

## 가장 아름다운 수학기공에 관한 연구

이 상 아 (충북대학교 2년)

이 상 용 (충북대학교 2년)

이 용 재 (충북대학교 1년)

정 영 석 (충북대학교 1년)

지도교사 : 한 상 일 (충북대학교)

지도교수 : 김 수 환 (청주교육대학교)

### I. 서 론

#### 1. 연구배경 및 목적

수학은 가장 순수하고 엄밀한 지적 활동으로 과학의 여왕이라고들 한다. 그러나 평범한 사람들에게는 수학이 개인적인 게임이거나 불확실하고 가치 없는 기호들의 조작 정도로 보일 수 있다. 루카스(Lucas, 1989)는 수학에 대한 보통의 이야기들을 다음과 같이 다섯 가지로 열거하고 있다. (1) 수학은 기억해야 할 고립된 사실들과 기법들의 모임이다. (2) 수학적 진리는 절대적이다. (3) 수학은 정확한 과학이다. (4) 수학은 주로 기호적 표상과 조직을 취급하므로, 보통의 쓰기와 말하기 기능들은 수학의 의사소통에 필요하지 않다. (5) 수학은 누군가가 외롭게 수행하는 것이다.

수학이 무엇인가에 대한 이러한 고정관념을 해소하려면 우리는 수학을 가르치는 방법을 바꾸어야 한다. 우리는 수학을 우리 문화의 통합적인 부분이자 중요한 원동력으로 보고 이를 학생들과 함께 나누어야 한다. 그렇다면 어떠한 수학을 학생들과 나누어야 할 것인가? The Lawrence University 목록에는 수학을 다음과 같이 기술하고 있다(Ness, 1993). “인간 세상의 질서를 추구하려는 인간의 원초적 충동으로 탄생되었으며, 수학은 구조와 패턴의 연구를 위하여 영원히 발전하는 언어이다. 물리적 실체에 근거를 두고 거듭 새로워지므로, 수학은 지적 호기심에서 발원하여 예기치 않은 아름답고도 유용한 연결성과 패턴들이 출현하는 추상화와 일반화의 수준으로 발전한다. 수학은 추상적 사고 뿐 아니라 자연 법칙의 보금자리이다. 수학은 순수한 논리이자 창의적인 예술이다.”

이러한 수학의 특성은 다음과 같이 기초성·유용성, 추상성·일반성, 기호성·형식성, 논리성·계통성, 심미성·과학성 등으로 요약할 수 있다.

(1) 기초성·유용성 : 수학은 일상생활을 비롯하여 다른 여러 교과의 기초적 역할을 담당하게 되므로 그 유용성이 매우 높다. 여기서 말하는 유용성은 수학을 이용하는 사람의 놓여진 사회적 환경

에 따라 많은 다양성을 지닌다고 볼 수 있다.

(2) 추상성·일반성 : 수학의 본질은 그 추상성에 있으며 수학의 학습은 추상화하는 활동이 중심이 된다. 수와 식, 도형 등은 그것이 추상적·형식적인 개념으로 취급되기 때문에 단순화되어 있고, 법칙이 발견되며, 논리적으로 다룰 수가 있는 것이다. 추상화에 의하여 구축된 수학은 객관적·보편적인 것이므로 광범위한 구체적인 장에서 활용할 수 있다.

(3) 기호성·형식성 : 수학은 추상작용에 의해 얻어진 개념이나 원리를 기호화하고, 기호에 따라 사고를 이끌어간다. 그 기호는 사실을 객관적으로 나타낼 수 있으며, 타인에게 정확하게 전달하는 역할을 수행할 수가 있다. 수학적 언어는 매우 형식화되어 있는 것이 특징으로 형식적인 취급이 허용되며, 형식적인 논리를 전개할 수 있다.

(4) 논리성·계통성 : 수학은 논리성과 체계성에 있어서 뛰어난 특징을 지니고 있다. 수학에서는 귀납이나 유추에 의해서 얻어진 사실이라도 그것이 참임을 연역적으로 확인하고, 다시 그것을 체계적으로 정리해가고 있다. 수학은 논리에 의하여 누적된 하나의 유기적·계통적인 학문이라고 할 수 있다.

(5) 심미성·과학성 : 수학을 탐구하는 사람들은 그 아름다움의 본질에 매료되는 경험을 가진다. 고대의 건축물이나 생활용품 등에서의 심미성 추구를 위한 황금비의 구현이나 정다면체를 포함한 매력적인 기하학적 도형에 대한 탐구 등이 그 예이다. 한편, 과학은 모든 사물 간에 존재하는 법칙을 정립하는 것을 생명으로 하며, 그 방법으로서 귀납과 연역이 이용된다. 수학도 다른 과학과 마찬가지로 합리성과 실증성, 귀납과 연역, 분석과 종합 등에 의하여 연구가 진행된다. 특히 수학을 학습함에 있어서는 이 심미성과 과학성을 소중히 여기는 학습이 필요하다.

이러한 수학의 특성을 고려한 수학교육의 목적을 달성하기 위하여 본 연구에서는 수학의 각 영역 별로 존재하는 아름다운 공식들을 살펴보고, 과학고등학교에서 수학에 관심이 많은 학생들이 보는 관점에서의 아름다운 수학 공식들은 어떠한 것들인 지를 살펴보려고 한다.

## 2. 연구 수행 내용

가. 여름방학 집중 토론 (7월 18일 - 8월 5일): The most beautiful mathematical formulas

(1) Power of Numbers(자연수의 거듭제곱)

$$2^m \times 2^n = 2^{m+n}$$

☞ 지수함수와 관련된 여러 가지 공식들 중에서 아름다운 공식의 발견 및 그 근거 제시

<정리 1> 나의  $n$  대 조상은  $2^n$ 명이다.

왜냐 하면 다음 그림에서 알 수 있듯이 나의 1대 조상(부모)은 2명, 2대 조상(조부모)은  $2^2 = 4$ 명,

3대 조상(증조부모)은  $2^3 = 8$ 명, 4대 조상(고조부모)은  $2^4 = 16$ 명, 5대 조상은  $2^5 = 32$ 명이다. 이와 같이 나의  $n$ 대 조상은  $2^n$ 명이며,  $n$ 대 조상까지의 합은  $2(2^n - 1)$ 이다. 여기서  $n$ 이 커지면 조상의 수는 그 증가 속도가 매우커서 기하급수적으로 증가한다.

<따름 정리> 나의  $m+n$ 대 조상은  $2^{m+n}$ 명이며 그들은 나의  $m$ 대 조상의  $n$ 대 조상이다.  
왜냐하면  $2^{m+n} = 2^m \times 2^n$ 이기 때문이다.

## (2) Triangles, Rectangles, Squares, and Circles

직사각형과 삼각형의 넓이 공식, 삼각형의 내각의 합, 인수분해 공식, 피타고라스 정리, 원 둘레, 원 넓이 공식

☞ 평면 도형과 관련된 여러 가지 공식들 중에서 아름다운 공식의 발견 및 그 근거 제시

## (3) Angles

삼각법의 각종 공식, 유리수와 무리수, 원주율

☞ 삼각함수와 관련된 여러 가지 공식들 중에서 아름다운 공식의 발견 및 그 근거 제시

## (4) Quadratic Equations

이차방정식의 근의 공식, 황금비, 허수 단위, 알 콰리즈미의 이차방정식, 카르다노의 삼차방정식

☞ 방정식과 관련된 여러 가지 공식들 중에서 아름다운 공식의 발견 및 그 근거 제시

## (5) Logarithms and Exponentials

로그의 발견,  $\log(ab) = \log a + \log b$ ,  $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \rightarrow 0.57777\dots$ ,

$\log(1+x) \approx x$  ( $x$  is small), 자연로그  $e$ , 지수에 실수나 허수가 포함되는 공식, 이배각의 공식

☞ 지수와 로그와 관련된 여러 가지 공식들 중에서 아름다운 공식의 발견 및 그 근거 제시

## (6) Series of Numbers

가우스의 합의 공식, 피보나치수열, 계승, 무한등비급수

☞ 수열과 급수와 관련된 여러 가지 공식들 중에서 아름다운 공식의 발견 및 그 근거 제시

## (7) Objects in Space

오일러의 공식, 구의 겹넓이와 부피, 정사면체의 중심각, 쾨닉스베르히의 다리

☞ 도형과 관련된 여러 가지 공식들 중에서 아름다운 공식의 발견 및 그 근거 제시

## (8) Whole Numbers, Prime Numbers

라그랑주의 정리, 페르마의 마지막 정리, 소수, 골드바흐의 가설, 소수의 정리

☞ 정수론과 관련된 여러 가지 공식들 중에서 아름다운 공식의 발견 및 그 근거 제시

## (9) Chance

복권 당첨 확률, 파스칼의 삼각형

☞ 확률론과 관련된 여러 가지 공식들 중에서 아름다운 공식의 발견 및 그 근거 제시

## (10) Today and Tomorrow

이진법:  $1 + 1 = 10$ , 무한에의 도전

☞ 기타 여러 가지 공식들 중에서 아름다운 공식의 발견 및 그 근거 제시

## 나. 외부강사 특강 (11월 25일 토요일 오전, 오후)

- (1) 서울대학교 수학교육과 최영기 교수 : *The Euler Characteristic and Polya's dream* by P. Hilton and J. Pedersen, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 103, No. 2, pp 121-131
- (2) 서울대학교 수학교육과 조한혁 교수 : 거북이와 함께하는 그림 열과 점화식

## 다. 겨울방학 집중 토론 (12월 18일 - 1월 13일)

- (1) 박사가 사랑한 수식 영화 관람 및 독서
- (2) 자신이 생각하기에 아름다운 수학공식이라고 여겨지는 것 25개를 선정하고 그 이유를 '세상에 서 가장 아름다운 수학공식'책과 비슷한 유형으로 정리하고 토론하기.

**II. 연구방법 및 이론****1. 아름다운 수학 공식 61개 선정**

The most beautiful mathematical formulas, 박사가 사랑한 수식 등의 책을 읽거나 영화를 보거나 관련 자료를 수집하여 가장 선호하는 아름다운 공식을 선정한 다음 그것이 아름다운 근거를 제시한다. 이러한 과정을 거쳐 가장 아름답다고 생각하는 수학 공식 6개를 선정하였다. 물론 이러한 작업을 하기 위하여 유명한 외부강사의 특강이나 전문가 협의회 등을 거쳤다. 다음은 연구자들의 1차로 선정한 61개의 공식이다.

- (1) 피타고라스의 정리, (2) 허수, 복소수 (3)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \dots = 1$  (4) 완전수 (5) 소수 (6) 수열, 피보나치수열 (7) 내각의 합 (8) 외각의 합 (9) 오일러 공식 (10) 확률 (11) 황금비 (12) 통계 (13) 적분-면 (14)  $1 + 1$  (15) 포물선 방정식 (16) 원  $x^2 + y^2 = r^2$  (17) 타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (18) 로또에 당첨될 확률 (19)  $\lim$  (20) 적분(積分) (21) 미분(微分) (22)  $\log$  (23)  $\log$ 의 성질 (24)  $\pi$  (25)  $e$

$$(26) \sqrt{\frac{\pi e}{2}} = 1 + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{1 + \frac{4}{1 + \dots}}}}} \quad (27) \text{ 합}$$

의 법칙, 곱의 법칙 (28)순열(Permutation) (29) 중복순열, 같은 것을 포함한 경우의 순열 (30)조합 (Combination) (31) 확률 (32)하노이탑 (33) 확률의 덧셈 (34) 근의 공식 (35)  $e^{\pi i} + 1 = 0$  (36)  $1 + 1 + 2$  (37) cycloid 곡선 (38) 넓이의 비는 각 길이의 곱에 비례 (39) 공간에서의 피타고라스 정리 (40) 좌표의 원점에 대한 회전이동 (41) 헤론의 공식 (42) 등비수열의 합 (43)  $e$  (44) Taylor's Series (45) Laplace transforms (46) 쉬운 기수법 변환 (47) 두부 철사로 찌르기 (48)  $\nabla$  operator (49) 원의 방정식 (50) 타원의 방정식 (51) 직교좌표, 극좌표 (52) 주기함수 (53) 코시-슈바르츠의 정리 (54) 평균의 절대부등식 (55) 원주각 (56) 함수의 극한 (57) L'hospital Law (58) 미분법 공식 (59) 적분법 공식 (60) Pappus의 정리 (중선의 정리) (61) 드무아브르의 정리

## 2. 가장 아름다운 수학 공식 5개 선정

(1)  $e, \pi, e^{i\pi} = -1$ , 드무아브르의 정리

$$((r e^{i\theta})^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta))$$

(2) Cycloid 곡선 ( $x = t - \sin t \quad y = 1 - \cos t$ )

(3)  $n$ 차원으로 확장시킨 오일러의 공식 ( $\sum_{m=0}^n {}_n C_m 2^{n-m} (-1)^m = 1$ )

(4) 피보나치수열과 황금비 (일반항  $f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$ )

(5) 분자구조 (정사면체의 높이 =  $\frac{\sqrt{6}}{3}a$ ,  $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ )

## III. 연구결과 및 고찰

### 1. 복소평면과 드무아브르의 정리(오일러의 정리)

$$(r e^{i\theta})^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

복소평면은 우리가 흔히 사용하는 Cartesian-Coordinate에서  $x, y$ -axis가 각각 *Real*,

*Imaginary-axis*가 되어 직교, 극좌표 것처럼 쓰이는 것이다. 우선 직교좌표계처럼 쓰이는 것을 알아보자. 복소수  $2+3i$ 를 평면에 표기하고자 한다면 실·허수부를 각각 나누어 좌표를 정하면 된다. (*Re, Im*)의 좌표 순서쌍으로 표기한다면 (2,3)으로 표시할 수 있다.

그럼 극좌표계로 쓰이는 것을 알아보자. 복소수  $1+\sqrt{3}i$ 를 극좌표계로 만들기 전에 직교좌표 상태로 만들면  $(1, \sqrt{3})$ 이 된다. 하지만 극좌표 계에서는  $(r, \theta)$ 로 표현하기 때문에 직교좌표의 점  $(a, b)$ 를  $(\sqrt{a^2+b^2}, \tan^{-1}(\frac{b}{a}))$ 로 변환하여 표기하면 된다. 그래서  $(1, \sqrt{3})$ 을 극좌표계의 점으로 바꾸면  $(2, \frac{\pi}{3})$ 가 된다. 이 점의 의미는 원점으로부터 2만큼 떨어져 있는 점들 중에 양의 *Re-axis*로부터 반시계방향으로  $\frac{\pi}{3}$ 만큼 회전한 곳에 위치한 점이다. 특히, 복소평면에서는 위의 점을  $2e^{\frac{\pi}{3}i}$ 로 쓸 수 있는데 이는 *Taylor's Series*를 통해 알 수 있다.

여기서 *Taylor's Series*에 대해서 간단히 소개하자면 어떠한 함수를 *Polynomial*한 함수로 만드는 것을 말한다. 우선 방법은 간단히

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \frac{(x-x_0)}{1!} + f''(x_0) \frac{(x-x_0)^2}{2!} + f^{(3)}(x_0) \frac{(x-x_0)^3}{3!} + \dots \\ + f^{(n)}(x_0) \frac{(x-x_0)^n}{n!} + \dots + \frac{f^{(n)}(\zeta)(x-\zeta)^{n-1}(x-x_0)}{(n-1)!}$$

에 알맞게 대입해  $f(x)$ 를 만드는 것이다.

이를 이용해  $e^x$ 라는 함수를 풀어서 쓰게 되면  $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$ 이 된다. 하지만 우리가 알고 싶은 것은  $e^{i\theta}$ 의 일반적인 모양이므로  $x$ 대신에  $i\theta$ 를 대입하면  $e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots = 1 + i\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} + \dots$ 이 된다.

여기서 실수부와 허수부를 각각 나누게 되면  $e^{i\theta} = (1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots) + i(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} \dots)$ 가 되는데 실수부와 허수부의 다항식은 각각  $\cos \theta$ 와  $\sin \theta$ 를 *Taylor's Series*로 변형시킨 꼴이다.

따라서  $e^{i\theta} = \cos \theta + i\sin \theta$ 로 표기해도 무방하게 된다. 이를 좌표를 표시하는 방법으로 표시 한다면  $re^{i\theta}$ 로 쓸 수 있으며  $re^{i\theta} = r(\cos \theta + i\sin \theta)$ 로 쓰게 된다. 드무아브르의 정리는  $(re^{i\theta})^n = r^n(\cos \theta + i\sin \theta)^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ 가 되는데 이는 위의 *Taylor's Series*의 변수 자리에  $in\theta$ 를 집어넣어 풀어주면 위와 같은 식이 된다. 또한 지수법칙을 적용하면 어떠한 좌표를  $e^{i\theta}$ 로 표현할 수 있다면 그 점을 원점으로부터  $\phi$ 만큼 회전시킨 점을  $e^{i(\theta+\phi)}$ 로 나타낼 수 있다. 그리고 다시 직교좌표계에 알맞은 순서쌍으로 표현하려면  $\cos(\theta+\phi)$ 와  $\sin(\theta+\phi)$ 를  $(x, y)$ 순서쌍으로 갖는 점이 된다.

$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 라는 사실을 이용하면 복잡한 부분적분도 쉽게 변환하여 수행 할 수 있다.  $\int e^x \sin x dx$ 의 적분을 생각해보자. 이를 고등학교 때 배운 부분적분을 사용하면 이 적분 결과를  $I$ 로 두고 부분적분을 한번하고 또 나온 식을 부분적분해서  $I$ 에 대한 식으로 정리해서 구하는 과정으로 매우 복잡하다. 하지만  $\sin x$ 는  $e^{ix}$ 의 허수부이기 때문에 위의 적분 식을  $\int e^x e^{ix} dx$ 로 다시 쓰고 이를 계산한 다음 허수부분만 답으로 취하게 되면 원래의 적분을 수행하게 되는 것이다.

## 2. Cycloid 곡선

$$x = t - \sin t \quad y = 1 - \cos t$$

Cycloid곡선이라고 하면 일반적으로 바퀴가 굴러간 자취를 말한다. 이를 따로 매개변수  $t$ 를 이용한 식을 통해 표현 할 수 있는데

$$x = t - \sin t \quad y = 1 - \cos t$$

로 나타낼 수 있다. 위에서 말 할 것과 같이 이 곡선은 수학적으로는 원위의 한 점을 택할 때 그 원이 한 평면을 따라 미끄러지지 않고 굴러갈 때 점의 자취를 말한다. 하지만 다른 관점에서 볼 때엔 이 곡선의 끝에 물체를 올려놓고 놓았을 때 아래까지 가장 먼저 내려가는 경로라고 한다(최단 하강 곡선이라고도 한다). 이는 흔히 4분원이나 직각 이등변 삼각형이 더 빨리 내려올 것이라고 생각 되지만 이는 실험적으로나 이론적으로나 Cycloid곡선이 빨리 내려온다고 증명할 수 있다.

이론적인 증명으로는 Hamilton의 원리와 Euler방정식을 통해 가장 빨리 내려오는 함수  $y(x)$ 가 있다고 가정한 후에  $y(x)$ ,  $y_x(x)$ ,  $x$ 의 함수인  $f$ 로 Euler방정식을 통해 극소 값을 구한 후, 그에 맞는 함수를 찾는 방법으로 다음과 같다.

(prove)

변분법을 이용하면 어떠한 퍼텐셜 함수 아래에 놓여 힘을 받고 있는 물체에 대한 최단 경로를 알 수 있다. 따라서 시간  $t$ 를 알고자 하면  $dt = \frac{ds}{v}$ 를 이용해 적분식을 통하여 쓸 수 있다.

$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$  이고  $v$ 는 에너지 보존의 법칙을 이용하면  $\sqrt{2gx}$ 로 표현할 수 있다. 여기서

$ds$ 를 다시 쓰면  $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$ 로 표시 할 수 있고  $\frac{dy}{dx} = y_x$ 로 표현하면 적분식

$$t = \int \frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1+y_x^2}{2gx}} dx \text{가 되고 피적분함수를 } f \text{라 할 때, } f = \sqrt{\frac{1+y_x^2}{2gx}} \text{ 이고, Euler의}$$

$$\text{방정식 } \frac{\partial}{\partial y} f - \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y_x} f = 0 \text{을 이용하면 } -\frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial}{\partial y_x} \sqrt{\frac{1+y_x^2}{2gx}} \right] = 0 \text{가 되고, } \frac{y_x}{x(1+y_x^2)} = \frac{1}{2a}$$

가 된다.(단,  $2a$ 는 상수) 이제 식을 정리하게 되면  $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{2ax-x^2}}$ 가 되고 이 1계 미분방정식을 풀게 되면  $\theta$ 를 매개변수로 하는  $x = a(1 - \cos \theta)$ ,  $y = a(\theta - \sin \theta)$ 가 나오게 된다. 이는 *Cycloid*곡선의 식으로 중력장 내에서 낙하할 때, 최단거리는 이 *Cycloid*곡선이 된다.

증명된바와 같이 *Cycloid*곡선은 중력장 내에서 어떠한 경로보다도 더 빨리 내려올 수 있다. 이를 우리는 자연이나 여러 가지 인조품목들에서 찾아볼 수 있는데 물고기의 비늘이나 먹이를 향해 날아가는 매의 움직임 등에서 볼 수 있고 우리나라 전통 건축 양식인 기와집이나 초가집에서도 지붕의 모양이 *Cycloid*곡선을 가지고 있다. 이는 빗물에 의한 목조건물의 부식을 막는 데 도움이 된다고 한다.

또한 *Cycloid*곡선의 다른 이름으로 등시곡선이라는 이름이 있는데 이 특징은 곡선의 어느 임의의 두 점을 택하여 물체를 놓고 운동하게 하면 이 곡선의 최하점에 항상 동시에 도착한다는 특징이다.

### 3. Euler의 정리 $n$ 차원까지 확장

$$\sum_{m=0}^n {}_n C_m 2^{n-m} (-1)^m = 1$$

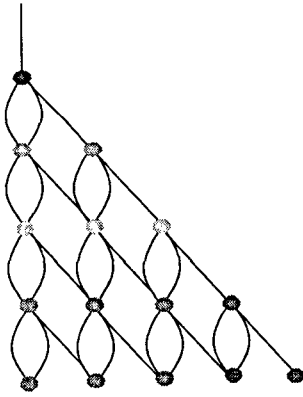
*Euler*의 정리는 흔히 3차원 공간에서 변형하였을 때 구의 형태가 나오는 물체에서 꼭짓점의 개수를  $S$ , 모서리의 개수를  $A$ , 면의 개수를  $F$ , 공간의 개수를  $R$ 이라 하였을 때  $S - A + F - R = 1$ 가 만족한다는 정리이다. 우리는 여기서 3차원뿐만 아니라  $n$ 차원 까지 *Demension*을 늘려갈 때 어떠한 변화가 생기는지 알아보고 일반화 하려고 한다.

우선 0차원의 경우에는 점이 1개로  $S$ 가 1이 되어  $S = 1$ 로 오일러의 공식을 만족시킨다. 다음 1차원의 경우에는 점이 이동한 경우로  $S$ 가 2,  $A$ 가 1이 되어  $S - A = 1$ 을 만족시킨다. 마찬가지로 2차원도 선이 이동한 자취이므로  $S$ 가 4,  $A$ 가 4,  $F$ 가 1이 되어 *Euler*의 공식을 만족하게 된다. 여기까지 0 ~ 3차원의 경우를 생각해보았는데, 다음 표와 같이 나타낼 수 있다.

	점 ( $S$ )	선 ( $A$ )	면 ( $F$ )	공간 ( $R$ )	무언가	...	$S - A + F - R \dots$
0차원	1	0	0	0	0		1
1차원	2	1	0	0	0		1
2차원	4	4	1	0	0		1
3차원	8	12	6	1	0		1
4차원	16	32	24	8	1		1



여기서 *Demension*이 증가할 때 마다 1가지씩 새로 추가 되는 것이 있는데 4차원의 경우에는 상상할 수 없으므로 새로운 무언가로 정의하였다. 3차원까지 보았을 때, 다음 차원의 각 점, 선, 면, 공간 등의 규칙에는 (다음의 선) = (이전의 선) × 2 + (이전의 점)과 같이 점, 선, 면, 공간이 모두 성립한다. 이와 같은 규칙으로 계속 나아간다고 할 때, 왼쪽과 같은 모형을 그릴 수 있다. 위의 표의 색으로 그림에 표시하면 왼쪽과 같이 되고 이제 가로(대각선 오른쪽 아래)를  $m$ , 세로를  $n$ 으로 정하면 차원은  $n$ 이 되고 점, 선, 면, 공간 등은  $m$ 이 된다. (점은 0, 선은 1...) 따라서 수열  $a_{n,m}$ 이라 하면  $a_{1,1}$ 는 1이 되고  $a_{3,1}$ 는 12가 되는 것이다. 이 수열은  $a_{n,m} = a_{n-1,m-1} + 2a_{n-1,m}$  (단,  $a_{0,0} = 1$ )을 만족하는 수열이다. 이 조건을 만족하는 수열  $a_{n,m} = {}_n C_m 2^{n-m}$  (단,  $n$ 은 양수이다)이 된다.



이제  $n$ 의 값이 정해져 있을 때,  $m$ 이 0부터  $n$ 까지 일 때 *Euler*의 정리와 같이 홀수 번째의 항은 더하고 짝수 번째의 항은 빼주었을 때 그 값이 1이 되면 *Euler*의 정리가 확장되어도 성립하는 것이다. 이를 수식화하면  $\sum_{m=0}^n {}_n C_m 2^{n-m} (-1)^m$  이 되고 이는 이항 정리에 의하여  $[2 + (-1)]^n$ 이 되어 항상 1의 값이 나온다. 따라서 모든 차원에 대해서도 *Euler*의 정리는 성립하게 된다.

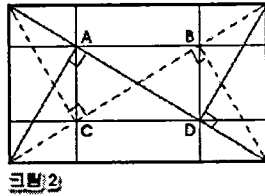
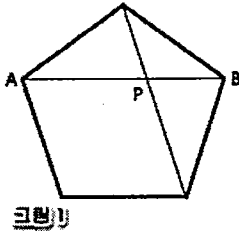
#### 4. 피보나치수열과 황금비

$$\frac{F(N+1)}{F(N)} \rightarrow \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

##### ① 아름다운 분할 - 황금비율

황금비율은 고대 그리스에서 발견된 것으로 기하학적으로 가장 조화가 잡힌 비율로서 미적 감각이 뛰어 난데서 붙여진 이름이다.

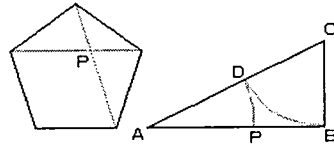
그림과 같이 선분을 한 점 P에 의하여 2개의 부분으로 나누어 그 한쪽의 제곱을 나머지 와 전체와의 곱과 같아지게 하여 얻는 비율로서 하나의 선분 AB가 있을 때 그 선분 상에서 한 점 P를 구하여  $(\overline{AP})^2 = \overline{BP} \times \overline{AB}$ 가 되도록 하면  $\overline{BP} : \overline{AP} = 1 : 1.618$ 이 된다. 이러한 황금비를 따르는 크기의 도형에 그림과 같이 2줄 대각선을 긋고 이 대각선과 4각을 잇는 수선을 그어 대각선과 교차하는 네 점(A, B, C, D)을 이으면 황금분할 된 장방형이 된다.



직도의 예

[그림1].

[그림2]



△ABC에서 ∠B=∠R(직각), AB=2BC라 하고 AC위에 BC와 같게 CD를 취한다. 이때 AB위에 AD와 AP를 취하면 점 P는 AB를 황금분할한다.

인간의 시각에서 볼 때 파이(0, 1.618)의 비율을 응용하여 만든 물건, 건축물 등은 다른 비율을 사용해 만든 것에 비해 가장 안정적으로 느껴진다. 꽃의 꽃잎 속에서도 파이의 비율을 발견할 수 있으며 우리가 느끼는 아름다운 화음에서도 이 비율이 적용된다고 한다.

이러한 인간들의 황금분할에 대한 선호는 우리 생활 주변에서 이를 이용한 상품들에 널리 사용되는 결과를 보여 주고 있다. 그 예로 액자, 창문, 책, 십자가, 신용카드 등의 가로, 세로 비율 등에 황금분할의 비율이 적용된다. 특히 신용카드의 비율을 예로 들면 신용카드의 가로와 세로 비율은 각각 8.6cm와 5.35cm로 이 둘의 비율은  $\frac{8.6}{5.35} = 1.607$ 로 황금비율에 의해 카드가 제작되었다는 사실을 보여 주고 있다. 배흘림기둥으로 유명한 부석사 무량수전의 평면에는 1 : 1.618의 황금비가 적용됐다.

또한, 황금분할은 사진을 찍을 때 응용할 수 있는데 위의 그림에서  $\overline{AD}$ ,  $\overline{AB}$ ,  $\overline{DC}$ ,  $\overline{BC}$ 는 화면에서 수평선이나 수직선을 잡기에 가장 좋고 안정감을 준다. 따라서 이 속에 화면의 초점이 되는 대상을 위치시키면 가장 알맞은 균형을 이룬다.

이러한 황금분할의 기초 하에 사진 촬영을 할 때에는 일일이 계산할 것 없이 화면의 분포를 대략  $\frac{1}{3}$ 로 잡으면 된다. 이와 같이  $\frac{1}{3}$ 의 원칙을 의식해서 화면을 구성하려고 노력하다 보면 어느 틈에 무의식중에도 사용하게 되어 결과적으로 황금분할의 법칙대로 화면이 구성된다.

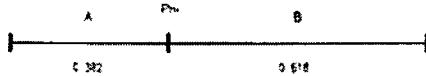
두 개의 막대기를 이용해서 십자가를 만들어보고 그 교차되는 길이를 재어보자. 거의 황금비율의 분할에 근접해 있을 것이다.

황금비는 르네상스의 볼로냐의 수도승(修道僧) 루카 바티리오에 의하여 ‘신성비례(神聖比例)’라고 이름 할 정도로 중요시되었고, 특히 시각(視覺)에 호소하는 도형이나 입체 등에서는 이 비를 많이 이용해 왔으며, 예를 들면 직사각형의 두 변의 비가 황금분할이 되는 것은 여러 가지 비례의 직사각형 중에서 가장 정돈된 직사각형이라 하였다.

황금비는 일상생활 속에서도 쉽게 찾을 수 있다.

물건을 선택할 때 대부분의 사람은 무의식중에 황금비의 치수를 취하고 있다.

피보나치의 수열(아래에서설명)에서 5를 A라 하고 8을 B라 하자.  $\frac{5}{8}$ 은 0.6에 가깝고 또  $\frac{8}{13(=5+8)}$ 도 역시 0.6이 된다. 반대로 8을 5로, 13을 8로 나누면 1.6이 된다. 등식의 형태로 나타내면  $A:B=B:(A+B)$ 가 되며 이것이 바로 황금분할 또는 황금비율의 등식이며 일반적으로 황금비율을 말할 때는 0.618 또는 1.618을 의미한다. 어떤 주어진 선이 있다고 하자. 이 직선 상에서  $A:B=B:(A+B)$ 의 등식이 충족되게 나눌 수 있는 점은 오직 한 점이며 이 점을 황금분할의 점(전체의 61.8%에 해당하는 점)이라 한다.



그러므로 황금분할이라 함은 전체 속에서 두 개의 크기가 다른 부분 사이의 독특한 상호관계이며 황금분할이란 용어는 이 비율관계의 절묘함에서 나온 말이다.

인간의 시각에서 볼 때 파이(Ø, 1.618)의 비율을 응용하여 만든 물건, 건축물 등은 다른 비율을 사용해 만든 것에 비해 가장 안정적으로 느껴진다. 꽃의 꽃잎 속에서도 파이의 비율을 발견할 수 있으며 우리가 느끼는 아름다운 화음에서도 이 비율이 적용된다고 한다. 심지어 우리가 일반적으로 볼 때 아름답다고 느껴지는 몸매를 가진 팔등신의 여인들도 확인해 보면 그들의 몸 전체에서 배꼽의 위치가 발바닥에서부터 정확히 몸 전체의 61.8%에 해당된다. 더불어 주식시장에서도 황금분할의 법칙에 의해 행동하는 인간의 행태가 나타난다. 파이가 인간에게 호감과 조화감을 준다는 사실은 고대부터 인정된 사실이었으며 지난 세기말 이래로 많은 과학적 실험으로도 증명되어 왔다.

② 황금분할의 구도가 내재된 직사각형

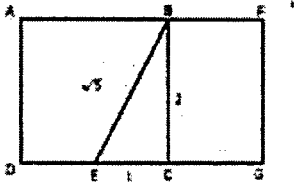
황금분할이 나타내는 현상과 그 의미하는 것을 이해하려면 황금분할 구도가 내재된 직사각형을 이해하여야 한다.

황금분할의 구도가 내재된 직사각형은 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.

첫째 아래그림과 같이 길이가 각각 2단위의 정사각형 ABCD를 작성한 후 밑변 CD의 중간지점을 E라고 정하고 BE를 이으면 밑변 1, 높이 2인 직각삼각형 BCE가 형성된다.

삼각형 BCE의 빗변 BE의 길이는 ‘빗변의 곱은 다른 두변의 각각의 제곱의 합과 일치한다. 는 피타고라스의 정리에 의해  $\sqrt{5}$  단위의 길이를 갖게 된다. 다음 단계는 그림3 같이 EG의 길이가 삼각형의 빗변 BE의 길이  $\sqrt{5}$ 와 같도록 연장한다. 모두 완성이 되면 아래와 같은 황금분할의 관계가 형성된다.

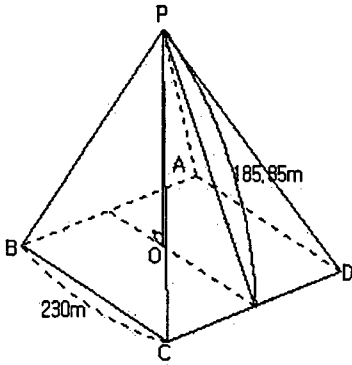
위 두 식의 답은 모두 황금분할의 수 파이(Ø) 1.618과 0.618임을 알 수 있으며 직사각형 ADGF를 ‘황금직사각형(Golden Rectangle)’이라 말하며 직사각형 BCGF도 역시 ‘황금직사각형’이다.



$$\overline{DG} = \sqrt{5} + 1, \quad \overline{CG} = \sqrt{5} - 1, \quad \overline{FG} = 2$$

$$\frac{\overline{DG}}{\overline{FG}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \frac{(2.236 + 1)}{2} = \frac{3.236}{2} = 1.618$$

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{FG}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{(2.236 - 1)}{2} = \frac{1.236}{2} = 0.618$$

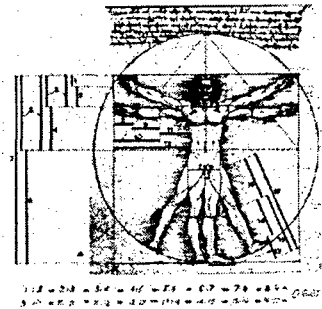
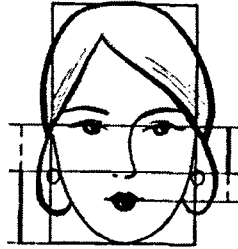
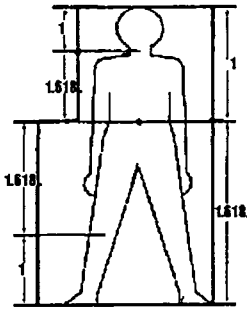


고대 이집트인들은 등간격으로 매듭이 있는 줄을 가지고 길이의 비가 3 : 4 : 5인 직각 삼각형을 만들었고, 이를 피라미드와 신전 등의 각종 건축물에 사용했다고 한다. 여기서 길이의 비가 3 : 4 : 5인 직각삼각형의 최단선분과 최장선분의 비는 3 : 5로 황금비에 가깝다는 사실을 알 수 있다. 실제로 오른쪽 그림에서 보듯이 밑면이 정사각형의 각변으로부터 중심에 이르는 거리(OM)와 능선(PM)의 길이의 비가 1:1.616으로 황금비에 가깝다.

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{OM}} = \frac{185.85}{115.00} \approx 1.616$$

황금분할은 앞서 보았듯이 자연에서도 흔히 발견된다. 이것은 계란의 가로, 세로비에서 그리고 소라껍질이나 조개껍질의 각 줄 간의 비율에서도 발견된다. 그것은 식물들의 잎차레, 가지치기, 꽃잎 등에서 발견될 뿐 아니라 초식동물의 뿔, 바다의 파도, 물의 흐름 나아가 태풍, 은하수의 형태에서도 발견된다. 최근 태양계내의 각 행성들 간의 거리가 임의적인 것이 아니고 피보나치수열에 따르는 등각나선으로 배열되어 있다는 주장이 나와 흥미롭다. 만일 이것이 맞는다면 플라톤, 케플러, 보데(Bode)로 이어지는 수학적 통찰이 그 본질적 원리에 있어서는 맞았음이 증명될지도 모른다.

이것은 우리의 인체 속에서도 반영되어 있다. 인간의 신체가 이 비율에 의해서 분할되어 있으며 이것이 아름다운 몸의 보편적 기준이 되고 있다. 아래 그림은 Le Corbusier가 찾아낸 이상적 인간의 각 신체부위의 비율이다. 이것은 레오나르도 다빈치의 인체비율에 대한 그림에서도 찾아 볼 수 있다. 또한 손가락 뼈 사이에서, 얼굴윤곽에서도 황금비는 발견된다. 그래서 미술을 하는 사람들에게 황금비는 언제나 연구의 대상이다.



### ③ 피보나치수열과 황금비

1202년 피보나치는 토끼의 번식에 대한 다음과 같은 문제에 관심을 갖게 됐다. ‘한 농장에서 갓 태어난 한 쌍의 아기 토끼가 사육되기 시작했다고 하자. 한 쌍의 토끼는 생후 1개월 뒤 짝짓기를 하며 짝짓기한 뒤 1개월 뒤에 다시 한 쌍의 토끼를 생산한다고 하자. 생산된 토끼가 죽지 않고 계속 산다면 일년 동안 토끼는 몇 쌍이 될까’

1개월 뒤에는 여전히 1쌍의 토끼, 2개월 뒤에는 1쌍의 토끼가 새로 태어나기 때문에 2쌍의 토끼, 3개월 뒤에는 첫 번째 암토끼가 다시 1쌍의 토끼를 생산하므로 3쌍의 토끼, 4개월 후에는 2마리의 암토끼가 각각 1쌍의 토끼를 생산하므로 5쌍의 토끼가 농장에 있게 되는데 이를 수열로 나타내면 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 ...와 같이 된다. 수열 앞에 0과 1을 추가해 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 ...를 피보나치수열이라 하고 각 항의 수를 피보나치수라 한다. 이 수열의 특징은  $1=0+1$ ,  $2=1+1$ ,  $3=1+2$ ,  $5=2+3$ ,  $8=3+5$  ...와 같이 3항 이상의 수는 바로 전 두 항의 합으로 표시된다는 특징이 있다.

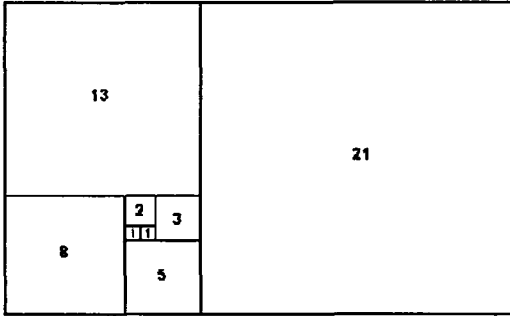
식물 중에는 꽃잎 수가 피보나치수를 이루는 경우가 많다. 백합과 아이리스는 3장, 애기미나리아재비와 야생장미는 5장, 참제비고깔은 8장, 시네라리아는 13장, 치커리는 21장, 질경이는 34장, 쑥부쟁이는 종류에 따라 55장 혹은 89장의 꽃잎을 갖고 있다.

이러한 피보나치수열에서 연속한 항들의 비를 택하면 다음과 같은 수열을 얻는다.

$1/1 (=1)$ ,  $2/1 (=2)$ ,  $3/2 (=1.5)$ ,  $5/3 (=1.667)$ ,  $8/5 (=1.6)$ ,  $13/8 (=1.625)$ ,  $21/13 (=1.615)$ ,  $34/21 (=1.619)$ ,  $55/34 (=1.618)$ ,  $89/55 (=1.618)$ , ...

놀랍게도, 이 수열의 극한은 실제로 황금비  $(\sqrt{5} + 1)/2$  이다.

옆의 그림은 피보나치수열을 이용하여 황금 직사각형을 연속적으로 작도한 것이다. 먼저 한 변이 1인 정사각형 두 개(피보나치수열의 제 1, 2항)를 나란히 그리고 다시 이 두변의합을 한 변(길이 2 - 피보나치수열의 제3항)으로 하는 정사각형을 그린다. 다시 피보나치수열의 제2, 3항의 합을 한 변으



로 하는 정사각형을 그리고, 다시 제3항,4항의 합을 한 변으로 하는 정사각형을 그려나가는 식으로 그려나가면.....

이렇게 만들어지는 직사각형은 작도가 진행됨에 따라 황금 직사각형이 되는데 이는 앞에서 살펴본 바와 같이 피보나치수열의 비는 황금비를 이루기 때문이다.

피보나치수열의 비의 극한이 황금비를 이룬다는 것을 증명해 보면, 피보나치수열의 일반항은

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\} \text{이다. (증명은 아래)}$$

여기서 이웃하는 항의 비를 극한으로 나타내면,

$$\begin{aligned} \lim \frac{F(n+1)}{F(n)} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right\}}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}} \\ &= \frac{\left\{ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right\}}{\left\{ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}} \end{aligned}$$

이때 분모와 분자를  $\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$  으로 나누어 주게 되면,  $\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$  가 1보다 크므로

$$\begin{aligned} &\frac{\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n} - \frac{\left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n} \\ &= \frac{\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n} = \frac{\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - 0}{1-0} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618... \end{aligned}$$

따라서 황금비에 수렴하게 된다.

## ④ 피보나치수열의 일반항

피보나치수열  $\{F(n)\}$ 은 점화식으로 나타내면

$$\langle F(1) = 1, F(2) = 1, F(n+2) = F(n) + F(n+1) \rangle$$

으로 표현된다. 이 점화식을  $F(n+2) - (\alpha + \beta)F(n+1) + (\alpha\beta)F(n) = 0$ 으로 고쳐 쓰면 이차방정식  $F^2 - (\alpha + \beta)F + \alpha\beta = 0$ 과 매우 닮았다. 위 이차방정식  $F^2 - (\alpha + \beta)F + \alpha\beta = 0$ 를 점화식의 특성방정식(characteristic equalization)이라고 부른다. 이 특성방정식의 근을 이용하면 수열  $\{F(n)\}$ 의 일반항을 구할 수 있다.

$F(n+2) - (\alpha + \beta)F(n+1) + (\alpha\beta)F(n) = 0$ 을 변형하면

$$F(n+2) - \alpha F(n+1) = \beta(F(n+1) - \alpha F(n)) \text{ 꼴로 바뀐다.}$$

정리하면,  $F(n+2) - (\alpha + \beta)F(n+1) + \alpha\beta F(n) = 0$ 이 된다.

따라서  $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1$ 이면 된다.

여기서 이차방정식의 근과 계수와의 관계를 쓰면,  $\alpha, \beta$ 는  $x^2 - x - 1 = 0$ 의 근이 된다.

구해보면,  $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$  가 두 근이 된다.

$$\text{일단, } \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ 라고 하면 ----(1)}$$

$F(n+2) - \alpha F(n+1) = \beta(F(n+1) - \alpha F(n))$ 에서,  $P(n) = F(n+1) - \alpha F(n)$ 이라 두면,  $P(n+1) = \beta P(n)$ 이고,  $P(n)$ 은 공비가  $\beta$ 인 등비수열이 된다. 즉,  $P(n) = P(1) \times \beta^{(n-1)}$ 이다.

$$P(1) = F(1+1) - \alpha F(1) = F(2) - \alpha F(1) = 1 - \alpha = \beta \text{ 이므로}$$

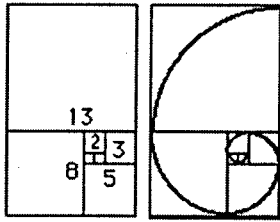
$$F(n+1) - \alpha F(n) = \beta \times \beta^{(n-1)} = \beta^n \text{ 즉, } F(n+1) - \alpha F(n) = \beta^n$$

$F(n+1) - \alpha F(n) = \beta^n$ 이 성립하듯,  $F(n+1) - \beta F(n) = \alpha^n$ 도 성립한다. ((1)에서  $\alpha, \beta$ 를 바꿈)

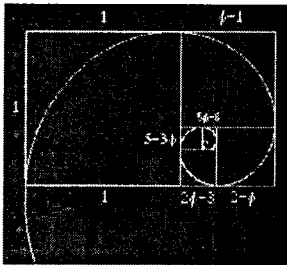
위의 두 식을 빼주면,  $(\beta - \alpha)F(n) = \beta^n - \alpha^n$ 이므로,  $F(n) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ 가 된다.  $\alpha, \beta$ 를 각각

$$\text{대입하면, 피보나치수열의 일반항 } F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right\} \text{ 이 된다.}$$

위와 같이 구한 피보나치수열의 일반항을 비네의 공식(Binet's formula)이라고 부른다. 이 식을 자세히 살펴보면, 황금 비율의 값이 들어 있다는 것을 알 수 있다. 실제로 피보나치수열의 인접한 항의 비를 구해 극한을 취해 보면, 위의  $\phi$ 값이 나온다.



왼쪽의 그림은 가로와 세로의 비가 피보나치수열의 인접한 항의 비를 이루도록 직사각형을 분할한 것이며, 오른쪽은 가로와 세로의 비가 황금비율을 이루도록 직사각형을 만들어 분할한 것이다. 그리고 직사각형을 분할하여 만들어지는 정사각형의 인접하지 않은 두 꼭짓점을 원호(圓弧)로 잇는 것을 반복하여 나선을 만든다.



왼쪽에 있는 그림의 나선은 피보나치 나선(Fibonacci spiral)이고, 왼쪽위에 있는 것은 황금 나선(Golden spiral)이다. 한눈에 봐도 비슷하다는 것을 느낄 수 있다. 그리고 안쪽의 가로와 세로의 비가 2:3, 3:5일 때는 모양이 조금 다르지만 가로와 세로의 비가 8:13, 13:21 등과 같은 값을 가질 때는 모양이 거의 비슷해진다는 것도 느낄 수 있다. 위의 수학적 사실을 기하학적으로 표현한 것이다.

5. 메탄 분자구조의 수학적 해석

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

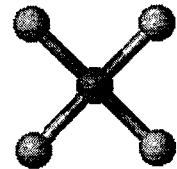
① 메탄의 입체적 구조 분석하기

분자를 구성하고 있는 원자들은 원자들 사이의 반발력을 최소로 하는 결합을 하려고 하는 경향이 있다. 반발력이 작을수록 분자 자체의 구조가 안정되기 때문이다. 메탄은 수소원자 4개 사이의 반발력을 고려한 구조를 이루어야 되는데, 반발력은 두 원자 사이의 거리가 멀수록 작아진다. 그러므로 수소원자들 사이의 길이가 최대가 되는 구조를 찾아보면 된다.

단, a는 수소원자와 탄소원자 사이의 결합길이이다.

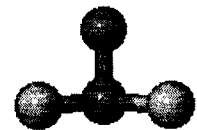
1) 평면구조(정사각형)

탄소원자를 중심으로 수소원자들이 서로 90°의 각을 이루면서 정사각형 모양으로 배열되어 있는 경우이다. 이 경우 수소원자들 사이의 길이는  $\sqrt{2}a$ 가 된다.



2) 삼각뿔구조

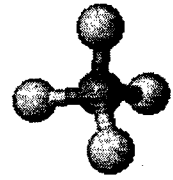
오른쪽 그림과 같이 3개의 수소원자는 한 평면 위에 존재하고, 나머지 한 개의 수소원자만 위로 따로 있는 경우이다. 이 경우에 같은 평면상에 있는 수소원자들 사이의 거리는  $\sqrt{3}a$ , 위에 있는 수소와 아래에 있는 수소들 사이의 거리는  $\sqrt{2}a$ 가 된다.





3) 정사면체구조

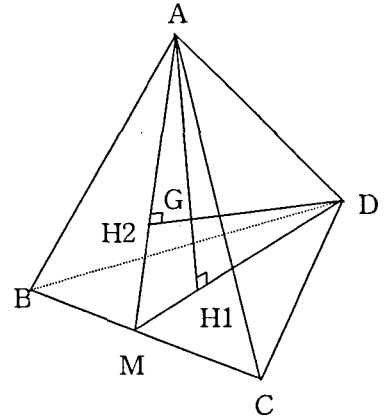
정사면체구조는 탄소원자가 정사면체의 중심에 위치하고, 각각의 수소원자가 정사면체의 꼭짓점의 위치에 있는 모양이다. 이 경우에 각 수소 사이의 길이는  $\frac{2\sqrt{6}}{3}a$ 이다.



결론 : 단순히 거리상으로만 본다면 삼각뿔 구조의  $\sqrt{3}a$ 가 가장 길다. 하지만 아래에 있는 같은 평면상에 있는 수소들 사이의 거리가 가장 멀더라도 위에 있는 하나의 수소는 길이가  $\sqrt{2}a$ , 즉 아래에 있는 수소원자들과는 거리가 다르다. 그로 인해서 서로 밀어내는 힘이 더 세어지고, 그러면 결국 3번의 정사면체 구조가 된다. 정사면체 구조는 대칭성이 있는 구조이면서 원자들 사이의 거리가 가장 길다. 그러므로 가장 안정된 구조가 될 수 있기 때문에 메탄은 정사면체 구조를 하고 있는 것이다.

② 메탄(정사면체)의 결합각도 구하기

위에서 보았듯이 CH<sub>4</sub>(메탄)의 분자구조는 정사면체 모양으로, 정사면체의 각 꼭짓점에 수소 원자가 하나씩 배치되어 있고 정사면체 내부의 중심에 탄소 원자가 배치되어 있는 모양이다. 수소원자 4개를 각각 A, B, C, D라 하고, 이 4개의 수소를 꼭짓점으로 갖는 정사면체를 그리면 옆의 그림과 같다. 선분 BC의 중점 M을 잡고, 점 A와 점 D에서 점 M에 수선을 내리자. 그리고 점 A에서 선분 MD에 수선을 내려서 그 발을 H1, 똑같은 방법으로 점 D에서 선분 AM에 내린 수선의 발을 H2라고 하자. 이 두 선분 AH1, DH2가 만나는 점 G가 정사면체의 중심이다. 즉, 탄소원자가 위치하는 곳이다.  $\overline{AD} = a$ 이면



$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ,  $\overline{AH1} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$ 이다.  $\overline{GH1} = x$ 라 하면,  $\overline{AG} = \overline{DG} = \frac{\sqrt{6}}{3}a - x$ 이다. 삼각형 DGH1에서 피타고라스의 정리를 적용하자.

$$\overline{DG}^2 = \overline{GH1}^2 + \overline{DH1}^2$$

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{3}a - x\right)^2 = x^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a \times \frac{2}{3}\right)^2, \quad x^2 - \frac{2\sqrt{6}}{3}ax + \frac{2}{3}a^2 = x^2 + \frac{1}{3}a^2, \quad \frac{1}{3}a = \frac{2\sqrt{6}}{3}x$$

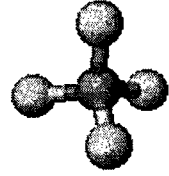
$$\therefore x = \overline{GH1} = \frac{\sqrt{6}}{12}a = \overline{AH1} \times \frac{1}{4}$$

$$\therefore \overline{AG} : \overline{GH1} = 3 : 1$$

$$\therefore \cos \angle AGD = -\cos \angle DGH1 = -\frac{1}{3} \quad (\because \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta)$$

$$\therefore \cos \angle AGD = 109.28^\circ$$

각 AGD, 즉, 오른쪽 그림에서의 탄소원자와 수소원자의 결합 사이의 각도는 약 109.5°가 된다.



#### IV. 결론 및 논의

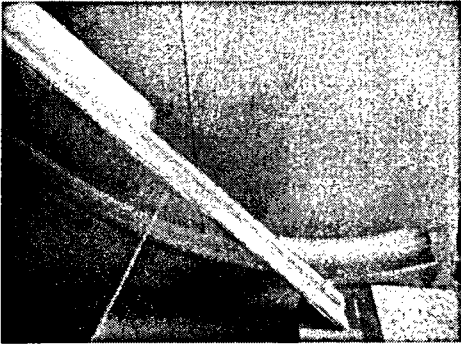
앞의 서론에서도 언급했지만 수학은 기초·유용·추상·일반·기호·형식·논리·계통·심미·과학성이라는 특징을 갖고 있다. 이렇게 많은 색깔을 가지고 있고 큰 덩치를 가지고 있는 수학에서 5 가지만 추려서 생각해 보았다. 우리가 생활하면서 보았을 때에는 무심코 넘어갔던 것들에 대해 생각해 보고 “별거 아니네.”하고 넘길 수도 있지만 예상치 못했던 곳에서도 적용되고 몰랐던 사실들도 알아가면서 연구하는 과정에도 굉장히 신기했다.

물론 여태까지 다 밝혀졌던 내용이지만 한번쯤 더 생각해 보고 그 속에서 세상과 수학이 조화를 이루는 것을 보면서 정말 수학 공식이 아닌 수학의 아름다움을 느꼈으면 하는 바람 이다.

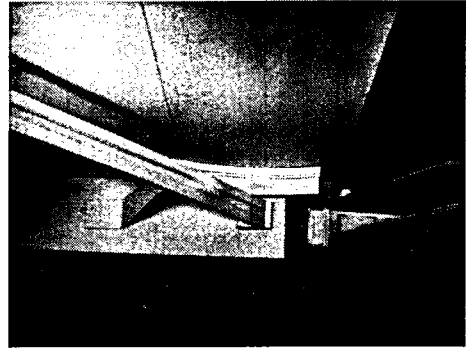
#### V. 인용문헌 & 사이트

오가와요코 지음 (2003), 김난주 옮김(2006). 박사가 사랑한 수식. 경기: 이레  
 황석근·이재근·김익표 지음 (2006), ENV이산수학 성안당.com  
 Garland T. H. (1987) Fascinating Fibonacci Mystery and Magic in Numbers. DALE  
 SEYMOUR PUBLICATIONS  
 Arfken. G. B. Hans J. Weber. (2005) Mathematical method for Physicists. Elsevier Science  
 Lionel, S., Testard, F., & Salem, C. (1992). The most beautiful mathematical formulas. NY:  
 John Wiley and Sons.  
 Symon. K. R. (2000). Mechanics  
 VOROB'EV N.N. 지음/ 김부운 옮김(1999) FIBONACCI NUMBERS. 서울: 한국수학교육학회  
<http://javamath.snu.ac.kr>  
<http://www.mathlove.org/pds/mathqa/faq/Fibonacci/Fibonacci01.html>  
<http://apmath.kku.ac.kr/~seokko/fibonacci.htm>  
<http://knot.kaist.ac.kr/~trefoil/hs100/golden/in.html>  
[http://apple.chol.com/myapple/index.html?reqid=gongnam&article\\_num=59441](http://apple.chol.com/myapple/index.html?reqid=gongnam&article_num=59441)

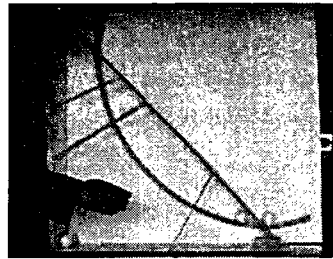
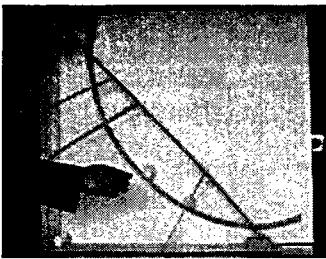
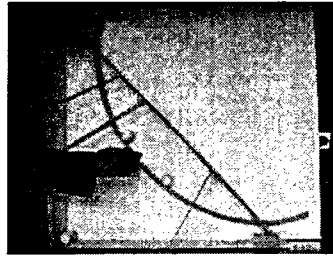
## VI. 부록



최단 강하 곡선 - 1



최단 강하 곡선 - 2



등시곡선