이븐 연결망과 오드 연결망 사이의 임베딩 알고리즘

김종석*, 이형옥**
*오클라호마주립대학교 컴퓨터과학과
**순천대학교 컴퓨터교육과
e-mail:rockhee7@gmail.com, oklee@sunchon.ac.kr

Embedding Algorithms between Even network and Odd network

Kim Jong-Seok* Lee Hyeong-Ok**
*Dept of Computer Science, Oklahoma State University
**Dept of Computer Education, Sunchon National University

요 약

알고리즘의 설계에 있어서 주어진 연결망을 다른 연결망으로 임베딩하는 것은 알고리즘을 활용하는 중용한 방법중의 하나이다. 본 논문에서는 하이퍼큐브보다 망비용이 개선된 이븐 연결망과 오드 연결망 사이의 임베딩을 분석하고, 이븐 연결망이 이분할 연결망임을 보인다. 이븐 연결망을 오드 연결망에 연장율 2, 밀집율 1에 임베딩 가능함을 보이고, 오드 연결망을 이븐 연결망에 연장율 2, 밀집율 1에 임베딩 가능함을 보인다.

1. 서론

최근 이미지 파일, 동화상, 실시간 처리 등의 많은 응용 분야에서 고성능의 컴퓨터에 대한 요구가 증가하고 있다. 고성능을 얻기 위한 방법으로 병렬처리에 대한 필요성이 크게 증가하여 병렬컴퓨터에 대한 연구가 많이 진행되고 있다. 병렬처리 컴퓨터는 다중프로세서(multiprocessor) 시스템과 다중컴퓨터(multicomputer) 시스템으로 분류하는데 다중컴퓨터 시스템은 자신의 기억장치를 갖는 프로세서들을 상호 연결망(interconnection network)으로 연결하고, 프로세서들 간의 통신은 상호 연결망을 통하여 메시지 전송 방식으로 구동되는 시스템이다. 상호 연결망은 전체 시스템의 성능과 시스템의 확장성에 큰 영향을 미친다. 널리 알려진 상호 연결망으로 메쉬, 하이퍼큐브, 스타 그래프 등이 있으며, 상호 연결망을 평가하는 척도로는 분지수(degree), 연결도(connectivity), 대칭성(symmetric), 지름(diameter), 망비용(network cost), 방송(broadcasting), 임베딩(embedding) 등이 있다[7,8].

하이퍼큐브는 노드 및 에지 대칭이고, 임베딩 관점에 있어서 링, 트리, 메쉬 등과 같은 다른 연결망 구조들이 효율적으로 임베딩 될 수 있다는 장점이 있지만, 노드 개수의 증가에 따른 분지수의 증가로 인해 네트워크의 망비용이 증가하는 단점이 있다. 이러한 단점을 개선하고자 Folde 하이퍼큐브[9], 이븐(even) 연결망[3], 오드(odd) 연결망[5] 등이 제안되었다.

본 논문에서는 하이퍼큐브보다 망비용이 개선된 이븐 연결망과 오드 연결망 사이의 임베딩 알고리즘을 제안하고 이븐 연결망이 이분할(bipartite) 연결망임을 분석한다.

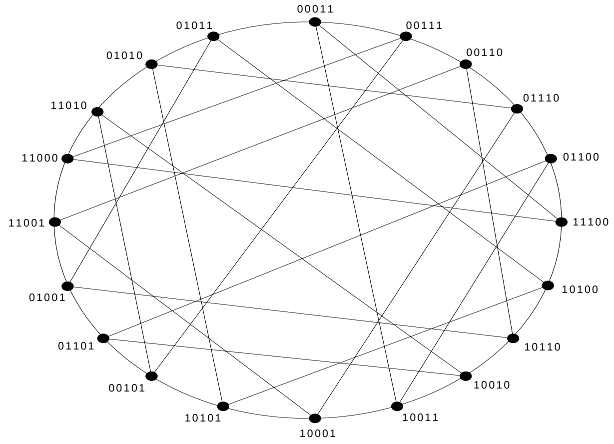
다양한 연결망 구조에서 여러 가지 문제들을 풀기 위한 수많은 병렬 알고리즘들이 설계되고 있는데 이러한 알고리즘들을 원래와는 다른 연결망 구조에서 실행시킬 수 있는지는 병렬처리에서 중요한 문제이다. 이러한 방법 중에서 널리 쓰이는 것에 임베딩이 있다. 임베딩은 한 연결망의 프로세서와 통신링크를 다른 연결망의 프로세서와 통신링크들로 사상(mapping)시키는 방법을 일컫는다 [1,6,9].

본 논문의 연구결과는 이븐 연결망이 이분할 연결망임을 보이고, 이븐 연결망 E_d를 오드 연결망 O_d에 연장율 2, 밀집율 1에 임베딩 가능함을 보이고, 오드 연결망 O_d를 이븐 연결망 E_{d+1}에 연장율 2, 밀집율 1로 임베딩 가능함을 보인다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 이븐 연결망과 오드 연결망에 대하여 알아보고 3장에서는 이븐 연결망이 이분할 연결망임을 보이고, 이븐 연결망과 오드 연결망 사이의 임베딩을 보이며 4장에서 결론을 맺는다.

2. 관련연구

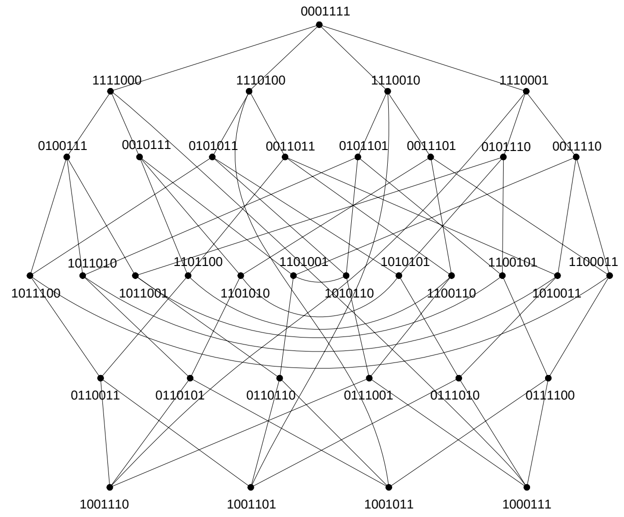
본 논문에서는 n개의 이진비트스트링으로 구성된 x를 $x_1x_2...x_i...x_n$($x_i \in \{0,1\}$, $1 \leq i \leq n$)이라고 표현하겠다. x_i를 i번째 비트스트링이라고 표현하고, x_i의 보수(complement)를 $\overline{x_i}=1-x_i$라고 표현하겠다. s와 t가 n개의 이진비트스트링으로 구성되어 있다고 하면, s와 t 사이의 거리(해밍 거리)는 s와 t 사이에 XOR 함수를 적용하여 발생하는 1의 개수와 같다.



(그림 1) E_4

[3]에서 Ghafoor는 고장 허용 다중 컴퓨터의 하나의 모형으로 이븐 연결망 E_d를 소개하였다. E_d는 지금까지 많은 유용한 성질들 - 최대고장허용도, 노드 및 에지 대칭성, 노드 중복없는 경로, 간단한 라우팅 알고리즘, 하다마드 매트릭스(Hadamard matrix)를 이용한 고장 감내 - 이 발표되었다[3,4]. 이븐 연결망 E_d의 노드수는 $\binom{2d-3}{d-1}$이고, 분지수는 d이며, 지름은 d-1이다. 각 노드는 $x_1x_2 \ldots x_i \ldots x_{2d-3}$(|0|=|1|±1)라고 표현한다. |$k$|는 k의 개수를 나타낸다. 해밍 거리가 1 혹은 n인 두 노드 사이에 에지가 존재한다. 해밍 거리가 1인 두 노드를 연결하고 있는 에지를 i-에지라고 나타내고, 해밍 거리가 2d-3인 두 노드를 연결하고 있는 에지를 c-에지라고 나타내겠다. 이븐 연결망 E_d에서 d-2개의 “0”과 d-1개의 “1”로 구성된 노드 s=0...01...1을 $s=0^{d-2}1^{d-1}$으로 표현하겠다. 그림 1은 이븐 연결망 E_4이다.

오드 연결망은 [2]에서 그래프 이론의 모델의 하나로 발표되었는데 [5]에서 Ghafoor가 상호연결망으로 소개하였고, 지금까지 많은 유용한 성질들 - 최대고장허용도, 노드 및 에지 대칭성, 노드 중복없는 경로, 간단한 라우팅 알고리즘, 하다마드 매트릭스(Hadamard matrix)를 이용한 고장 감내 - 이 발표되었다[2,5]. 오드 연결망 O_d의 노드수는 $\binom{2d-1}{d}$이고, 분지수는 d이며, 지름은 d-1이다. 각 노드는 $x_1x_2 \ldots x_i \ldots x_{2d-1}$(|0|=|1|-1)라고 표현한다. |$k$|는 k의 개수를 나타낸다. 오직 하나의 비트스트링만 같은 두 노드 사이에 i-에지가 존재한다. 즉, 해밍 거리가 2d-2인 두 노드 사이에 i-에지가 존재한다. 오드 연결망 O_d에서 d-1개의 “0”과 d개의 “1”로 구성된 노드 s=0...01...1을 $s=0^{d-1}1^{d}$으로 표현하겠다. 그림 2는 오드 연결망 O_4이다.



3. 이분할 연결망과 임베딩

첫 번째 비트스트링이 1과 0으로 구성된 노드들의 집합을 각각 V^1과 V^0라고 하고, |1|=|0|+1인 노드들의 집합을 S^1라고 하며, |0|=|1|+1인 노드들의 집합을 S^0라고 하자.

정리 1 이븐 연결망 E_d는 이분할(bipartite) 연결망이다.
증명 s_1과 s_2를 임의의 이진비트스트링이라고 하고, 이븐 연결망 E_d의 임의의 노드 $u=s_10s_2(0 \le |s_1,s_2| \le 2d-4) \in S^0$라고 하자. 그러면 이븐 연결망 E_d의 에지 정의에 의해 노드 u는 노드 $u'=s_11s_2$ 혹은 $u''=\overline{s_1}1\overline{s_2}$와 연결된다. 이븐 연결망 E_d의 각 노드는 $x_1x_2 \ldots x_i \ldots x_{2d-3}$(|0|=|1|±1)이므로 노드 u'와 u''에서 |0|+|1|=2d-4이고, |0|=|1|=d-2임을 알 수 있다. 즉, u'와 $u'' \in S^1$임을 알 수 있으므로 이븐 연결망 E_d는 이분할 연결망이다.

임의의 한 연결망을 G라고 하고, G의 노드 집합, 에지 집합과 경로 집합을 $V(G)$, $L(G)$, 그리고 $P(G)$라고 표현하겠다. $G(V,L)$의 $G'(V',L')$로의 임베딩 (Φ,ρ)은 $V(G)$의 노드들을 $V'(G')$의 노드들로 사상하고, $L(G)$의 에지들을 $P(G')$의 경로들로 사상하는 것을 말한다. 즉, Φ: $V \rightarrow V'$이고, ρ: $L \rightarrow P(G')$이다. 임베딩의 비용을 나타내는 대표적인 척도로 연장율(dilation)과 밀집율(congestion)이 있다. 연장율은 G의 한 에지가 G'에 사상되었을 때의 경로 길이를 나타내고, 밀집율은 G가 G'에 사상되었을 때 G'의 한 에지가 중복 사용되는 횟수를 나타낸다.

정리 2 이븐 연결망 E_d는 오드 연결망 O_d에 연장율 2,

밀집율 1에 임베딩 가능하다.

증명 이븐 연결망 E_d의 임의의 한 노드를 $u=u_1u_2...u_i...u_{2d-3}$라고 하고, 노드 u의 보수 노드를 $\bar{u}=\overline{u_1u_2...u_i...u_{2d-3}}$라고 하겠다. 만약, 노드 $u\in S^1$이면, $\Phi(u)=0u1$이고, 노드 $u\in S^0$이면, $\Phi(u)=1\bar{u}0$이다. 그러면 $\Phi(u)$의 비트스트링의 길이는 $2d-1$이고, $|1|=|0|+1$이다. 임의의 한 에지를 e라고 하면, $e\in L(E_d)$이다. 에지 e의 발생 조건에 따라 다음의 2가지 경우로 나누어 증명하겠다.

경우 1) 에지 e가 i-에지인 경우: 에지 e에 의해 연결되어 있는 두 노드를 $u=s_10s_2$와 $v=s_11s_2$라고 하자. s_1과 s_2는 임의의 이진비트스트링을 나타낸다($0\le|s_1,s_2|\le 2d-4$). 정리 1에 의해 이븐 연결망 E_d는 이분할 연결망이므로, $u\in S^0$이고, $v\in S^1$이다. 그러므로 $\Phi(u)=1\bar{s}_11\bar{s}_20$이고, $\Phi(v)=0s_11s_21$이다. $\Phi(u)$와 $\Phi(v)$의 비트스트링의 길이가 $2d-1$이고, $|1|=|0|+1$임을 알 수 있다. 그러므로 두 노드 $\Phi(u)$와 $\Phi(v)$은 O_d의 노드들임을 알 수 있고, $\rho(e)=(1\bar{s}_11\bar{s}_20 - 0s_11s_21)$임을 알 수 있으므로 에지 e가 보수 관계에 있는 경우에는 연장율 1로 임베딩 가능함을 쉽게 알 수 있다.

예 1) $u=00111$, $v=00011 \rightarrow \Phi(u)=0001111$, $\Phi(v)=1111000$, $\rho(e)=(0001111 - 1111000)$.

경우 2) 에지 e가 c-에지인 경우: 에지 e에 의해 연결되어 있는 두 노드를 $u=s_10s_2$와 $v=\bar{s}_11\bar{s}_2$라고 하자. s_1과 s_2는 임의의 이진비트스트링을 나타낸다($0\le|s_1,s_2|\le 2d-4$). 정리 1에 의해 이븐 연결망 E_d는 이분할 연결망이므로, $u\in S^0$이고, $v\in S^1$이다. 그러므로 $\Phi(u)=1\bar{s}_11\bar{s}_20$이고, $\Phi(v)=0\bar{s}_11\bar{s}_21$이다. $\Phi(u)$와 $\Phi(v)$의 비트스트링의 길이가 $2d-1$이고, $|1|=|0|+1$임을 알 수 있다. 그러므로 두 노드 $\Phi(u)$와 $\Phi(v)$은 O_d의 노드들임을 알 수 있고, $\rho(e)=(1\bar{s}_11\bar{s}_20 - 1s_10s_21 - 0s_11s_21)$임을 알 수 있으므로 에지 e가 보수 관계에 있는 경우에는 연장율 2로 임베딩 가능함을 쉽게 알 수 있다.

예) $u=00111$, $v=11000 \rightarrow \Phi(u)=0001111$, $\Phi(v)=1001110$, $\rho(e)=(0001111 - 1110001 - 1001110)$.

경우 1,2에서 각각 사용된 에지 e는 동일 에지가 아니고, 경우 2에서 사용된 노드 $1s_10s_21$은 경우 1에서 사용된 노드 $\Phi(u)$와 노드 $\Phi(v)$과 동일 노드가 아님을 쉽게 알 수 있다. 그러므로 위의 두 가지 경우에서 사용된 각 경로 $\rho(e)$는 에지 중복 없는 경로이므로 밀집율이 1임을 알 수 있다. 그러므로 이븐 연결망 E_d는 오드 연결망 O_d에 연장율 2, 밀집율 1에 임베딩 가능하다.

정리 3 오드 연결망 O_d는 이븐 연결망 E_{d+1}에 연장율 2, 밀집율 1에 임베딩 가능하다.

증명 오드 연결망 O_d의 임의의 한 노드를 $u=u_1u_2...u_i...u_{2d-1}$라고 하고, 노드 u의 보수 노드를 $\bar{u}=\overline{u_1u_2...u_i...u_{2d-1}}$라고 하며, 노드 u의 첫 번째 비트스트링을 제거한 노드를 $t=u_2...u_i...u_{2d-1}$라고 하겠다. 만약, 노드 $u\in V^0$이면, $\Phi(u)=0t$이고, 노드 $u\in V^1$이면, $\Phi(u)=0\bar{t}$이다. 그러면 $\Phi(u)$의 비트스트링의 길이는 $2d-1$이고, $|1|=|0|\pm1$이다. 임의의 한 에지를 e라고 하면, $e\in L(O_d)$이다. 에지 e의 발생 조건에 따라 다음의 2가지 경우로 나누어 증명하겠다.

경우 1) 에지 e가 i-에지인 경우($2\le i\le 2d-1$): 에지 e에 의해 연결되어 있는 두 노드를 $u=0s_11s_2$와 $v=1s_11s_2$라고 하자($0\le|s_1,s_2|<2d-1$). 그러면 노드 u의 첫 번째 비트스트링이 0이므로, $\Phi(u)=0s_11s_2$이고, 노드 v의 첫 번째 비트스트링이 1이므로, $\Phi(v)=0s_10s_2$이다. 그러므로 두 노드 $\Phi(u)$와 $\Phi(v)$은 E_{d+1}의 노드들임을 알 수 있고, $\rho(e)=(0s_11s_2 - 0s_10s_2)$임을 알 수 있으므로 에지 e가 i-에지인 경우에는 연장율 1로 임베딩 가능함을 쉽게 알 수 있다.

예 1) $u=00111$, $v=11100 \rightarrow \Phi(u)=00111$, $\Phi(v)=00011$, $\rho(e)=(00111 - 00011)$.

경우 2) 에지 e가 1-에지인 경우: 에지 e에 의해 연결되어 있는 두 노드를 $u=1t$와 $v=1\bar{t}$라고 하자. 그러면 노드 u와 노드 v의 첫 번째 비트스트링이 1이므로, $\Phi(u)=0\bar{t}$이고, $\Phi(v)=0t$이다. 그러므로 두 노드 $\Phi(u)$와 $\Phi(v)$은 E_{d+1}의 노드들임을 알 수 있고, $\rho(e)=(0\bar{t} - 1t - 0t)$임을 알 수 있으므로 에지 e가 1-에지인 경우에는 연장율 2로 임베딩 가능함을 알 수 있다.

예 2) $u=10011$, $v=11100 \rightarrow \Phi(u)=01100$, $\Phi(v)=00011$, $\rho(e)=(01100 - 10011 - 00011)$.

경우 1과 2에서 각각 사용된 에지 e는 동일 에지가 아니고, 경우 2에서 사용된 노드 $1t$는 경우 1에서 사용된 노드 $\Phi(u)$와 노드 $\Phi(v)$과 동일 노드가 아님을 쉽게 알 수 있다. 그러므로 위의 세 가지 경우에서 사용된 각 경로 $\rho(e)$는 에지 중복 없는 경로이므로 밀집율이 1임을 알 수 있다. 그러므로 오드 연결망 O_d는 이븐 연결망 E_{d+1}에 연장율 2, 밀집율 1에 임베딩 가능함을 알 수 있다.

4. 결론

상호 연결망의 임베딩은 어떤 연결망 G가 다른 연결망 H에 포함 혹은 어떻게 연관되어 있는지를 알아보기 위해 어떤 특정한 연결망을 다른 연결망에 사상하는 것이다. 연결망 G가 연결망 H에 적은 비용으로 임베딩 가능하다는 것은 연결망 G가 다양한 응용 분야에서 효율적으로 이용될 수 있기 때문에 상호 연결망에서 임베딩 문제는 매우 중요하다.

본 논문에서는 하이퍼큐브보다 망비용이 개선된 이븐 연결망과 오드 연결망 사이의 임베딩 알고리즘을 분석하고,

이븐 연결망이 이분할 연결망임을 보였다. 이븐 연결망 E_d는 오드 연결망 O_d에 연장율 2, 밀집율 1에 임베딩 가능함을 보였고, 오드 연결망 O_d는 이븐 연결망 E_{d+1}에 연장율 2, 밀집율 1에 임베딩 가능함을 보였다. 이븐 연결망과 오드 연결망 사이의 임베딩 결과를 분석함으로써, 이븐 연결망에서 이미 개발된 여러 가지 알고리즘을 오드 연결망에서 효율적으로 이용할 수 있음을 알 수 있고, 오드 연결망에서 개발된 여러 가지 알고리즘을 이븐 연결망에서 효율적으로 이용할 수 있음을 알 수 있다.

참 고 문 헌

[1] S. Bettayeb, B. Cong, M. Girou and I.H. Sudborough, "Embedding Star Networks into Hypercubes," IEEE Trans. Computers, Vol.45, No.2 pp.186-194, 1996.

[2] N. Biggs, "Some Odd Graph Theory," Annals of New York Academy of Sciences, Vol. 319, pp.71-81, 1979.

[3] A. Ghafoor, " A Class of Fault-Tolerant Multiprocessor Networks," IEEE Trans. Reliability, Vol.38, No.1, pp.5-15, 1989.

[4] A. Ghafoor, "Partitioning of Even Networks for Improved Diagnosability," IEEE Trans. Reliability, Vol.39, No.3, pp.281-286, 1990.

[5] A. Ghafoor and T. R. Bashkow, "A Study of Odd Graphs as Fault-Tolerant Interconnection Networks," IEEE Trans. Computers, Vol.40, No.2 pp.225-232, 1991.

[6] M. Hamdi and S. W. Song, "Embedding Hierarchical Hypercube Networks into the Hypercube," IEEE Trans. Parallel Distributed syst., Vol.8, No.9, pp.897-902, 1997.

[7] F. T. Leighton, Introduction to Parallel Algorithms and Architectures : Arrays, Hypercubes, Morgan Kaufmann Publishers, 1992.

[8] V. E. Mendia and D. Sarkar, "Optimal Broadcasting on the Star Graph," IEEE Trans. Parallel Distributed syst., Vol.3, No.4, pp.389-396, 1992.

[9] D. Wang, "Embedding Hamiltonian Cycles into Folded Hypercubes," J. Parallel Distributed syst., Vol.61, pp.545-564, 2001.