韓國數學教育學會
<全國數學教育研究大會 프로시딩>
제 38회. 2007. 6. 75-83

Korea Soc. Math. Ed.
Proceedings of National Meeting of Math. Ed.
The 38th. Jun. 2007. 75-83

포디프레임을 활용한 피타고라스 정리의 활용

김 영 관 (조천중학교)

1. 들어가며

눈에 보인다는 것은 편안하다. 문제에 쉽게 접근할 수 있기 때문이다. 학생들에게 수학을 어렵게 생각하는 이유가 뭐냐? 라고 물어보면 수학이 눈에 보이지 않기 때문이라고 한다. 추상적 세계를 이해하기 어렵기 때문이 수학이 싫어진다고 한다. 그런데 교사는 한번도 본 적이 없는 세계를 학생들에게 생각하라고 한다. 실제로 본 적도 없고, 생각해도 잘 되지도 않는 세계를 종이 위에 그려놓고 무작정 생각하라고 한다. 이것은 '수학을 싫어해라' 라고 말하는 것과 별반 다를 것이 없다.

특히 입체도형에서는 더욱 그러하다. 입체도형은 평면도형보다 훨씬 복잡하고 어렵게 느껴진다. 2차원을 보면서 3차원을 생각하는 것이 그리 편안할 리가 있겠는가? 그러나 놀랍게도 대부분의 학생들은 실제 입체도형 없이 상상만으로 문제를 해결한다. 이유는 문제해결과정에서 필요한 입체도형을 만들기가 너무 어렵거나, 입체도형이 있다 해도 개인이 구입하기는 그것이 비싸기 때문이다.

이 때, 교사는 적극적으로 입체도형을 제시해 주어야 한다. 학생들이 흥미와 호기심을 유발시키고 사고의 유연성과 직관력을 경험하게 할 수 있는 자료를 제시하여 직접 만들고 느끼도록 도와주어야 하고, 그 과정을 면밀히 살피면서 생각을 이끌어낼 수 있도록 해야 한다.

포디프레임은 도형의 원리와 입체를 쉽게 구현할 수 있는, 국내에서 개발한 교구이다. 포디프레임은 여러 특징을 가지고 있다. 우선 다른 수학교구에 비해 응용력이 뛰어났다. 쉽게 다룰 수 있었고, 적당한 탄력성을 가지고 있어서 다양한 모양의 입체를 만들 수 있었다. 가위로 자를 수 있기 때문에 변형이 자유로웠다. 접착제가 필요 없어 안전했고, 여러 번 쓸 수 있었다. 이런 특징들 때문에 포디프레임을 이용하면 정말로 쉽고, 간단하게 아주 빠른 시간 내에 원하는 다면체를 만들 수 있었다.

이 글에서는 수학 9-나. 피타고라스의 정리의 활용에서 학생들이 수업시간이나 문제지에 흔히 등장하는 입체도형을 포디프레임으로 직접 만들어 봄으로써, 문제해결에 필요한 직각삼각형을 학생 스스로가 찾을 수 있도록 하고, 입체를 관찰해 보면서 수학에 대한 긍정적인 사고와 새로운 사고의 전환을 가져오도록 하는데 그 목적이 있다.

2. 수업의 실제

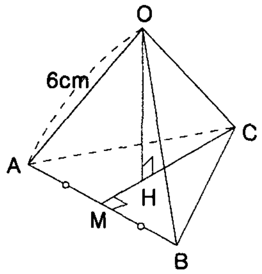
수업시간이나 문제지에 흔히 등장하는 입체도형 중에서 학생들이 직접적인 조작 활동이 쉽고 빠르게 만들 수 있는 입체를 학습지 형태로 제시하여 직접 만들어보고, 문제를 풀도록 한다.

본시 교수・학습 과정안

단원	Ⅱ. 피타고라스의 정리 2. 피타고라스의 정리의 활용	차시	12/12
학습주제	다양한 활동을 통한 피타고라스의 정리 수행 과제 해결	대상	3학년 반 (명)
학습목표	피타고라스의 정리를 입체도형에 활용할 수 있다.		
학습개요	포티프레임을 이용하여 입체도형을 만들고 피타고라스의 정리를 활용하여 입체도형의 길이와 절단된 면의 넓이를 구한다.		
일시	2007. . . (요일) 교시	장소	

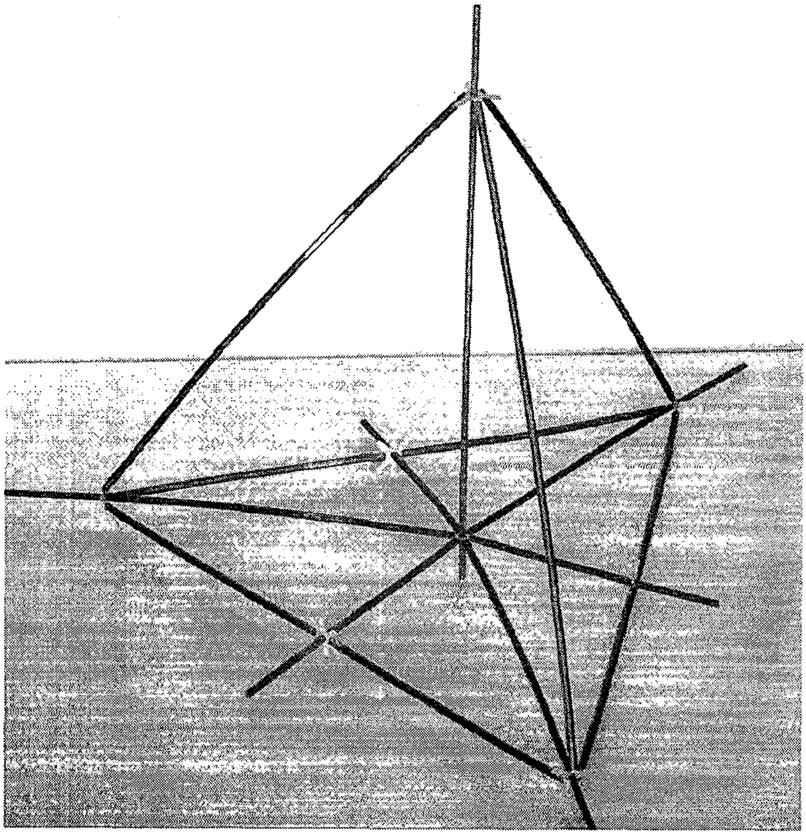
단계	교수 - 학습 활동	ICT자료
도입 (5분)	**포디프레임을 이용하여 입체도형 만들기** 1) 포디프레임 사용방법(자르기, 연결하기)을 설명한다. 2) 모둠별활동 : 문제 선택 -> 포디프레임으로 입체도형 만들기 -> 직각삼각형 찾기 -> 피타고라스의 정리를 이용하여 문제 해결 -> 발표 **학습목표 확인** - 피타고라스의 정리를 입체도형에 활용할 수 있다.	전자칠판
전개 (30분)	**활동1 (15분) - 모둠장이 나와서 문제를 선택한다.** - 모둠장이 나와서 문제를 뽑는다. - 문제가 든 봉투를 가지고 모둠으로 들어가 문제 속의 입체도형을 포디프레임으로 만든다. (봉투 위에 만드는 방법을 설명하여 붙여놓는다.) - 입체도형이 쉽게 만들어지지 않으면 조용히 손을 들어 선생님에게 도움을 요청한다. (교사는 만드는 방법을 가르쳐주며 도와준다. 수업 전에 미리 모둠장을 불러 포디프레임의 사용법을 가르쳐주면 훨씬 수월하다.) - 입체도형이 만들어지면 입체도형을 보고 문제가 요구하는 직각삼각형을 찾고 피타고라스의 정리를 이용하여 문제를 해결한다. **활동2 (15분) - 발표** - 완성한 모둠은 만든 입체도형을 가지고 나와서 문제를 어떻게 풀었는지 발표한다. 이 때 문제의 포인트인 직각삼각형이 어떻게 만들어지는지 설명한다. 의문사항은 질문한다.	전자칠판 포디프레임 가위 학습지
정리 (10분)	**학습지 설명** - 입체도형을 평면에 그렸을 때의 문제점을 생각해보고, 간단하게 정리한다. 완성하지 못한 조는 완성하여 제출하도록 한다. - 발표를 잘한 두 모둠을 선정하여 책갈피를 주어 보상한다. - 수학이 아름답다는 것을 강조한다.	전자칠판

[문제1] 다음 그림과 같이 한 모서리의 길이가 6cm인 정사면체의 높이를 구하여라.

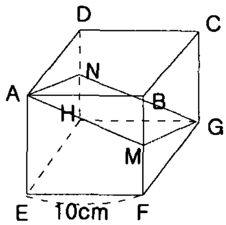


(만들기) ① 검은색 연결봉 6개를 같은 길이로 자르고 6발로 연결하여 정사면체를 만들다. ② 밑면의 세변의 중점을 각각 잘라 8발을 끼운다. 이 때 8발의 가운데 구멍과 밑면은 수직이 되게 한다. ③ 밑면에서 꼭지점과 대변의 중점을 파란색 연결봉으로 연결한다(중선). 그 교점이 밑면의 무게 중심이다. ④ 무게 중심을 가위로 자르고 육발을 이용하여 모두 연결한다. 이 때, 무게중심은 중선을 2:1로 나눈다. ⑤ 분홍색 연결봉은 꼭지점에서 밑면에 내린 수선이고, 수선의 발과 무게중심이 일치하는 것을 확인한다. ⑥ 이 때 생겨나는 직각삼각형에서 피타고라스의 정리를 이용하여 삼각형의 높이를 구한다.

(완성된 모습)

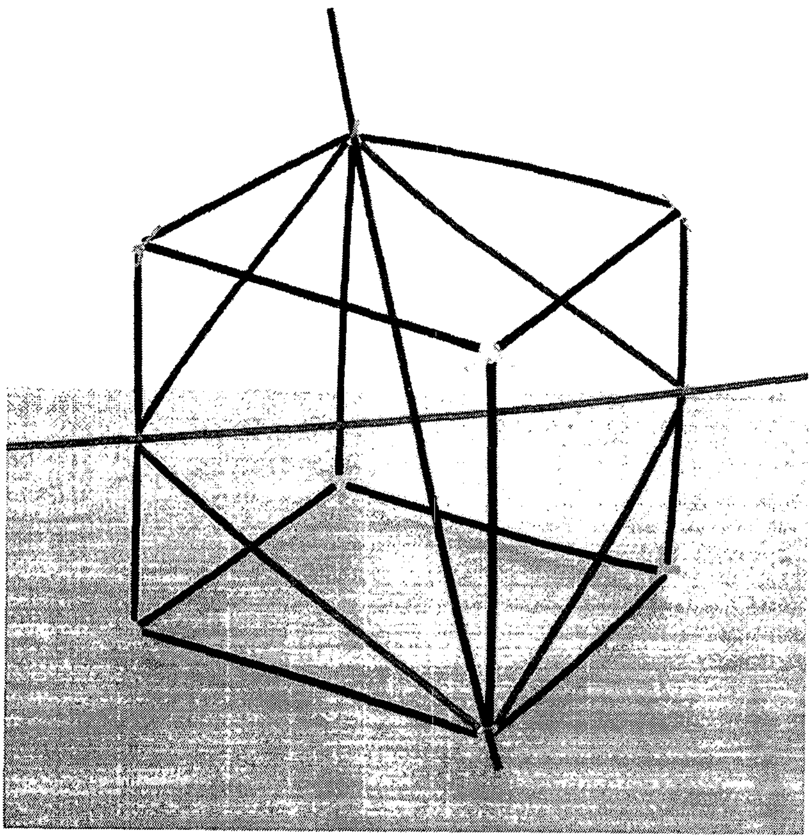


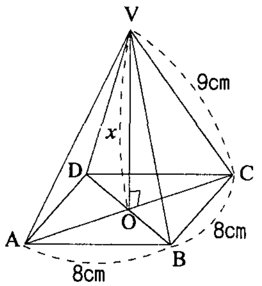
[문제2] 아래 그림과 같이 한 모서리의 길이가 10cm 인 정육면체에서 점 M, N 은 각각 모서리 $\overline{BF}$, $\overline{DH}$ 의 중점이다. 이 때, 네 점 A, M, G, N 을 차례로 이어서 생기는 마름모의 넓이를 구하여라.



(만들기) ① 검은색 연결봉 12개를 같은 길이로 자르고 6발로 연결하여 정육면체를 만들다. ② 마주보는 모서리 2개의 중점을 잘라 8발을 끼운다. ③ 파란색 연결봉을 적절히 자르고(직접 대어보고 자른다), AM, MG, AN, NG를 연결한다. ④ 이 때 생겨나는 사각형은 무슨 사각형인가? (정사각형, 직사각형, 평행사변형, 마름모) 중 어느 것인가? ⑤ 초록색 연결봉은 밑면(정사각형)의 대각선의 길이와 같다. ⑥ 빨간색 연결봉은 정육면체의 대각선의 길이와 같다.

(완성된 모습)

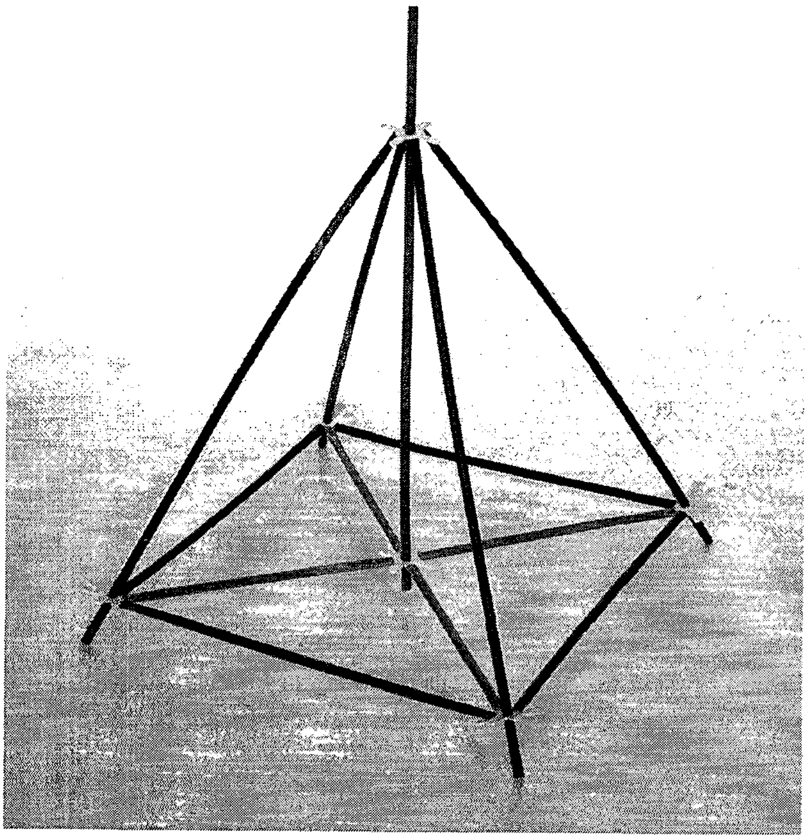




[문제 3] 밑면의 정사각형의 한 변의 길이가 8cm이고 옆면의 한 모서리의 길이가 9cm인 정사각뿔이 있다. 높이 $\overline{VO}$ 의 길이와 부피를 구하여라.

(만들기) ① 검은색 연결봉 4개를 같은 길이로 자르고 8발에 끼워 정사각형을 만든다. ② 검은색 연결봉 4개를 1번 보다 조금 길게, 같은 길이로 잘른다. 연결봉의 한쪽 끝을 정사각형의 꼭지점 구멍에 끼우고, 반대쪽 끝을 8발에 모아 사면체의 꼭지점을 만든다. ③ 밑면에 파란색 연결봉을 연결하여 대각선을 만든다. 대각선의 교점은 8발로 연결한다. ④ 빨간색 연결봉을 꼭지점에서 밑변의 대각선의 교점에 연결한다. 이것이 정사각뿔의 높이다.

(완성된 모습)

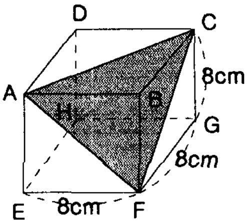


[문제 4] 그림과 같이 한 모서리의 길이가 8cm인 정육면체를 꼭지점 A, C, F를 지나는 평면으로 자를 때 생기는 삼각뿔에 대하여 다음 구하여라.

(1) △AFC의 넓이

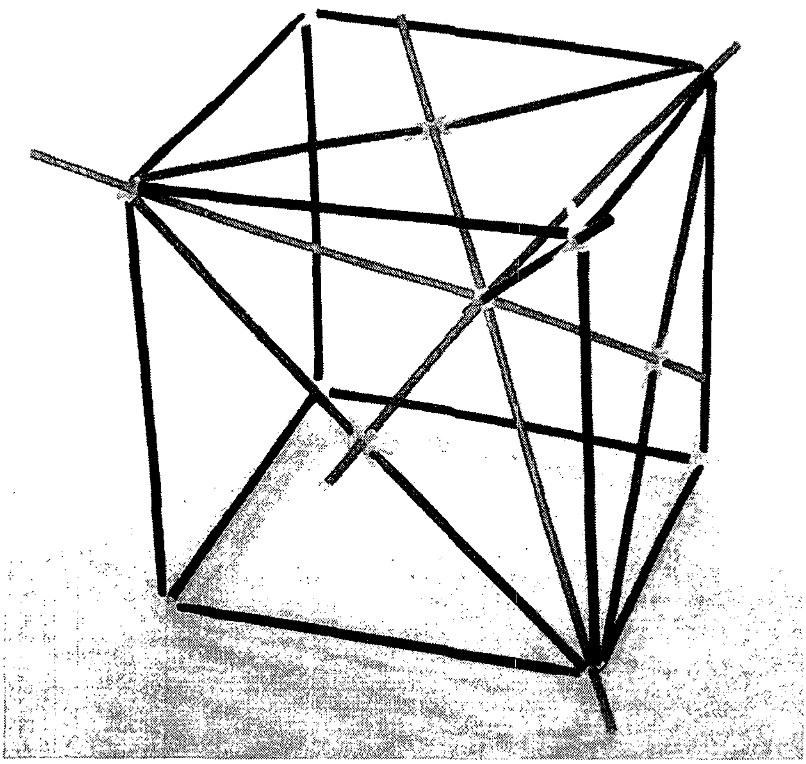
(2) 삼각뿔 B－AFC의 부피

(3) 점 B에서 △AFC까지의 거리

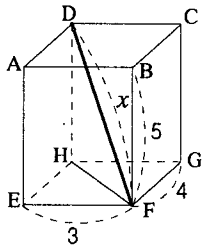


(만들기) ① 검은색 연결봉 12개를 같은 길이로 자르고 6발로 연결하여 정육면체를 만들다. ② 파란색 연결봉을 이용하여 대각선을 3개를 만들면 정삼각형이 생긴다. ③ 정삼각형의 각변의 중점을 자른 후 8발로 연결한다. 정삼각형의 꼭지점과 대변의 중점을 초록색 연결봉으로 연결하고, 그 교점을 잘라 6발로 연결한다. 이 교점이 정삼각형의 무게 중심이다. ④ 정육면체의 꼭지점과 정삼각형의 무게 중심을 빨간색 연결봉으로 연결한다.

(완성된 모습)

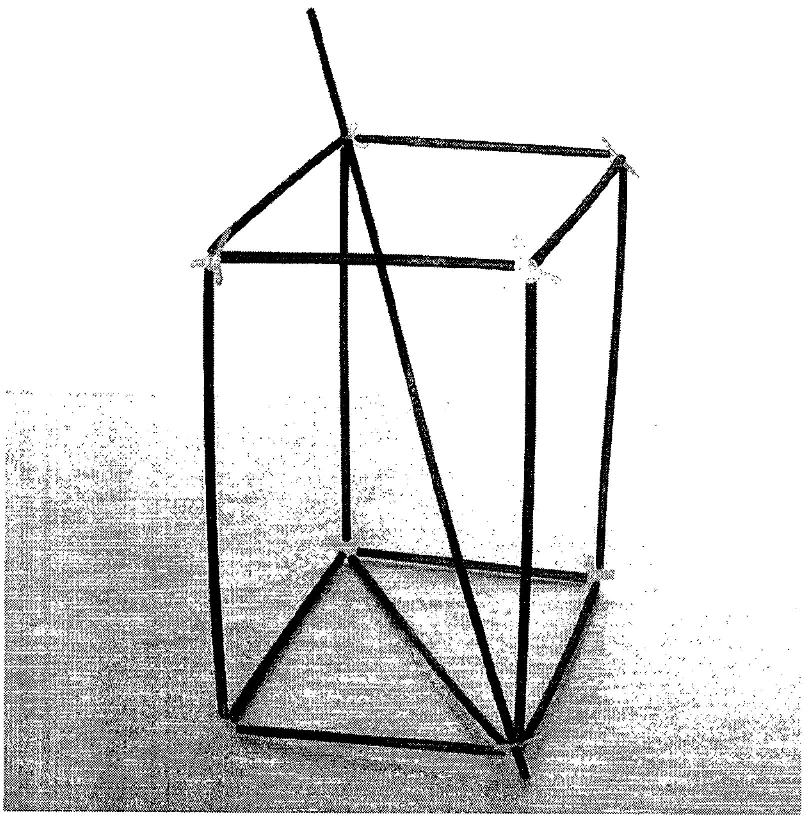


[문제 5] 세 모서리의 길이가 3cm, 4cm, 5cm 인 직육면체의 대각선의 길이를 구하여라.

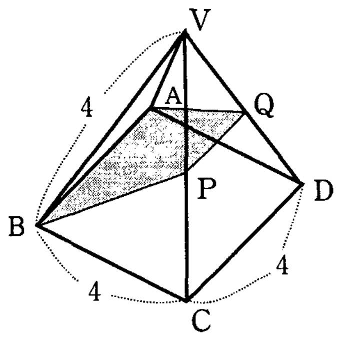


(만들기) ① 검은색 연결봉으로 짧은 것 4개, 중간 것 4개, 긴 것 4개 모두 12개를 자르고 6발로 연결하여 직육면체를 만들다. ② 파란색 연결봉으로 밑면의 대각선을 만든다. ③ 빨간색 연결봉으로 직육면체의 대각선을 만든다.

(완성된 모습)

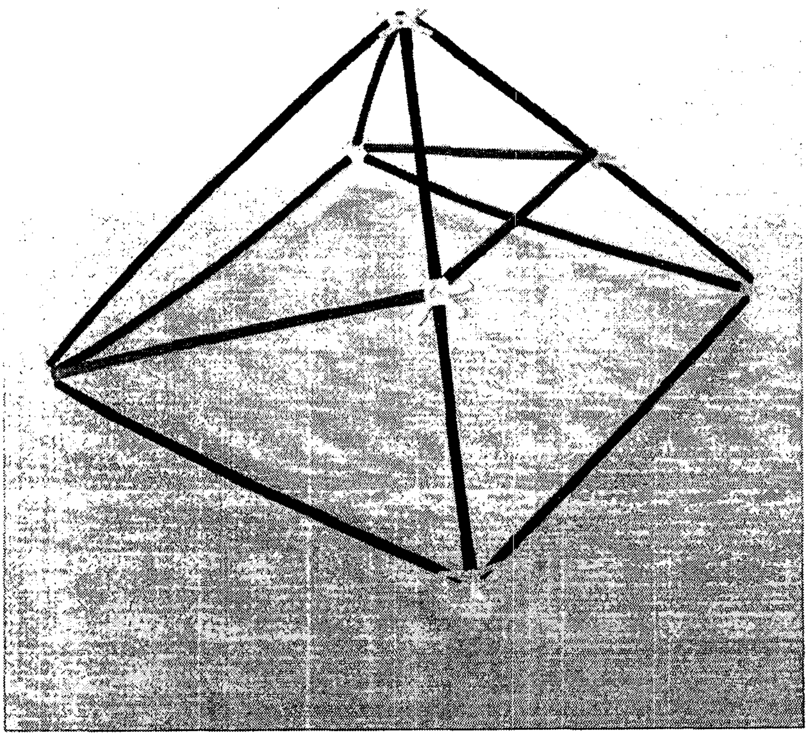


[문제 6] 오른쪽 그림과 같이 각 모서리의 길이가 모두 4cm 인 정사각뿔에서 $\overline{VC}$ 의 중점을 P, $\overline{VD}$ 의 중점을 Q 라고 할 때, 사다리꼴 ABPQ 의 넓이를 구하여라.



(만들기) ① 검은색 연결봉 8개를 같은 길이로 잘라 정사각뿔을 만들다. 이 때, 바닥은 6발을 사용하고, 꼭지점은 8발을 사용한다. ② 옆면의 모서리 두 개의 중점을 자른다. ③ 파란색 연결봉을 적절히 자르고(직접 대어보고 자른다), BP, PQ, AQ를 연결한다.

(완성된 모습)



3. 나오며

학생들은 오랜 시간동안 교과서 속의 수학 문제와 씨름한다. 문제를 보는 순간 문제해결의 방법을 알아내는 통찰을 발휘하는 학생도 있다. 하지만, 아무리 봐도 모르겠다고 하는 학생도 있다. 이런 학생들은 특히 평면 속의 입체에서 직각삼각형을 찾아내는 것을 무척 힘들어했다. 입체를 회전시키면 직각삼각형이 보인다는 것을 이해시킬 수 없었다. 방법은 이 그림속의 입체를 직접 만들어서 보여주는 것 밖에 없었다. 포디프레임을 이용하여 학생들과 문제의 입체를 만들었고, 손에 쥐어주었다. 학생은 입체를 천천히 회전 시켜가면서 입체를 관찰했다. 그리고 그 학생은 피타고라스 정리를 적용할 직각삼각형을 밝은 미소와 함께 결국 찾아냈다.

학생들과 문제 속의 입체를 만들어보면서 나름대로 얻게 된 몇 가지를 적어본다.

① 대부분의 학생들이 홍미와 관심을 가진다. - 문제를 쉽게 이해하는 학생이든 그렇지 못하는 학생이든 종이 위에 누워 잠자는 2차원 입체에게 생명을 불어넣어 3차원 입체로 되살려낸다는 것을 무척 좋아한다. 문제를 떠나서 마치 자기가 조물주가 된 것처럼 만든다는 것에 홍미와 커다란 관심을 나타냈다.

② 직접 눈으로 보면서 관찰하기 때문에 문제 이해가 쉽다. - 문제 속에 입체가 살아났다. 돌려보고, 뒤집어 보고, 때론 한 눈을 감고 문제 속의 입체와 실제 입체를 비교하면서 관찰한다. 직접 눈으로 본다는 것은 편안하다. 구해야 할 것이 무엇인지 알게 되었다.

③ 수업에 적극적으로 참여하고 자신의 의견을 발표한다. - 수학을 잘 하지 못하는 학생들 중에도 이런 입체를 잘 만드는 학생들이 있다. 평상시 수업에는 소극적이었지만 이 때는 실패를 두려워하지 않는다. 입체를 잘 만들지 못하는 친구에게 도움을 주고, 자신과 다른 방법으로 만드는 학생과 논쟁을 두려워하지 않는다.

④ 볼 수 없었던 부분을 볼 수 있고, 생각할 수 없었던 것을 생각할 수 있게 한다. - 교과서의 그림은 상상력을 충분히 제한한다. 하지만 입체는 다르다. 바라보는 위치에 따라서 대칭도 볼 수 있고, 닮음도 볼 수 있다. 특히, 포디프레임으로 만든 입체는 속 모습까지 보여주었기 때문에 그 입체도형 자체의 정교한 아름다움도 볼 수 있었다. 눈앞에 보이는 입체는 더 높은 단계의 상상력을 필요로 하고, 학생들은 가끔씩 기대하지 않았던 신기함과 재미를 얻었다.

⑤ 수학에 대한 새로운 시각을 가진다. - 교과서와 문제지 속의 수학 문제는 단지 문제를 풀기 위한 수학이었다. 그래서 별로 재미없는 수학이었다. 그러나 포디프레임으로 입체를 만드는 것은 생각보다 쉬웠고, 그 과정에서 겪는 여러 가지 경험은 만드는 재미, 눈으로 보는 재미, 생각하는 재미를 주는 수학으로 점차 수학에 대한 새로운 시각을 가지게 하였다.

⑥ 수학을 좋아한다. - 입체를 만드는 과정은 학생들이 결국 수학에 대한 생각을 조금이나마 바꾸게 하는 계기가 된다. 예전보다 수학을 조금 더 관심 있게 바라보고, 조금 더 긍정적으로 문제를 바라보고, 조금 더 적극적으로 문제를 풀었다. 조금 더 수학을 좋아하게 되었다.