래프를 전위그래프  $T_n$ 에 임베딩하는 연장율은  $O(n)$ 임을 보였다. 이러한 결과는 전위그래프에서 개발된 알고리즘을  $RFM$  그래프에서 상수의 추가적인 비용으로 시뮬레이션 할 수 있음을 의미한다.

#### 참고문헌

- [1] M. M. Azevedo, N. Bagherzaeh, and S. Latifi, "Low Expansion Packing and Embeddings of Hypercubes into Star Graphs: A Performance-Oriented Approach," IEEE Parallel and Distributed Systems, Vol. 9, No. 3, pp. 261-274, 1998.
- [2] P. Berthome, A. Ferreira and S. Perennes, "Optimal Information Dissemination in Star and Pancake Networks," IEEE Trans. on Parallel and Distributed Syst., Vol. 7, No. 12, pp. 1292-1300, 1996.
- [3] P. F. Corbett, "Rotator Graphs: An Efficient Topology for Point-to-Point Multiprocessor Networks," IEEE Trans. Parallel Distributed Syst., Vol. 3, No. 5, pp. 622-626, 1992.
- [4] V. Faber and J. W. Moore, "High-degree, Low-diameter Interconnection Networks with Vertex Symmetry: The Directed Case," LA-UR-88-1051, LosAlmos National Lab., Los Almos, NM, 1988.
- [5] T-Y. Feng, "A Survey of Interconnection Networks," IEEE computer, pp. 12-27, December 1981.
- [6] J-S. Jwo, S. Lakshmirarahan, and S. K. Dhall, "Embedding of Cycles and Grids in Star Graphs," Proc. of IEEE, Vol. 5, pp. 540-547, 1990.
- [7] S. Latifi and P. K. Srimani, "Transposition Networks as a Class of Fault-Tolerant Robust Networks," IEEE. Trans. Comput., Vol. 45, No. 2, pp. 230-238, Feb. 1996.
- [8] 이형욱, 허영남, 임형석, "RFM Graphs: 그래프 결합을 이용한 새로운 상호연결망," 정보처리학회논문지 5권 10호, pp. 2615-2626, 1998.
- [9] 이형욱, 임형석, "행렬-스타 그래프: 행렬 연산에 기반한 새로운 상호연결망," 정보과학회논문지(A) 26권 4호, pp. 389-405, 1999.