

# 피라미드 그래프에서의 사이클 확장 및 제약조건

장정환\*

\*부산외국어대학교 디지털미디어학부  
e-mail: jhchang@pufs.ac.kr

## Cycle Expansions and Inhibit Conditions in Pyramid Graphs

Jung-Hwan Chang\*

\*Division of Digital Media Engineering, Pusan University of Foreign Studies

### 요 약

본 논문에서는 피라미드 그래프 내에 내재된 사이클 특성을 분석한다. 사이클 확장 연산을 이용하여 사이클의 크기를 신장시켜 나가는 일련의 과정에서 가능한 모든 정점들을 포함시키기 위해 불가피하게 피해야 할 조건들에 대해 분석한다.

### 1. 개요

대규모 병렬처리시스템에서 다양한 응용분야의 알고리즘들을 효율적으로 수용하여 제 성능을 발휘할 수 있도록 하기 위해서는 시스템을 구성하고 있는 정점(vertex)들의 연결 구조를 그래프(graph) 형태로 표현한 상호연결망 위상(interconnection network topology)의 역할이 매우 중요한데, 그 이유는 해당 그래프에 대한 이론적인 특성에 해당 병렬처리시스템의 성능이 의존적일 수밖에 없기 때문이다[1,2].

높이 N인 피라미드(pyramid)의 경우  $(4^N - 1)/3$ 개의 정점들을 갖는 계층적 구조의 그래프로서 오늘날 각광을 받고 있는 멀티미디어 분야의 저 레벨에서의 픽셀 단위 영상처리 관련 기능을 효율적으로 처리해 줄 수 있는 구조적 특성으로 인해 관련 분야를 중심으로 널리 이용되어 왔으나 오늘날은 내재된 트리(tree) 및 메쉬(mesh) 구조를 다양하게 활용함으로써 그래프 관련 기본문제들의 해결에도 좋은 성과를 얻고 있는 것으로 알려져 있다[3,4,5,6].

한편 상호연결망 그래프에 내재된 사이클 특성을 분석한 연구들이 갖는 의의는 다양한 응용분야에 적용되고 있는 대부분 알고리즘들의 수행에 필요한 기본 자료구조일 뿐만 아니라 수많은 프로세서들로 구성된 다중컴퓨터 병렬처리시스템에서 사이클 기반의 방송 또는 멀티캐스팅 형태의 메시지 전달 과정을 필요로 하는 응용분야에서 하부구조로 사이클 특성을 활용하고 있는 점을 예로 들 수 있다[7].

본 논문에서는 피라미드 그래프의 특성을 활용한 사이클 확장 연산 적용 시 그래프 내의 모든 정점들을 포함하는 사이클을 구성하기 위해 회피해야 할 조건들로 고려되어야 할 사항들에 대해 분석하고자 한다.

### 2. 그래프 이론적 특성

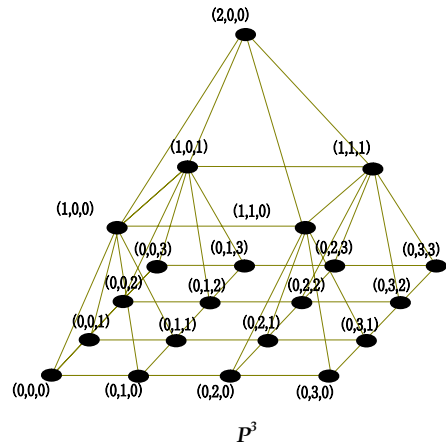
본 절에서는 연구 대상이 되는 피라미드 그래프에 대한 정의 및 그래프 이론적 관점에서의 주요 특성들을 살펴보고자 한다.

**[정의 1]** 주어진 양의 정수 N에 대해 높이가 N인 피라

미드  $P^N$ 은 정점(vertex)의 집합  $V(P^N)$ 과 간선(edge)의 집합  $E(P^N)$ 에 의해 다음과 같이 정의한다.

$$1) V(P^N) = \bigcup_{0 \leq l \leq N-1} \{(l, x, y) \mid 0 \leq x, y \leq 2^{N-l} - 1\}$$

$$2) E(P^N) = \bigcup_{0 \leq l \leq N-2} \{((l, x_1, y_1), (l, x_2, y_2)) \mid |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 1 \ \& \ (l, x_1, y_1), (l, x_2, y_2) \in V(P^N)\} \cup \bigcup_{0 \leq l \leq N-2} \{(l, x, y), (l+1, \lfloor x/2 \rfloor, \lfloor y/2 \rfloor)\} \mid 0 \leq x, y < 2^{N-l}\}$$



(그림 1) 높이 3인 피라미드 그래프 예

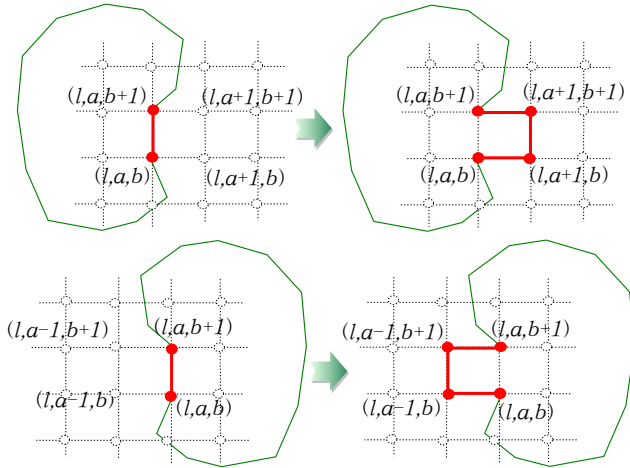
**[정의 2]** 그래프(graph)에서의 「경로(path)」란 시작 정점  $v_1$  으로부터 연속하여 인접된 간선을 따라 연속적으로 나열된 정점들의 정렬  $(v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_n)$ 을 의미하며, 특별히 간선의 중복 방문이 허용되지 않도록 각 구성 정점들의 분지수(degree)가 최대 2로 제한된 경로를 「단순 경로(simple path)」라고 일컫는다. 특별히 시작 정점과 마지막 정점 간에 연결 간선을 갖는 닫힌 단순 경로(closed simple path)를 「사이클(cycle)」이라고 한다.

**[정의 3]** 길이가 각각 m과 n인 주어진 두 개의 사이클  $C_m = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ 과  $C_n = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ 이 각각  $u_i (1 \leq i < m-s)$  및  $v_j (1 \leq j < n-s)$ 로부터 시작되는 길이 s  $(1 \leq s \leq \min(m, n))$ 의 부-경로(sub-path)를 서로 공유하여 다음 식이 성립한다고 가정하자.

$$u_{i+k} = v_{j+k} \quad (0 \leq k \leq s)$$

이와 같이 길이  $s$ 에 해당하는 부-경로를 서로 공유하고 있는 두 개의 사이클  $C_m$ 과  $C_n$ 을 대상으로 하는 「사이클 결합 연산(cycle merge operation)」  $\oplus$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$C_m \oplus C_n = (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i [=v_j], v_{j-1}, v_{j-2}, \dots, v_2, v_1, v_n, v_{n-1}, \dots, v_{j+s+2}, v_{j+s+1}, v_{j+s} [=u_{i+s}], u_{i+s+1}, u_{i+s+2}, \dots, u_{m-1}, u_m)$$



(그림 2) E-확장 및 W-확장 개념도

**[정의 4]** 피라미드 그래프 상의 임의의 계층- $l$  ( $1 \leq l \leq N-1$ )에 속한 두 정점  $(l,a,b)$ 와  $(l,a,b+1)$ 를 포함하여 기 구축된 사이클  $C$ 와  $x$ -방향을 따라 인접된 네 개의 정점  $(l,a+1,b)$ ,  $(l,a+1,b+1)$ ,  $(l,a-1,b)$  및  $(l,a-1,b+1)$ 에 대해 다음과 같은 두 가지 형태의 간선 확장 연산을 정의할 수 있다.

(1) E-확장(East Expansion): 기 구축된 사이클  $C$ 는 간선  $e = ((l,a,b),(l,a,b+1))$ 를 포함하며, 정점  $(l,a+1,b)$ 와  $(l,a+1,b+1)$ 은 포함하지 않는 경우 간선  $e$ 에 적용 가능한 E-확장 연산을  $E(C, e)$ 로 표기하며,  $C$ 의 해당 부분 간선 구성 내역은 확장 전후에  $C = (\dots,(l,a,b),(l,a,b+1),\dots)$ 에서  $C' = E(C,e) = (\dots,(l,a,b),(l,a+1,b),(l,a+1,b+1),(l,a,b+1),\dots)$ 로 변경된다.

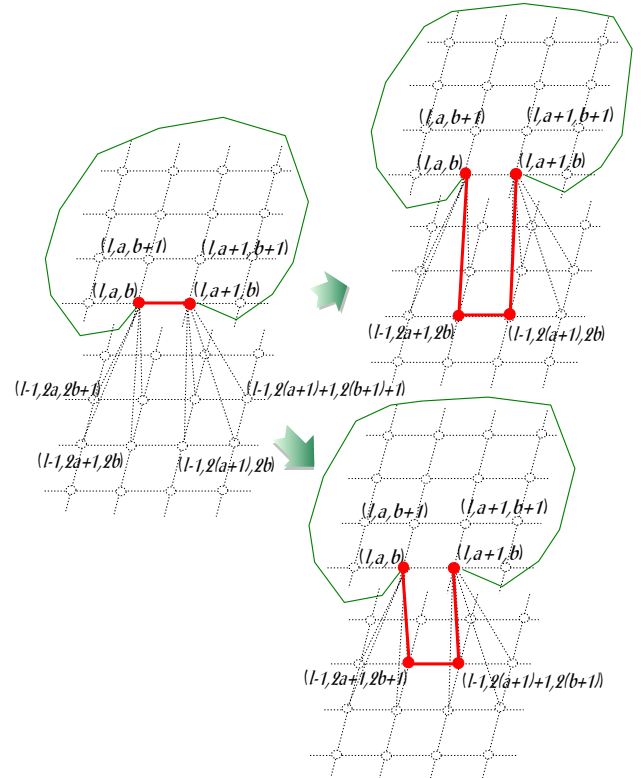
(2) W-확장(West Expansion): 기 구축된 사이클  $C$ 는 간선  $e = ((l,a,b),(l,a,b+1))$ 를 포함하며, 정점  $(l,a-1,b)$ 와  $(l,a-1,b+1)$ 는 포함하지 않는 경우 간선  $e$ 에 적용 가능한 W-확장 연산을  $W(C,e)$ 로 표기하며,  $C$ 의 해당 부분 간선 구성 내역은 확장 전후에  $C = (\dots,(l,a,b),(l,a,b+1),\dots)$ 에서  $C' = W(C,e) = (\dots,(l,a,b),(l,a-1,b),(l,a-1,b+1),(l,a,b+1),\dots)$ 로 변경된다.

**[정의 5]** 피라미드 그래프 상의 임의의 계층- $l$  ( $1 \leq l \leq N-1$ )에 속한 두 정점  $(l,a,b)$ 와  $(l,a+1,b)$ 를 포함하여 기 구축된 사이클  $C$ 와  $y$ -방향을 따라 인접된 네 개의 정점  $(l,a,b+1)$ ,  $(l,a+1,b+1)$ ,  $(l,a,b-1)$  및  $(l,a+1,b-1)$ 에 대해 다음과 같은 두 가지 형태의 간선 확장 연산을 정의할 수 있다.

(1) N-확장(North Expansion): 기 구축된 사이클  $C$ 는 간선  $e = ((l,a,b),(l,a+1,b))$ 를 포함하며, 정점  $(l,a,b+1)$ 과  $(l,a+1,b+1)$ 은 포함하지 않는 경우 간선  $e$ 에 적용 가능한 N-확장 연산을  $N(C,e)$ 로 표기하며,  $C$ 의 해당 부분 간선 구성 내역은 확장 전후에  $C = (\dots,(l,a,b),(l,a+1,b),\dots)$ 에서  $C' = N(C,e) = (\dots,(l,a,b),(l,a,b+1),(l,a+1,b+1),(l,a+1,b),\dots)$ 로 변경된다.

(2) S-확장(South Expansion): 기 구축된 사이클  $C$ 는 간선  $e = ((l,a,b),(l,a+1,b))$ 를 포함하며, 정점  $(l,a,b-1)$ 과

$(l,a+1,b-1)$ 은 포함하지 않는 경우 간선  $e$ 에 적용 가능한 S-확장 연산을  $S(C,e)$ 로 표기하며,  $C$ 의 해당 부분 간선 구성 내역은 확장 전후에  $C = (\dots,(l,a,b),(l,a+1,b),\dots)$ 에서  $C' = S(C,e) = (\dots,(l,a,b),(l,a,b-1),(l,a+1,b-1),(l,a+1,b),\dots)$ 로 변경된다.



(그림 3) 계층 상호간의  $L^x$ -확장 개념도

**[정의 6]** 피라미드 그래프 상의 임의의 계층- $l$  ( $1 \leq l < N-1$ )에 속한 간선들 중 각각  $x$ -방향 또는  $y$ -방향을 따라 배열된 간선  $e_1 = ((l,a,b),(l,a+1,b))$  및  $e_2 = ((l,a,b),(l,a,b+1))$ 를 포함하여 기 구축된 사이클  $C$ 에 대해  $z$ -방향을 따라 아래의 계층- $(l-1)$ 을 따라 인접된 정점들  $(l-1,2a+1,2b)$ ,  $(l-1,2(a+1),2b)$ ,  $(l-1,2a+1,2b+1)$ ,  $(l-1,2(a+1),2b+1)$  또는  $(l-1,2a,2b+1)$ ,  $(l-1,2a,2(b+1))$ ,  $(l-1,2a+1,2b+1)$ ,  $(l-1,2a+1,2(b+1))$ 에 대해 다음과 같은 확장 연산을 정의할 수 있다.

(1)  $L^x$ -확장(x-direction Layer Expansion): 기 구축된 사이클  $C$ 는 간선  $e = ((l,a,b),(l,a+1,b))$ 를 포함하고, 정점  $(l-1,2a+1,2b)$ 와  $(l-1,2(a+1),2b)$  및  $(l-1,2a+1,2b+1)$ 와  $(l-1,2(a+1),2b+1)$ 은 포함되지 않는 경우 간선  $e$ 에 적용 가능한 두 개의  $L^x$ -확장 연산을 각각  $L^x_1(C,e)$  및  $L^x_2(C,e)$ 로 표기하며,  $C$ 의 해당 부분 간선 구성 내역은 확장 전  $C = (\dots,(l,a,b),(l,a+1,b),\dots)$ 에서 확장 후 각각  $C' = L^x_1(C,e) = (\dots,(l,a,b),(l-1,2a+1,2b),(l-1,2(a+1),2b),(l,a+1,b),\dots)$  및  $C'' = L^x_2(C,e) = (\dots,(l,a,b),(l-1,2a+1,2b+1),(l-1,2(a+1),2b+1), (l,a+1,b), \dots)$ 로 변경된다.

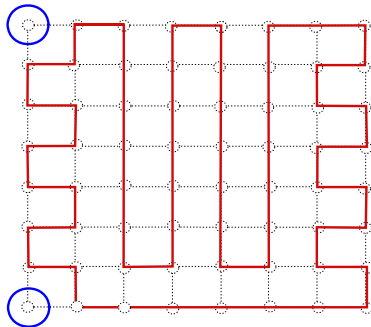
(2) (1)  $L^y$ -확장(y-direction Layer Expansion): 기 구축된 사이클  $C$ 는 간선  $e = ((l,a,b),(l,a,b+1))$ 을 포함하고, 정점  $(l-1,2a,2b+1)$ 와  $(l-1,2a,2(b+1))$  및  $(l-1,2a+1,2b+1)$ 과  $(l-1,2a+1,2(b+1))$ 은 포함되지 않는 경우 간선  $e$ 에 적용 가능한 두 개의  $L^y$ -확장 연산을 각각  $L^y_1(C,e)$  및  $L^y_2(C,e)$ 로 표기하며,  $C$ 의 해당 부분 간선 구성 내역은 확장 전  $C = (\dots,(l,a,b),(l,a,b+1),\dots)$ 에서 확장 후 각각  $C' = L^y_1(C,e) = (\dots,(l,a,b),$

$(l-1, 2a, 2b+1), (l-1, 2a, 2(b+1)), (l, a, b+1), \dots)$  및  $C'' = L_{\frac{1}{2}}(C, e) = (\dots, (l, a, b), (l-1, 2a+1, 2b+1), (l-1, 2a+1, 2(b+1)), (l, a, b+1), \dots)$ 로 변경된다.

### 3. 사이클 확장 시 제약조건

앞 절에서 정의된 사이클 결합 연산을 이용하여 인접된 사각형 형태의 사이클들을 확장시키는 일련의 과정에서 특별히 고려해야 할 제약조건들에 대해 분석해보고자 한다.

앞에서 정의한 각 확장 연산들의 적용 순서와 관련하여 임의대로 적용하였을 경우에 발생 가능한 문제점을 파악하기 위한 구체적인 방법의 일환으로써 어떤 상황에서 특정 정점들을 포함할 수 없게 되는지를 역으로 추적해 봄으로써 회피해야 할 조건(inhibit condition)들을 밝혀낼 수가 있는데 다음 보조정리가 이러한 의미로 해석될 수 있다.



(그림 4) 잘못된 확장연산 적용 예

**[보조정리 1]** 임의의 양의 정수값으로 주어진 높이  $N$ 인 파라미드 그래프  $P^N$  내 임의의 계층- $l$  ( $1 \leq l \leq N-1$ )에 속한 간선 중에서  $x$ -축과 평행한 방향을 따라 배열된 간선  $e = ((l, a, b), (l, a+1, b))$ 를 포함하여 기 구축된 사이클  $C$ 에 대해 확장 연산  $N(C, e)$  또는  $S(C, e)$  적용 시  $a$  값은 짝수(even)일 경우에만 제한적으로 적용해야만 해당 계층 내의 모든 정점들을 포함시킬 수 있다. 여기서  $1 \leq a, b < 2^{N-l} - 1$  이다.

**[증명]** 본 증명을 위해 위 조건을 준수하지 못했을 경우에 예상할 수 있는 미포함 정점이 발생 가능한 예를 (그림 4)를 통해 확인해 보임으로써 증명을 대신하고자 한다. □

위의 보조정리가 언급하는 바는  $y$ -축과 평행한 방향으로 배열된 간선들에 대해서는 특별한 제한없이  $W$ -확장 및  $E$ -확장을 적용 가능하나  $x$ -축과 평행한 방향으로 배열된 간선들에 대해서는 조건이 만족되는 범위 내에서만  $N$ -확장 및  $S$ -확장을 적용하도록 제한을 가함으로써 해당 계층 내의 모든 정점들을 사이클 구성에 참여시키고자 하는 배려인 셈이다.

동일한 논리적 근거에 의해  $x$ -축 및  $y$ -축의 대칭성을 이용하면 다음과 같은 보조정리도 성립함을 알 수 있다.

**[보조정리 2]** 임의의 양의 정수값으로 주어진 높이  $N$ 인 파라미드 그래프  $P^N$  상의 임의의 계층- $l$  ( $1 \leq l \leq N-1$ )에 속한 간선 중에서  $y$ -축과 평행한 방향을 따라 배열된 간선  $e = ((l, a, b), (l, a, b+1))$ 을 포함하여 기 구축된 사이클  $C$ 에 대해 확장 연산  $N(C, e)$  또는  $S(C, e)$  적용 시  $b$  값은 짝수(even)일 경우에만 제한적으로 적용해야만 해당 계층 내의 모든 정점들을 포함시킬 수 있다. 여기서  $1 \leq a, b < 2^{N-l} - 1$  이다. □

위의 두 보조정리가 언급하고자 하는 바는  $y$ -축 방향을 따라 진행되는  $N$ -확장 및  $S$ -확장과  $x$ -축 방향을 따라 진행되는  $W$ -확장 및  $E$ -확장의 두 방향 모두를 자유롭게 방치했을 경우에 예상되는 계층 내 미포함 정점들을 사전에 방지하기 위해 두 방향 중 하나의 방향에 대해서는 제한된 범위 내의 간선들에 대해서만 확장 연산을 적용할 수 있도록 고려해야 할 조건을 제시하고 있다고 해석할 수 있다.

위의 보조정리들에서 언급하고 있는 바와 같이 최대 길이 사이클 구성을 방해하는 제약조건들에 대해서만 주의 기울인다면 다양한 길이의 사이클들을 체계적으로 구성할 수 있음을 확인할 수 있다.

### 4. 결론

본 논문에서는 상호연결망 그래프 중의 하나인 피라미드를 대상으로 내재된 사이클들의 다양성을 밝히는데 필요한 사이클 확장 연산 적용 과정에서 회피해야 할 조건들에 대해 분석하였다.

이러한 조건의 밝혀냄으로써 적용가능한 다양한 사이클 확장 연산들 중에서 특정 조건 하에서만 일부 연산을 적용하도록 제한함으로써 가능한 모든 정점들이 사이클 구성 시 포함될 수 있도록 하기 위한 배려라고 해석할 수 있다.

이와 같이 상호연결망 내에서의 다양한 사이클 탐색을 위한 연구가 갖는 의의는 그래프 이론적인 의미뿐만 아니라 다중 프로세서들로 구성된 병렬처리시스템 상에서 프로세서 상호간 방송 또는 멀티캐스팅 형태의 메시지 전송과정에서 사이클을 하부 구조로 이용하게 되는 응용 등에서 실질적인 활용이 가능할 것으로 기대된다.

### 참고문헌

- [1] F. Berman and L. Snyder, "On mapping parallel algorithms into parallel architectures," *J. of Parallel and Distrib. Comput.*, Vol.4, pp.439-458, 1987.
- [2] B. Monien and H. Sudborough, "Embedding one interconnection network in another," *Computing Supplement*, Vol.7, pp.257-282, 1990.
- [3] R. Miller and Q. F. Stout, "Data Movement Techniques for the Pyramid Computer," *SIAM J. on Comput.*, Vol.16, No.1, pp.38-60, 1987.
- [4] Q. F. Stout, "Mapping Vision Algorithms to Parallel Architectures," *Proc. of the IEEE*, pp.982-995, 1988.
- [5] K. -L. Chung and Y. -W. Chen, "Mapping Pyramids into 3-D Meshes," *Nordic J. of Computing*, Vol.2, No.3, pp. 326-337, 1995.
- [6] 장정환, "피라미드의 3-차원 메쉬로의 신장을 개선 임베딩", *정보처리학회논문지-A*, Vol.10-A, No.6, pp. 627-634, 2003.
- [7] Y. C. Tseng, D. K. Panda and T. H. Lai, "A Trip-based Multicasting Model in Wormhole-routed Networks with Virtual Channels," *IEEE Trans. on Paral. and Distrib. Sys.*, Vol.7, No.2, pp. 138-150, 1996.