

비례적 추론의 발달 과정 특성 분석 - 초등·중등 수학의 연계성을 중심으로* -

권 오 남 (서울대학교)

박 정 숙 (서울대학교 대학원)

박 지 현 (서울대학교 대학원)

비와 비례의 개념 및 비례적 사고는 수학, 과학 그리고 일상생활의 많은 영역에서 친숙하게 활용되고 있다. 자동차의 시속, 지도의 축척, 퍼센트, 농도, 이자계산 등 일상생활의 많은 부분들이 비례적 사고와 관련되어 있고, 학교 수학에서는 분수, 유리수, 기율기, 확률, 다투비, 속력 그리고 미분계수 등의 개념들과 연결되어 있으며, 변수, 함수, 일차방정식의 그래프는 비례적 관계에 대한 보다 형식적인 표현이라고 볼 수 있다. 과학에서 비례성은 밀도, 단위 변환, 화학식, 산과 염기 등의 개념과 연결되어 있으며, 많은 과학 법칙도 비례적 사고를 가정하고 있다(Lawson, Karplus, & Adi, 1978).

비는 두 양 사이의 수치적 관계를 나타내는 것이고, 비례는 두 비의 동치관계($\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$)를 포함하고 있다(Hart, 1988). 그러나 비례식을 포함한 문제를 푸는데 모든 사람들이 비례적 추론을 이용하는 것은 아니다. Cramer와 Post 그리고 Currier(1993)는 두 비의 동치 관계에서 유도되는 $ad = bc$ 와 같은 알고리즘은 비례적 추론이 아닌 절차적 지식이며 이 같은 문제를 해결했다고 해서 비례적 추론 능력이 잘 발달되었다고 할 수 없다고 하였다. 비례적 상황이 아닌 경우에 비례적으로 문제를 해결하는 것도 제대로 된 비례적 추론이라고 할 수 없으므로, 비례적 추론은 다양한 문제 유형을 해결할 수 있는 능력, 비례적이지 않은 상황과 비례적인 상황을 식별하는 능력을 포함한다.

Inhelder와 Piaget(1958)는 비례적 추론의 본질적인 특성은 두 대상 사이에 단순한 관계식이 아닌 관계식 사이의 관계 즉, 이차적(second-order) 관계를 포함해야 한다고 제시하였고, Karplus 등(1983)은 두 변수 사이에 일차함수적 관계($y = mx$)가 존재하는 두 변수 사이의 추론이라고 하였다. Post 등(1988)은 비례적 추론을 공변량과 승법적 비교를 포함하는 수학적 추론의 한 형태이며 여러 가지 정보를 기억하고 진행하는 능력으로 정의하였다. 이러한 정의들은 비례적 추론을 수학적 추론의 일부로 보고 있음을 알 수 있다.

본 연구에서는 '비례적 추론'을 일차함수적 관계가 존재하는 두 변수의 공변성과 승법적 비교를 포함한 수학적 추론 뿐 아니라 실제계의 현상을 추측하는데 유용한 비감각을 모두 포함한 것으로 해석하고 맥락적 상황에서의 비례적 추론의 발달 과정 특성을 분석하고자 하였다.

* 이 논문은 2006년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음(2005-B00042)

이 같은 목적을 위해 중학교 1, 2, 3학년 학생 180명을 대상으로 과제 설문과 인터뷰를 실시하였다. 설문지는 비례적 추론 문제해결 과제로 크게 4개의 유형으로 구성하였다. 각각의 유형은 Lamon(1993)의 네 가지 의미론적 유형(조합된 맥락, 부분-전체, 단위, 확대-축소 맥락)에 따랐으며, 유형에 따라 과제 상황에 비가 주어지고 구체적인 값을 찾는 '결측치 문제'와 구체적인 수가 나타나 있지 않은 상황에서 비 감각을 묻는 '수치 비교 문제'를 각각 구성하였다. 과거 비례적 추론을 정의하기 위한 많은 연구가 결측치 문제에 대한 학생들의 반응을 주로 다루었으나 결측치 문제가 비례적 추론 전부를 나타낸다고 할 수 없고, 비교 상황 역시 학생들이 가지고 있는 비례적 추론을 평가하고 신장시키는데 필요한 과제로 보아 수치비교문제를 추가하였다. 과제 설문지의 결과에 따라 4가지 유형의 문제를 모두 잘 해결한 학생, 3가지 유형의 문제를 해결한 학생, 2가지 유형의 문제를 해결한 학생, 1가지 유형의 문제를 해결한 학생들 중 각각 2명씩을 선별하여 반구조적 인터뷰를 실시하여 구체적으로 맥락문제 해결에 있어 학생들의 비례적 추론 과정과 개념변화를 분석하였다.

설문지와 인터뷰 내용을 분석한 결과, 학생들은 개념적 이해보다 절차적 계산에 능숙함을 알 수 있었다. 4가지 유형을 모두 잘 해결한 학생들은 공변량과 승법적 비교를 포함한 수학적 추론을 능숙하게 하여 관계식도 잘 세운 반면 2가지 또는 3가지 유형의 문제를 성공적으로 해결한 학생은 어느 정도의 승법적 비교는 가능했지만 변화라는 측면에서 공변성을 인식하는 데는 어려움을 나타내었다.

그동안 비례적 추론의 발달 과정의 특성 중 하나가 가법적 비교 단계에서 승법적 비교로 전이하는 것임을 많은 선행 연구에서 제기하였고 초등학교에서 중등학교로 발달 과정에서 필수적인 요소임을 인정하고 있다. 그러나 비례적 추론의 정의에서는 공변량의 인식을 제기하고 있으나 이들 학생들이 공변량을 어떻게 인식하고 있는지에 관한 연구는 미비하였다. 본 연구 결과는 비례적 추론의 문제해결 과정과 학생들의 공변량의 인식 정도 사이의 관계와 공변량의 인식이 비례적 추론의 발달 과정의 특성임을 밝히고 있다. 따라서 연구 결과는 교수 학습과정에서 비례적 추론을 개발하고 전략을 발전시키는 데 도움이 될 수 있다.

참 고 문 헌

- Cramer, K., Post, T., & Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion : Research implications. In D.T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp.159-178). New York : Macmillan.
- Hart, K. (1988). Ratio and proportion. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number-concepts and operations in the middle grades* (pp.198-219). Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.
- Karplus, R., Polos, S., & Stage, E. K. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on 'rate' problems. *Educational Studies in Mathematics*, 14, pp.219-233.

- Lamon, S. (1993). Ratio and proportion : Connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, **24**, pp.41-61.
- Lawson, A. E., Karplus, R. & Adi, H. (1978). The acquisition of propositional logic and formal operational schemata during the secondary school years. *Journal of Research in Science Teaching*, **15(6)**, pp.465-478.
- Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept Part I -Differentiation of stages, *Educational Studies in Mathematics*, **11**, pp.217-253.
- Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept Part II -Problem-structure at successive stages : problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring, *Educational Studies in Mathematics*, **11**, pp.331-363.