韓國數學敎育學會
<全國數學敎育硏究大會 프로시딩>
제 38회. 2007. 6. 21-28

Korea Soc. Math. Ed.
Proceedings of National Meeting of Math. Ed.
The 38th. Jun. 2007. 21-28

# 탐구주제로서의 원주율 값의 상수성과 아르키메데스의 계산법[1)]

최 영 기 (서울대학교)
홍 갑 주 (서울대학교 대학원)

학교수학의 내용 중에는 수학적으로 깊은 의미를 가지고 있지만, 교실수업에서는 자명한 것으로 취급되어 그 중요성이 간과되고 있는 것이 있다. 본 연구에서는 원주율의 값이 상수라는 익숙한 사실을 그 구체적인 예로 들어 수학적 의미를 재음미하는 한편, 아르키메데스가 원주율을 계산한 방법 속에서 교육적 시사점을 찾아 탐구주제로서의 원주율의 가치를 부각시키고자 한다.

## Ⅰ. 서 론

수학적으로 깊은 의미를 담고 있으며 결코 자명하지 않은 내용이 교실수업에서는 오히려 자명한 것으로, 그 중요성이 간과되어 가르쳐지는 경우가 있다. 물론 학교수학의 지도내용은 수준상의 한계를 가지고 있다. 그러나 일견 교육자 스스로는 이미 그 사실에 너무 익숙하여 학생들이 느낄 수 있는 감흥을 고려하지 못하였거나, 그 내용에 대한 수학적 경험의 부족으로 인해 학생들과 논의할 가치가 있는 관점을 찾지 못하는 경우도 있을 것이다. 예컨대, 원주율은 원의 둘레 혹은 넓이에 관계된 계산상의 필요 때문에 초등학교 교육과정에서부터 실험을 통한 방법으로 일찍 다루어지지만, 그 이후로는 당연한 사실로 받아들여져서 학생들 수학적 역량의 성장에 맞추어진 더 이상의 논의나 탐구가 이루어지지 않는다.

그러나, 원주율의 값이 상수라는 사실은 지금 다루고 있는 기하 혹은 공간의 수학적 구조와 관련하여 중요한 의미를 함축하고 있다. 또한 아르키메데스의 원주율 계산법에 대한 수학적 탐구는 무리수와 제곱근의 계산을 배운 학생들에게 계산 연습의 기회를 자연스럽게 제공함은 물론, 알고리즘의 의미를 보여주고 기하와 대수에 걸친 수학적 아이디어들이 조화롭게 결합되는 과정을 보여준다는 점에서 의미 있을 것으로 보인다. 이러한 인식하에 본 연구에서는 원주율의 값이 상수라는 사실을 수학적으로 재음미하고, 원주율 값의 계산에 대한 아르키메데스의 연구를 분석하여 그 탐구주제로서의 교육적 가치를 드러내는 한편, 원주율 탐구를 주제로 한 실제 수업의 구성방안을 모색하고자 한다. 이 수업은 아르키메데스의 탐구를 큰 주제로 하고 서울 시내 모 중학교 3학년 자원자들을 대상으로 하는 총 10회의 수업 중 1회분으로 기획된 것이다.[2)]

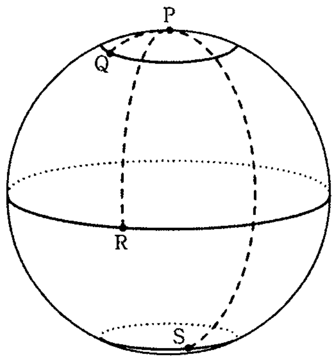
---

1) 본 연구는 한국학술진흥재단 2006년도 고급지식확산지원사업의 지원에 의하여 연구되었음.
2) 이 수업은 무게중심, 원주율, 원의 넓이, 구의 부피 등 학교수학의 내용과 관련된 아르키메데스의 연구를 학생들 수준에 맞게 재구성하여 지도함으로써, 학생들에게 수학의 내용적 지식을 전달함과 더불어,

# Ⅱ. 원주율 값의 상수성

## 1. 유클리드 기하의 불변량으로서의 원주율

"원 둘레의 길이를 지름의 길이로 나눈 값"으로서 원주율을 정의할 때는, 그 값이 반지름의 길이에 상관없이, 혹은 원의 위치에 상관없이 일정하다는 사실이 함축되어 있다. 그러나 이는 원의 정의 자체에는 포함되어 있지 않는 사실로서 어떤 가정을 암묵적으로 전제하여 증명되는 것이다. 이 사실은 다음과 같은 관찰을 통해 인식할 수 있다. 그림 1에서 단위구면상의 작은 길이 $PQ$를 반지름으로 하는 '원'에 대해서는 그 지름과 둘레의 길이비가 평면에서의 원주율 값과 거의 일치할 것임을 알 수 있다. 그러나 $PR$을 반지름으로 하는 원 즉, 그림1의 구에서 '적도'에 해당하는 원에 대해서는 그 길이비가 $2\pi/\pi=2$이다. 반지름이 $PS$와 같이 대원 둘레 길이의 절반에 가깝도록 길어지면 원의 둘레는 오히려 줄어들어 그 길이 비는 0에 가까워진다.[3] 즉, 단위구면 위에서 원의 지름에 대한 둘레의 길이비는 상수가 아니며, 반지름이 $\pi$에 가까워질수록 그 값은 0에 가까워진다.



<그림 1> 구면 위에서의 원주율의 변화

이러한 관찰은 원주율의 값이 상수라는 사실이 그 원이 놓인 공간의 특징을 반영하고 있음을 보여준다. 실제로, 원주율의 값이 일정하다는 사실은 유클리드 기하의 고유한 성질이다. 원에 대한 또 하나의 명제, 원의 넓이가 반지름의 제곱에 비례한다는 것 역시 그러하다. 역사적으로, 이 사실은 유클리드의 《원론》 12권 명제 2에서 평행선 공준을 필수적으로 사용하여 증명되어 있음을 확인할 수 있다(Heath, 1956).

여러 수학적 아이디어들을 비교 감상하고, 증명의 논리적 기반을 신중하게 되짚어 보는 것과 같은 다양한 수학적 경험을 제공하는 것을 목표로 하고 있다.

3) 실제로 단위구 위에서 반지름 $r$인 원은 그 둘레가 $2\pi\sin r$이고, 따라서 원주율은 $\frac{2\pi\sin r}{2r}=\pi\frac{\sin r}{r}$이 됨을 쉽게 알 수 있다.

## 2. 공간의 내재적 성질로서의 원주율

앞에서는 구면 위에서 원주율의 변화가 평면과는 다름을 살펴보았다. 그런데, 이 사실을 거꾸로 살펴보면 원주율의 변화를 관찰함으로써 그 원이 놓여있는 곳이 평면이 아님을 알 수 있다는 것이 되며, 이는 원이라는 도형의 성질이 그 원이 놓여있는 공간의 성질을 반영하고 있음을 말해준다. 이러한 사실은 수학적으로, 그리고 인식론적으로 중요한 함의를 가지고 있다.

어떤 기하학적 대상의 성질을 분류하는 기준 중, 외재적인 성질과 내재적인 성질로의 분류가 있다. 도형의 외재적인 성질이란 그것을 포함하는 더 큰 공간을 가정할 때, 그 공간에서 정의되는 개념을 통해 파악되는 성질이다. 반면, 내재적인 성질이란 더 큰 공간을 가정하지 않고, 그 대상 내부에서 정의되는 개념을 통해 파악되는 성질이다. 우리의 시각적 경험에 비추어 볼 때 곡면의 굽어진 정도 즉, 곡률은 그 곡면을 포함하는 3차원 공간에서 정의될 것으로 여겨진다. 실제로 곡면의 곡률을 다음과 같이 정의할 수 있다. 먼저 평면곡선 위의 한 점에서의 곡률을 곡선에 대한 그 점에서의 접촉원의 반지름의 역수로 정의한다. 이제, 곡면 위의 임의의 점 P에서의 법선을 포함하는 평면을 그 법선을 축으로 하여 1회전시키면 매 순간 그 절단으로서의 평면곡선이 결정되며, 따라서 그 곡선에 대한 점 P에서의 곡률을 생각할 수 있다. 그 중에서 최대값을 $k_1$, 최소값을 $k_2$라 할 때, 그 곱을 점 P에서의 곡률 혹은 가우스 곡률이라고 정의한다. 이 정의 하에 평면 위의 각 점에서의 곡률은 0, 반지름 $R$인 구의 각 점에서의 곡률은 $1/R^2$, 둥글게 구부러진 종이, 혹은 원통 위의 각 점에서의 곡률은 0이다. 그런데, 이 정의는 접촉원 혹은 법선이 놓이는 외부의 공간을 가정하고 있다는 점에서 곡면에 외재하는 성질로서 곡률을 정의한 것이다.

그러나 원주율의 변화에 대한 앞에서의 관찰은 곡률이 곡면의 내재적인 성질로서 정의될 수 있음을 시사한다. 원주율은 원이 놓인 곡면 안에서 측정할 수 있는, 곡면의 내재적인 성질이기 때문이다. 실제로, 곡률이 곡면의 내재적인 성질로서 정의될 수 있다는 것은 가우스가 발견하고 스스로 놀란 사실이다. 그의 1827년 책 《Disquistiones generales circa superficies curvas》의 주요 착상은 곡면은 단지 호의 길이 측정에 의존하는 내재적인 기하를 가진다는 것이다.[4] 가우스 곡률은 특히, 원주율의 변화를 이용한 식으로 다음과 같이 다시 표현할 수 있다(McCleary, 1994). 즉, 점 $P$를 중심으로 하고 반지름 $r$인 원 둘레의 길이를 $l(r)$이라 할 때, $P$에서의 가우스 곡률은 $K=\lim_{r\to 0}\frac{3}{\pi}\frac{2\pi r-l(r)}{r^3}$.[5] 평면에서는 항상 $l(r)=2\pi r$이므로 $K=0$이 된다. 즉, 원주율의 값이 상수로 결정된다는 사실은 지금 다루고 있는 곡면이 곡률이 항등적으로 0인 공간, 즉 유클리드적인 공간임을 말해준다.[6]

---

4) 곡면에 내재하는 개념으로서의 곡률에 대한 가우스의 착상은 쌍곡평면 등, 유클리드 3차원 공간으로 매장될 수 없는 곡면을 이해하는 수학적 틀을 제공해 주었다.

5) 평면에서는 $L=2\pi r$이 되므로 $K=0$ 임을 확인할 수 있고, 단위구면에서는 $L=2\sin r$ 이 되므로 $K=1$ 임을 확인할 수 있다.

6) 편평한 종이(가우스 곡률이 0)로 원통의 옆면(가우스 곡률이 0)을 감쌀 수는 있지만, 종이에 주름을 만

인식론적으로, 도형의 내재적인 성질에 대한 이러한 관찰은 인간이 자신이 사는 우주의 모양을 이해함에 있어서 취하게 되는 입장이라는 점에서 중요하다(Weeks, 2002). 사람은 우주의 '밖'에서 자신이 사는 우주를 관찰할 수 없다. 원주율의 측정을 통한, 그 원이 놓여있는 공간의 연구는 우주의 내적인 관찰로 얻은 정보를 통해 어떻게 우주의 모양에 대해 알 수 있는지를 보여주는 이차원의 유추적인 예이다.[7]

## Ⅲ. 원주율 값의 계산

원주율에 대한 아르키메데스의 근사 알고리즘은 제곱근의 의미와 계산법에 대한 선행지식을 필요로 한다. 본 연구에서는 제곱근 계산법을 하나의 작은 탐구주제로서, 원주율 계산의 탐구에 선행하여 도입하는 방안을 모색하고자 한다. 이는 한편으로 학생들이 제곱근의 의미와 계산법에 익숙해지도록 하고, 다른 한편으로 알고리즘의 의미와 그 효율성에 대한 몇 가지 관점을 얻도록 하기 위함이다. 제곱근 계산법에 대한 이러한 탐구는 아르키메데스가 사용한 $\sqrt{3}$ 근사값의 정확성에 깊은 인상을 가지게 하며, 아르키메데스의 알고리즘을 보다 일반적인 관점에서 평가할 수 있는 안목을 제공해 준다.

### 1. 근사 알고리즘과 제곱근

수학 9-나 과정에서는 제곱근의 계산법 하나가 소개된다. 교과서에 제시되는, 방법1을 포함한 다음의 세 가지 방법들은 Dodes(1966)가 예로 들어 논의한 것들이며, $\sqrt{3}$을 소수 셋째자리까지 구하는 것을 목표로 한다.

방법1은 일종의 시행착오 방법으로, 많은 계산을 필요로 한다. 그러나 이 방법은 계산 과정 자체가 이 계산법이 성립하는 이유를 보여준다는 점에서 자기 설명적(self-explanatory)이며 크기비교라는 가장 단순한 원리에 의존하므로 이해하기에 가장 쉬운 것이라 할 수 있다. 방법2는 뉴턴 방법이라 불리는 것으로, 엄밀하게 설명하려면 무한급수에 대한 지식이 필요하다. 그러나 이 방법은 계산이 올바르게 이루어졌는가를 자명하게 보여준다는 점에서 자기 검증적(self-checking)이며, 짧은 설명만으로 학생들이 그 타당성을 확신할 수 있을 것이다.[8] 방법3은 학생들에게 설명하기에는 다소 복잡하지만[9], 효율성면에서 탁월한 알고리즘이다.

---

들지 않는 한 공(가우스 곡률이 양수)을 둘러쌀 수는 없다는 것도 종이의 내적인 기하가 공과는 다르기 때문이라는 것으로 설명될 수 있다.

7) 구면에 사는 생물체는 다양한 반지름을 가진 여러 개의 원을 그려봄으로써 자신이 사는 공간이 편평하지 않음을 알 수 있다. 우주의 모양을 이해하고자 하는 인간의 입장도 이와 같다.

8) $a=\sqrt{2}$라면 $2/a=a$. 만약 $2/a=b$일 때 $b>a$라면 $a<\sqrt{2}<b$라는 말이다. 따라서 $a$보다 크고 $b$보다 작은 값으로 $\sqrt{2}$를 나누어 본다. 여기서는 $a$와 $b$의 평균을 택하여 나누었다.

9) 학생들에게는 넓이가 2인 정사각형의 한 변의 길이 $a.bcd\cdots$ 의 $a$ $b$ $c$ $d$를 찾는 과정으로서, 그림을 통

*방법1.*

첫 추측: 1.5

$(1.5)^2 = 2.25 < 3$

$(1.6)^2 = 2.56 < 3$

$(1.7)^2 = 2.89 < 3$

$(1.8)^2 = 3.24 > 3$

$(1.71)^2 = 2.9241 < 3$

$(1.72)^2 = 2.9584 < 3$

$(1.73)^2 = 2.9929 < 3$

$(1.74)^2 = 3.0276 > 3$

$(1.735)^2 = 3.010225 > 3$

*방법2.*

첫 추측: 1.5

$3.000/1.500 = 2.000$

$(1.500 + 2.000)/2 = 1.750$

$3.000/1.750 = 1.714$

$(1.750 + 1.714)/2 = 1.732$

$3.000/1.732 = 1.732$

*방법3.*

| | | |
|---|---|---|
| | 3. 00 00 00 | ) 1.732 |
| | 1 | |
| 27 | 2 00 | |
| | 1 89 | |
| 343 | 11 00 | |
| | 10 29 | |
| 3462 | 71 00 | |
| | 69 24 | |
| | 1 76 | |

이 방법들에 대해 다음과 같은 사항을 지적을 해 주는 것은 학생들이 알고리즘들을 일반적인 관점에서 평가하는 안목을 가지게 하는데 도움 될 것이다. 방법1은 시행착오를 거쳐야 하며, 앞의 계산 결과를 다음 단계에서 다시 이용하지 않는다는 점에서 비효율적이다. 그리고 단계가 거듭될수록 더욱 많은 자리수를 가진 수의 곱셈을 해야 하므로 계산은 매우 복잡해진다. 반면, 방법2는 앞의 계산 결과를 다음 단계에서 다시 이용하며 단계가 거듭될 때 계산이 크게 복잡해지지 않는다. 방법3은 한 단계에 정확히 소수점 아래 한 자리만큼 더 정밀한 값이 구해진다. 또한, 단계가 거듭되어도 계산은 전혀 복잡해지지 않는다. 이와 같이, 참값을 근사한다고 해서 동등하게 좋은 알고리즘은 아니며, 연산의 어려운 정도, 참값에 가까이 가는 속도 등을 고려하여야 한다.

## 2. 원주율의 근사

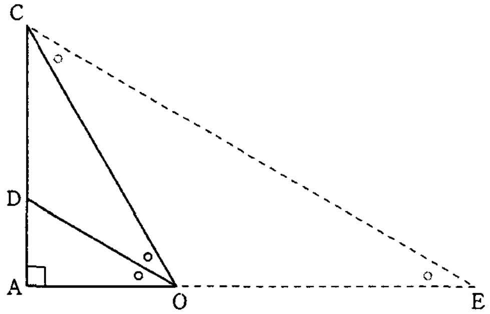
아르키메데스는 그의 책 《원의 측정》에서 원주율의 값을 $3\frac{1}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$이라고 계산했다 (Dijksterhuis, 1987). $3\frac{1}{7} \approx 3.1429$, $\pi > 3\frac{10}{71} \approx 3.1408$ 이므로 이 결과는 알려진 원주율의 값에 대한 상당히 정확한 근사값을 제공한다. 물론, 기원전 2000년 경 바빌로니아인들이나 동시대의 이집트인들도 원주율에 대해 $\pi = 3\frac{1}{8} = 3.125$ 혹은 $\pi = \frac{16^2}{9^2} = 3.16049\cdots$ 과 같은 근사값들을 사용한 것으로 알려져 있다(박영훈(역), 2002). 그러나 원주율에 대한 아르키메데스의 연구가 그의 이전 사람들이 얻은 결과들과 구별되는 본질적인 측면은 그가 얻은 근사값의 정확성에 있는 것이 아니라, 그의 방법은 원하는 만큼 얼마든지 정밀한 값을 산출할 수 있는 재귀적인 근사 알고리즘이었다는 데에 있다. 그의 방법을 살펴보자.

---

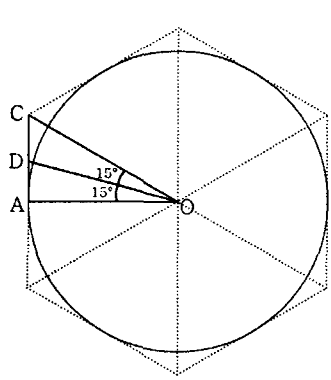
해 설명할 수 있다.

원의 내접다각형과 외접다각형에 대해, '내접다각형 둘레의 길이 〈 원 둘레의 길이 〈 외접다각형 둘레의 길이' 라는 부등식이 성립하며, 변의 개수를 점점 늘여 나갈 때 내접 정다각형 둘레의 길이는 점점 커지고, 외접 정다각형 둘레의 길이는 점점 작아진다. 또한, 내접 정 $n$각형과 외접 정 $n$각형의 길이 차이는 임의로 줄일 수 있다. 아르키메데스는 이 사실들을 그의 책 《구와 원기둥에 대하여》 I권의 앞부분에서 증명해 두었는데, 외접, 내접 정다각형의 둘레의 길이를 통해 원주율의 값을 근사할 수 있다는 논리적 근거는 이를 통해 확보된다.

《원의 측정》 에서 아르키메데스는 단지 특정한 몇 개의 정다각형에 대해 그 둘레의 길이를 구한 것이 아니라, 임의의 정$2n$각형의 둘레를 정$n$각형의 둘레를 통해 그 범위를 얻을 수 있는 계산식을 찾아내었다. 외접 정다각형에 대해, 그 계산식은 그림 2에서 찾을 수 있는 어떤 기하학적 관계를 통해 얻어진다. 즉, $\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AD}}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{OA}+\mathrm{OE}}{\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{OA}+\mathrm{OC}}{\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AC}}+\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{AC}}$. 아르키메데스는 이 식을 통해 그림 3의 외접 정6각형으로부터 외접 정12각형의 둘레에 대한 부등식을 얻을 수 있었다. 위의 식은 각 $O$를 이등분하며 계속 적용할 수 있으므로 계속하여 정24각형의 치수, 48각형에 대한 치수 등에 대한 부등식을 얻을 수 있다. 아르키메데스는 외접 정96각형까지 계산하여 $\pi < \frac{22}{7}$을 얻었다.

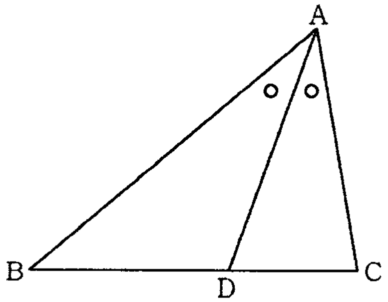



<그림 2> 삼각형 $AOD$ 변들의 길이 비를 삼각형 $AOC$ 변들의 길이 비를 통해 표현할 수 있다.

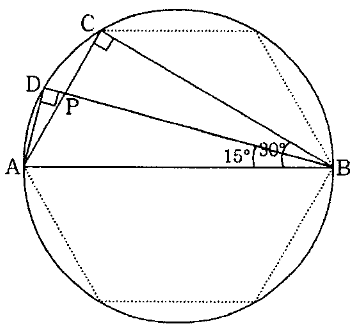



<그림 3> $AC$는 외접 정6각형 한 변의 절반, $AD$는 외접 정12각형 한 변의 절반이다.

내접 정다각형에 대해서는 그림 4에서 나타낸 기하학적 사실이 중요하게 쓰인다. 그림 5에서 그림 4의 사실과 직각삼각형들의 닮음에 의해 $\frac{BD}{AD}=\frac{BC}{PC}=\frac{AB}{PA}$ 이므로 $\frac{BD}{AD}=\frac{BC+BA}{PC+PA}=\frac{BC+AB}{AC}=\frac{BC}{AC}+\frac{AB}{AC}$. 이때, 반지름이 아니라 지름을 한 변으로 하는 삼각형들을 이용한 것은 교육적으로 주목할 가치가 있다. 이렇게 함으로써 그는 직각삼각형들의 닮음비를 이용할 수 있었고, 계산에 피타고라스의 정리를 이용할 수 있었다. 아르키메데스는 내접 정6각형으로부터 출발하고 이 과정을 반복하여 내접 정96각형에 이르러 $\pi > 3\frac{10}{71}$을 얻었다.




<그림 4> 선분 AD가 각 A를 이등분하면 $\frac{BD}{AB}=\frac{DC}{AC}$.




<그림 5> $AC$는 내접 정6각형의 한 변, $AD$는 내접 정12각형의 한 변의 절반이다.

여기서 아르키메데스는 외접, 내접 정6각형을 그 계산의 출발점으로 삼았으므로 $\sqrt{3}$ 값의 범위를 필요로 했다. 실제로 그는 $\frac{265}{153}<\sqrt{3}<\frac{1351}{780}$이라는 값을 사용했는데, $\frac{265}{153}\approx 1.7320261$, $\frac{1351}{780}\approx 1.7320513$이므로 $\sqrt{3}\approx 1.7320508$과 매우 가까운 값이다. 그러나 그가 어떻게 이 값을 찾아내었는지는 알려져 있지 않다.10)

아르키메데스의 계산법에 대해, 학생들에게 제시하는 다음과 같은 질문은 그 증명과정 및 결론에 대해 깊이 생각해 보는 기회를 줄 것이다.

○ 아르키메데스의 방법과 이전 사람들의 방법 사이의 중요한 차이점은 무엇인가?
○ 원주율을 구하는 방법이라면 원주율의 정의 혹은 성질이 그 방법 속에 포함되어 있을 것이다. 아르키메데스의 방법에서 원주율의 정의는 어디에 포함되어 있는가?

10) 시범적인 수업중에, 한 학생은 휴대폰에 내장된 계산기로 $\frac{1351}{780}$의 제곱을 계산해 보았는데, 정확히 3이 나오는 것을 발견하고는 아르키메데스가 선택한 값의 정밀성에 대해 매우 감탄하였다.

- 아르키메데스의 방법은 좋은 알고리즘인가? 어떤 점에서 그러한가?
- 아르키메데스의 방법에서 감탄한 부분이 있었다면 무엇인가?
- $\sqrt{2}$ 혹은 $\pi$ 값은 무리수로 알려져 있으며, 따라서 순환하지 않는 무한소수로 표현된다. 우리는 이 값들을 '완전히' 안다고 말할 수 있는가? 어떤 의미에서 그러한가?

## Ⅳ. 결론 및 시사점

본 연구에서는 원주율 값이 상수라는 사실을 유클리드 기하의 고유성질이라는 관점과 기하의 내적인 성질이라는 관점에서 재음미하고, 원주율 값을 구하는 아르키메데스의 방법을 분석하여 교육적 시사점을 고찰하는 한편, 이 결과를 교실수업의 탐구주제로서 다루는 과정을 모색하였다. 원주율에 대한 이러한 탐구는 학생들에게 수학공식을 읽는 안목을 넓혀주고, 도형의 성질을 그 도형이 속해있는 공간의 성질과 관계하여 파악하는 새로운 경험을 제공하며, 알고리즘에 관련된 여러 수학적 관점들을 고찰하게 해 줄 것으로 기대된다.

학교수학에서 다루는 단순해 보이는 사실 속에도 때로는 수학의 깊은 내용과 사고방식이 담겨있다. 교육자는 지금 다루는 주제를 통해 학생들에게 어떤 감흥을 전달할 수 있을지, 수학에 대한 어떤 새로운 이해를 제공할 수 있는지 보다 진지하게 고민해 보아야 할 것이다. 관련된 모든 사실을 학생들에게 엄밀히 알려줄 수는 없지만, 교육자의 노력에 따라 학생들에게 유익한 수학적 경험이 되도록 그 내용을 재구성할 수 있다. 원주율에 대한 본 연구가 그러한 수업 연구의 하나의 실례가 되기를 기대한다.

## 참 고 문 헌

박영훈 역 (2002). 파이의 역사. 서울: 경문사.

Dijksterhuis, E. J. (1987). *Archimedes.* New Jersey: Princeton university press.

Dodes, I. A. (1966). Mathematics: Its structure, Logic, and Method. In Begle, E. G (Ed.), *The role of axiomatics and problem solving in mathematics* pp.27-43, Ginn and Company.

Heath, T. L. (1956). *The thirteen books of the Elements* 3, New York: Dover Publications.

McCleary, John (1994). *Geometry from a differentiable viewpoint.* Cambridge university press.

Weeks, J. R. (2002). *The shape of space*(2nd ed.). New York: Marcel Dekker.