

## Mathematics Education for the Gifted Students and Moscow State University

Anatoly Kombarov (Moscow State University)

수학교육의 효율적인 체계가 없는 나라는 미래가 없는 나라이다. 1957년에 소련은 지구에 인공위성을 쏘아 올렸는데, 이때 미국은 우선 학교 교육체계를 바꾸었으며, 교사들의 봉급을 획기적으로 인상하였다. 지금 러시아의 학계에서는, 우주 개발에서 러시아의 성공을 레닌 언덕에 있는 모스크바국립대학교의 새 건물의 설립으로 설명하려는 의견도 있다.

최근에 모스크바국립대학교 새 건물의 설립 비용에 대한 문서가 공개되었는데, 놀랍게도 모스크바국립대학교의 설립 비용이 2차 대전 중에 완전히 파괴된 도시인 스탈린그라드의 재건에 소요된 비용보다 훨씬 많았다. 전쟁으로 굶주리고 파괴된 나라인 러시아의 지도자들이 그렇게 많은 재정적인 지출을 결정했다. 그 결과, 공학-수학부와 물리학부에서는 이전보다 3배가 많은 학생들을 수용하게 되었다. 이들 학부의 박사과정 학생들은 높은 월급을 받는 교수가 되었다. 공학-수학부의 거의 모든 졸업생들은 비밀연 구소에서 일을 하였다.

이것은 러시아의 역사에서 수학 영재아의 발굴과 수학교육 체계의 향상이 국가경쟁력의 중요한 부분임을 보여주는 한 예라 할 수 있다. 현재, 러시아에서는 이들 문제에 많은 관심을 가지고 있지만, 아직은 구체적인 해결보다는 말만 무성한 실정이다.

본 강연에서는 러시아의 수학영재교육에서 모스크바국립대학교 구성원들의 노력과 결실, 모스크바국립대학교의 공학-수학부의 교육에 대한 몇몇 논의를 다룰 것이다.

### 1. 수학적 재능

1900년대의 위대한 수학자이며 모스크바국립대학교의 교수인 Kolmogorov는 학생들과 수학자들의 수학적 재능에 대해 깊은 관심과 다양한 자료를 수집하였다. Kolmogorov는 수학적 성공은 많은 정보와 공식의 기계적인 암기 및 기억에 관련된 것은 아니라고 강조하였다. 다른 전문분야와 마찬가지로, 수학분야에서도 훌륭한 기억력은 유익하기는 하지만, 그것이 학문에서의 성공을 결정하지는 못한다. 훌륭한 수학자들의 대부분은 어떤 특별한 기억력도 가지지 않았다. Kolmogorov는 수학적 재능의 세 가지 다른 측면을 추출하였다: 알고리즘적 재능, 기하학적 재능, 논리적인 재능.

**알고리즘적 재능:** 복잡한 문자식을 변형하고, 일반적인 방법으로 접근할 수 없는 방정식의 풀이를 위해 성공적인 방법을 찾아내는 것과 같은 대수적인 조작의 수행 능력은 수학자의 진지한 학문 탐구에 요구되는 재능에 상당히 근접해 있다. 일반적으로, 두드러진 대수적 조작의 발달은 수학의 영재성의 한 특징으로 여겨진다. 이에 관련된 수학적 재능을 알고리즘적 재능이라 한다.

**기하학적 재능:** 수학자들은 가능하면 그들이 연구하는 문제들을 기하학적으로 구체적인 형태로 나타내려 한다. 그러므로, 기하학적 상상력은 수학의 모든 영역에서 중요한 역할을 한다. 이러한 기하학적 상상력은 주어진 도형을 머릿속으로 생생하게 상상하는 능력, 기하학 문제로부터 문제해결을 위해 필요한 정보들을 분석하는 능력, 주어진 문제를 기하학적인 형태로 표현하고, 기하학의 언어로 번역하는 능력과 관련된다.

**논리적인 재능:** 순차적인 논리적 고찰을 행하는 것은 수학적 재능의 본질적인 측면이다. 특히, 귀류법에 의한 증명, 수학적 귀납법에 의한 증명, 어떤 명제 및 역명제의 구성과 증명, 다양한 문제상황에서 증명을 수행하는 것은 수학적 영재성의 중요한 측면이다.

[역자주: Kolmogorov의 이들 영재성에 대한 상세한 논의 및 수학적 예들은 “한인기(2006). 수학교육학의 기초와 실제, 경남: 경상대출판부”의 p138-150쪽을 참고하십시오]

이러한 분류에 따라, Kolmogorov와 우리들은 수학 문제들을 선별하고, 수학적 재능의 계발을 지향하는 교수법을 개발하며, 수학적 재능의 모든 측면의 계발에 항상 관심을 기울이고 있다.

수학적 재능은 비교적 빨리 드러나며, 끊임없는 연습이 필요하다. Kolmogorov의 제자인 유명한 수학자 Arnold에 의하면, 수학적으로 재능있는 학생들의 선발하거나 수학적 소양의 계발은 어릴 때 부터 평이한 문제들을 혼자 힘으로 진지하게 고찰하도록 하는 것에 관련된다. 이때, 평이한 문제들 이란 말그대로의 평이함이 아니라, 아래에 제시된 것과 같은 문제들을 의미한다. Arnold에 의하면, “내 오랜 경험에 비추어 보면, 이들 문제에서 우등생들조차 무엇을 곱해야 하는지 핵심을 파악하지 못하는 경우가 종종 있다. 그런데, 이와 같은 문제들은 흥미롭게도, 교수들을 능가하는 암기력을 가진 대학생들, 중등학교 학생들보다 다섯 살 아이가 더 잘 푼다는 것을 알게 되었다.” 그러한 문제들의 몇몇 예들은 다음과 같다.

**문제.** 마샤는 공책을 사는데 7까빼익이 부족하고, 미샤는 1까빼익이 부족했다. 이들은 둘이서 공책 한 권을 사기로 결정했는데, 그래도 돈이 부족했다. 공책은 얼마인가?

**문제.** 벽돌 하나의 무게는 1킬로그램과 벽돌 반의 무게와 같다. 벽돌은 몇 킬로그램인가?

**문제.** 차가 담긴 컵으로부터 한 숟가락을 떠내어 우유가 담긴 컵에 넣었다. 그리고 나서, 숟가락으로 우유컵을 저은 다음, 우유컵으로부터 한 숟가락을 떠내어 차가 담긴 컵에 넣어 저었다. 우유가 담긴 컵에 있는 차가 많은가? 차가 담긴 컵에 있는 우유가 많은가?

이 문제에 관련하여, 독일의 수학자 힐버트는 머릿속으로 생각하여 이 문제를 푸는 사람은 선천적인 수학자라고 하였다.

러시아에서 영재학생들과의 작업은 5-6학년 정도부터 시작된다. 왜 그때인가? Kolmogorov에 의하면, “수학에 대한 최대의 흥미는 13-14세에 나타난다. 이때, 가장 큰 문제는 이러한 흥미를 불러일으키고, 그것을 지탱시키는 것이다. 그리고 지나치게 일찍부터 학생들이 수학적 재능의 명성을 경험하는 것은 바람직하지 않다. 그러나 학생들이 제때에 교사의 조언 또는 경시대회에서의 수상을 통하여, 자신의 장래에 수학을 선택하도록 부추기는 것은 필요하다.

발레 또는 음악과 마찬가지로, 수학에서도 어린 시절에 놓쳐버린 시간들은 보충하기 어렵다. 우리 모두가 아는 바와 같이, 수학의 작업에서는 지적인 유연성, 추상적으로 생각하는 능력, 논리적인 소양이 필요한데, 이들 능력이 대학에 입학하기 전까지 갖추어지지 않으면, 대학시절에 아무리 열심히 노력해도 이를 보충하는 것이 불가능하다.

수학 영재아들과의 작업은 교과외의 성격을 띤다. 러시아에서는 이들과의 작업이 수학동아리, 경시대회, 다양한 문헌들에 대한 학습을 통해 이루어진다.

## 2. 수학 경시대회와 동아리

### (1) 수학 경시대회

일반적으로, 수학시험은 축적된 지식의 확인 또는 수학적 재능의 확인에 관련된다. 수학 경시대회는 수학적 재능의 확인에 전적으로 관련된다. 그러므로, 수학 경시대회는 수학 영재아의 발굴에 일차적으로 관련되며, 수학교육의 수준을 나타내는 중요한 지표가 될 수 있다. 모스크바국립대학교 교수들은 모스크바 수학 경시대회 및 수학동아리의 초창기부터 지금까지 중요한 역할을 담당해오고 있다.

러시아에서 수학 경시대회는 1934년에 레닌그라드에서 시작되었고, 모스크바 수학 경시대회는 1935년에 시작되었다. 제 1회 모스크바 수학 경시대회에는 314명의 학생들이 참가했으며, 2차 세계대전 전까지는 매년 600여명 정도가 참가하였고, 전쟁 후에는 1200명 정도가 참가하였다. 그리고 1960년대에는 수학 경시대회가 절정에 이르렀으며, 이때에는 4000명 이상이 참가하였다. 그리고 나서는 참가자 수가 점점 감소하여 1992년에는 800여명의 학생이 참가하였다. 2006년 모스크바 수학 경시대회에는 2808명이 참가하였는데, 8학년은 510명, 9학년은 578명, 10학년은 740명, 11학년은 980명이 참가하였다.

모스크바 수학 경시대회에서는 각 학년별로 5 또는 6문제씩이 출제되며, 이들 문제는 해결을 위해 정규 교육과정을 벗어난 특별한 수학적 지식을 요구하지는 않는다. 이들 문제는 정규 교육과정에 관련된 수학 성취의 확인을 목적으로 하지는 않으며, 학생들에게 흥미로운 수학 문제들을 푸는 경험을 제공하여 좀더 진지한 수학학습에 대한 흥미 및 관심을 불러일으키는 것을 목적으로 한다. 수학 경시대회 문제들은 학교에서 다루는 일반적인 문제들과는 상당히 구별된다. 그러나 기하 문제들은 예외로 생각할 수 있다. 기하학은 중등학교에서 다루는 수학 영역 중에서 가장 민주적이라 할 수 있다.

기하학 문제들은 그냥 보기엔 평이한 것처럼(표준적인 문제처럼) 보인다. 그래서, 수학 경시대회에 처음 참가하는 학생들은 우선 기하학 문제의 해결을 시도하며, 이들은 한 문제 정도 푸는 경우가 많은데, 그것이 바로 기하학 문제이다. 그러나 수학 경시대회 전문 참가자들은 기하학 문제를 피해서 다른 문제들을 먼저 풀기 시작한다. 모스크바 수학 경시대회에서는 처음 경시대회에 참가하여 한 문제를 해결한 학생들도 시상하여, 이들이 좀더 수학에 대해 진지하게 탐구하여 수학 학교에 진학할 수 있도록 도우려 노력한다.

모스크바 수학 경시대회에는 원하는 학생은 누구나 참가할 수 있다. 수학 경시대회는 다섯 시간동안 계속되며, 모든 문제를 다 푸는 학생은 거의 없다. 학생들의 문제해결은 1주일 동안 채점하며, 그리고 나서 수상자를 결정하여 수상한다. 수학 경시대회의 수상자들은 보통 3-4문제 정도를 해결한 학생들인데, 채점과정에서 산술 계산에서의 오류와 같은 작은 결함에 대해서는 특별한 감점을 하지는 않는다.

한편, 6-7학년 학생들을 위해서는 1990년부터 수학축제가 개최된다. 이 행사에는 2000명 정도의 학생이 참가하며, 두 시간동안 문제를 해결한다. 수학축제 조직위원회에서는 정규 교육과정 수준에서 해결될 수 있는 비정형적인 문제를 출제하려고 애를 쓴다. 시험 후에 세 시간 정도 채점을 하며, 채점하는 동안에 학생들은 조직위원회에서 준비한 문화행사에 참가한다. 그리고 나서, 오후에는 시상식이 성대하게 거행된다.

수학 경시대회를 통해 수학적으로 재능이 있는 학생들을 어느 정도나 발굴할 수 있을까? 물론, 수학 경시대회를 통해 부분적으로는 이러한 발굴이 가능하다. 예를 들어, 1935년 제 1회 모스크바 수학 경시대회의 1등급을 받은 세 명의 수상자 Zverev, Korobov, Myshkis는 모스크바국립대학교의 공학-수학부에 입학하였다. Zverev, Korobov는 공학-수학부의 교수가 되었으며, Myshkis는 2차 세계대전 당시 독일과의 전쟁에서 통신병으로 참가하여 전사하였다. 수학 경시대회를 통해 많은 훌륭한 수학자들이 발굴되었으며, 수학적 소양의 수준을 크게 높였다.

그러나, 수학 경시대회는 다른 측면도 있다. 수학 경시대회에서 두드러진 성과를 낸 많은 수상자들의 사례들 중에는 경시대회적인 전문성이 그들의 수학적 계발을 방해하는 경우가 종종 있다. Kolmogorov에 의하면, 학창시절 수학 경시대회에서 화려했던 학생들 중에는 훗날 수준이 경시대회 수준에 머무는 경우가 많이 있다. 이들은 예리한 수학적 아이디어가 요구되는 문제들을 성공적으로 처리하지만, 긴 고민과 오랜 노력을 요구하는 수학적 문제에 대해서는 끝까지 노력하여 성공적으로 해결하지 못했다. 유명한 수학자인 Gelfand는 “수학은 마라톤이다”라고 했다. 실제로, 높은 목표를 달성하기 위해서는 엄격하고 오랜 시간의 굳센 노력이 필요하다. 이러한 경우에 수학 경시대회의 단기적인 성격의 문제해결이 항상 유익한 경험이 되는 것은 아니다. 유명한 위상수학 학자인 Aleksandrov는 “내가 어렸을 때에 수학 경시대회가 있었다면, 내가 수학자가 되는 것은 불가능했어”라고 말하면서, 자신의 수학적 업적은 짧은 시간의 순발력에 근거한 것이 아니며, 오랜 시간동안의 진지한 노력의 숙성 결과라고 말했다. 즉, 경시대회에서 수상을 못했다고 하여, 수학적 영재성이 없다고 해서는 안된다.

## (2) 수학 동아리

수학 영재아들을 발굴, 교육하는 다른 방법으로 수학 동아리를 들 수 있다. 수학 동아리는 소집단 형태로 운영되며, 각 소집단에는 15-30명이 참여한다. 수학 동아리는 수학 경시대회의 준비라는 성격이 강하다. 초창기 수학 동아리 활동은 학생들의 보고서(소논문) 발표의 형태였는데, 점차적으로 이러한 형태의 교육이 효과적이지 않다는 것이 드러났다.

현재, 학생들은 수학 문제들(일반적인 수학적 아이디어나 주제에 관련된)이 적힌 종이를 받으며, 혼자서 이들 문제에 대해 생각하고, 자신의 풀이를 담당 강사와 토론한다(각 소집단에 2-5명의 강사가 있는데, 모스크바국립대학교의 교수들, 박사과정 학생들, 공학-수학과 졸업생들이 대부분임). 고학년의 수학동아리에서는 대부분의 시간을 문제해결보다는 집에서 해결한 문제의 토론에 할애하며, 강사가 정리들, 개념들의 설명도 포함된다. 학생들은 자신의 풀이를 칠판에 나와서 발표하는데, 이때 풀이에 오류가 포함된 경우가 많이 있다. 그러면, 다른 학생이 그 오류를 수정할 수 있으며, 이러한 과정은 올바른 풀이가 얻어질 때까지 계속된다.

Kolmogorov의 의하면, 수학 경시대회의 성공은 수학 동아리의 효과적인 운영에 근거한다고 했다. 수학 경시대회는 고립된 일회성 행사가 아니라, 일 년 동안의 수학동아리 작업을 총정리한다는 의미로 수행되어야 한다. 수학 동아리와 경시대회에 제시되는 문제들은 종종 인위적이거나 또는 유희적 요소가 포함될 수가 있다. 만약, 이들 문제의 해결을 위해 수학자들에게 요구되는 것과 유사한 성격의 진지한 사고 활동이 요구된다면, 그러한 문제들에 문제가 있는 것은 아니다. 수학 동아리에서 강사들이 학생들에게 제시하는 강의들은 수학의 발전에 대한 논의, 과학에서 수학적 의미 등에 대한 내용을 포함한다. 물론, 동아리에 제시되는 문제들이 수학의 중요한 주제나 탐구 방법에 관련된다면 매우 유익할 것이다. 그러나, 반복연습의 성격을 띤 문제들은 학생들에게 그리 유익하지 않을 것이다.

살펴본, 수학 경시대회나 수학동아리 체계는 수학 영재교육에 관련하여 매우 효과적인 방법들이라 할 수 있다. 예를 들어, Maksim Kontsevich는 수학 경시대회를 통해 수학 영재성을 키운 사례가 될 것이다. Maksim Kontsevich는 1998년에 필즈메달을 받은 유명한 수학자로, 그의 부친은 한국어 전문가이다. Maksim Kontsevich는 우연히 지역수준의 수학 경시대회에 참가하게 되었으며, 그 후에 모스크바 수학 경시대회에 참가하였고, 수학교등학교에 입학하여, 모스크바국립대학교의 공학-수학부를 졸업하였다.

## 3. Popular Lecture(PL)

모스크바국립대학교에서는 토요일마다 중등학교 고학년 학생들을 대상으로 수학에 대한 PL을 개최한다. 각각의 강연에서는 개별적인 주제들에 대한 강의를 이루어지며, 그 주제는 다른 강의들과는 독립적이며, 수학동아리의 수업과도 별개로 이루어진다. 가끔씩 어려운 수학적 아이디어나 결과들에

대한 이야기가 진행되는데, 이때에는 강의의 이해를 위해 정규 교육과정을 벗어나는 수학 내용이 요구되지 않도록 주의한다. PL의 강사는 유명한 수학자나 교수학자들이다. 이러한 전통은 1930년대 초반에 형성되었으며, 다차원기하학, 볼록도형, 집합론의 기본 개념들, 일곱 개의 크리스탈 체계의 결론, 대수학의 기본 정리, 수리물리학이란 무엇인가 등과 같은 주제의 강연이 1940년에 있었다.

이러한 전통은 1994년에 다시금 재생되어, 지금까지 이어지고 있다. PL은 영재아들의 수학교육에서 독특한 역할을 담당하고 있다. PL의 내용은 1950년대부터 시리즈로 출판되었으며, 이들 책자들은 학생들의 수학적 흥미 계발에 중요한 역할을 해왔다. 최근에 출판된 PL시리즈 책자의 제목은 미분계산, 브로카르의 점, 다면체의 아름다운 정리들, 다항식들의 대칭, 연분수, 계량공간의 예들, 다면체들의 부피 등이 있다.

PL시리즈 책자들은 학생들의 수학적 지평을 넓혔으며, 학생들이 학교 교과서 밖의 수학 문제들과 친숙하게 되는데 기여를 했다. PL시리즈 책자들은 학생들이 혼자힘으로 생각하도록 가르쳤다. 특히, PL시리즈의 책자들에서는 수학 영역의 학술적 연구의 결과들이 명료하게 진술되었으며, 문제 설정, 정확한 정의, 상응하는 예들과 함께 설정된 문제의 충분한 논의가 이루어져 제시되어 있다. PL시리즈의 저자들은 논문요약과 같은 성격을 벗어나려고 노력한다. 즉, 어떤 수학자가 어떤 결과를 냈다는 단편적 사실의 기술, 증명이 없는 수학적 사실의 단편적인 기술 등은 PL시리즈에 거의 포함되지 않는다. 그렇다고, PL시리즈가 어떤 수학 영역을 생략없이 체계적으로 서술하려는 것을 목표로 하지는 않는다. PL시리즈의 기술에서 가장 중요한 것은 학생들이 생각하도록 하는 것이며, 저자들은 정규 교육과정의 범위를 벗어나지 않도록 노력한다.

## 4. 모스크바국립대학교 공학-수학부에서의 교육

### (1) 선발시험

공학-수학부의 입학시험은 세 가지 방법으로 나눌 수 있다. 첫 번째 방법으로, 학생들은 신문이나 인터넷에 공개된 10문제를 풀어서 입학시험 위원회로 보낸다. 문제풀이를 보낸 학생들 중에서 1차로 선발이 이루어진다. 1차로 선발된 학생들은 모스크바로 초청되며(이때 작년에 선발 관련 비용은 한 신문회사가 부담하였음), 모스크바국립대학교에서 2차로 진지한 수학시험이 시작된다. 우선, 필기시험을 보며, 그 다음에 구두시험을 치루고, 작문 시험이 있다. 그러므로, 1차 통신시험에서 학생들의 결과가 자신의 능력에 의한 것인지, 타인의 도움에 의한 것인지 쉽게 판별할 수 있다. 2006년의 선발 시험에서 이와 같은 방법으로 50명의 학생이 선발되었다.

두 번째 선발 방법을 살펴보자. 희망하는 모든 학생들은 5월에 있는 Lomonosov 경시대회에 참가한다. 경시대회 결과로, 작년에는 100명이 선발되었다. 세 번째 선발 방법은 7월에 시험을 치른다. 이 시험도 희망하는 모든 학생들이 참가할 수 있다.

한편, 러시아 수학 경시대회의 수상자들, 국제 수학 경대회 참가자들은 무시험으로 입학하며, 모스크바 수학 경대회 수상자들은 러시아어 시험만 부과된다.

공학-수학부의 입학시험에 제시되는 문제들은 수학 경대회의 문제들과 비교해보면, 다른 특징이 있다. 입학시험의 문제해결을 위해서 수학적 발명은 요구되지 않는다. 대부분의 문제들은 이미 학교에서 학습한 규칙들, 방법들의 순차적인 활용을 통해서 해결된다. 만약, 문제해결에서 어떤 독자적인 사고활동이 요구된다면, 이것은 제시된 문제를 가장 자연스러운 방향으로 체계적으로 조사하는 것으로 한정된다. 필기시험은 네 시간 동안 진행되며, 학생들에게 6-9문제가 제시된다. 이 중에서 1-2문제는 아주 어려워 3-4%의 학생들만이 성공적으로 문제를 해결한다.

필기시험은 구두시험에 의해 보완된다. 구두시험에서는 두 개의 이미 알려진 이론적 내용에 관련된 질문, 하나 또는 두 개의 알려지지 않은 문제들로 구성된다. 구두시험에서는 객관성을 확보하기 위해, 두 명의 시험관이 시험을 치루며, 구두시험에서는 추가적인 질문이 학생들에게 주어진다.

## (2) 공학-수학부의 교육

공학-수학부는 모스크바국립대학교의 대표적인 학부로, 모스크바국립대학교를 소개할 때나 학부 목록에서도 제일 먼저 나온다. 공학-수학부에는 대학의 다른 학부들보다도 많은 교수들이 재직하고 있으며, 학교의 초창기부터 존재하여 왔다.

공학-수학부는 수학적영역과 공학영역으로 구성되며, 이들 영역은 독자적으로 학생들을 선발한다. 공학-수학부에는 1년에 400명 정도의 신입생을 입학하는데, 이들 중에서 150명 정도는 박사과정까지 밟는다. 한편, 입학생들은 아주 일찍부터 학술연구를 시작한다. 예를 들어, 1학년 때부터 다양한 전공들(공학-수학부의)의 세미나에 참석하며, 최신의 학술적인 문제들을 풀기 시작한다. 2학년을 마친 후, 학생들은 전공과 지도교수를 선택하며, 지도교수 밑에서 학년말 보고서와 졸업논문을 준비한다. 공학-수학부의 수학적영역에는 다음과 같은 17개 전공이 있다: 해석학, 함수해석 및 함수이론, 미분방정식, 미분기하 및 응용, 고등기하 및 위상수학, 일반위상수학 및 기하학, 고등대수, 수론, 확률론, 수리통계, 수리논리 및 알고리즘 이론, 이산수학, 지적 체계의 수학기론, 통제의 일반적인 문제들, 수치수학, 역동체계 이론, 수학과 공학의 방법론 및 역사. 그리고 공학영역에는 9개의 전공이 있다.