점성포텐셜유동을 이용한 이상유동장의 표면안정성 해석

김형준† · 권세진*

Stability analysis of gas-liquid interface using viscous potential flow

Hyungjun Kim†, Sejin Kwon*

Key Words : viscous potential flow(점성포텐셜), stability analysis(불안정성 해석), two-phase flow(이상유동)

Abstract

In this research, Rayleigh instability of gas-liquid flow in annular pipe is studied in film boiling using viscous potential flow. Viscous potential flow is a kind of approximation of gas-liquid interface considering velocity field as potential including viscosity. A dispersion relation is obtained including the effect of heat and mass transfer and viscosity. New expression for dispersion relation in film boiling and critical wave number is obtained. Viscosity and heat and mass transfer have a stabilizing effect on instability and its effect appears in maximum growth rate and critical wave number. And the existence of marginal stability region is shown.

기호설명

r : 실린더 반경 (m)
R : 경계면 반경 (m)
h : 상의 높이 (m)
F : 경계면의 높이(m)
L : 잠열 (J/kg)
p : 압력 (N/m^2)
S : 열유량 (W/m^2)
T : 온도 (K)
Θ : 열전도도 (W/mK)
μ : 점성계수 (Pa.s)
ν : 동점성계수 (m^2/s)
ρ : 밀도 (kg/m^3)
σ : 표면장력 (N/m)
k : 파수 (1/m)
ω : 주파수 (1/s)

1. 서 론

† 한국과학기술원 항공우주공학과
E-mail : elquin01@kaist.ac.kr
TEL : (042)869-3786 FAX : (042)869-3710
* 한국과학기술원 항공우주공학과

산업현장이나 원자력 발전소에서 냉각수로 냉각을 시키는데, 그 주변으로 열유량이 커지게 되면 막상 비등(film boiling) 현상이 일어나 열전달 효율이 떨어지게 된다. 이러한 기체-액체의 경계면에서 열전달, 즉 상변화가 존재할 경우의 경계면의 불안정성에 대한 연구는 이미 오랜 기간동안 연구되어 온 분야이다. 그 중, Hsieh[3]는 막상 비등(film boiling) 현상에 대해 모델을 소개하였는데, 이 모델은 실제 막비등 현상에서 일어나는 복사에 의한 열전달을 상변화에 의한 전도로 가정하고 이를 이용하여 속도장을 포텐셜유동(potential flow)으로 가정하고 베르누이 방정식을 이용하여 Rayleigh 불안정성에 대해 해석하였다. 그리고 Nayak[10] 등은 Hsieh[3]의 모델을 이용하여 Kelvin-Helmholtz 문제를 해석하였고 최근에 Lee[7,8,9]는 이를 원통형 형상에 대해 Kelvin-Helmholtz, Rayleigh 와 전자기장의 영향을 고려한 Kelvin-Helmholtz 불안정성을 해석하였다.

일반적으로 포텐셜유동은 비점성-비회전 유동장 해석에 이용되는데, 이는 정상상태에 있는 물체의 항력을 계산하지 못한다는 것이 문제이다. 그러나 최근 Joseph[4] 등은 점성 유동장에서 비회전 유체로 가정한 뒤, 액체 속에서 움직이는 기포의 항력

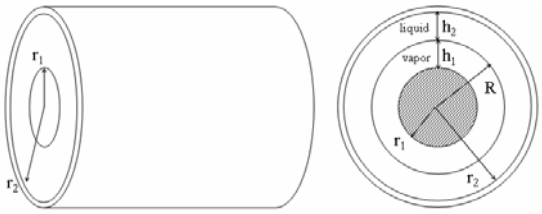
을 계산할 수 있다는 결과를 발표하였고, 이를 점성포텐셜유동(viscous potential flow)라 하였다. 그리고 Funada[1,2] 등은 이를 바탕으로 상변화가 없는 상태에서 기체-액체 경계면에서의 불안정성을 해석하였다.

Joseph[6]에 의하면, Navier-Stokes 방정식은 점성포텐셜유동을 만족하는데, 이는 방정식에서 점성항이 0 이지만, 점성응력은 0 이 아니라는 것을 말한다. 이는 유체의 속도가 속도포텐셜로 정의될 때, 고체 경계면에서 no-slip 조건이나 유체간의 횡방향속도와 전단응력보존식을 만족시키기 어렵다는 것을 의미한다. 점성응력항은 표면에서의 수직응력보존식을 통하여 점성포텐셜유동론을 이용한 자유경계면 해석에 적용된다. 즉, 점성포텐셜유동은 경계면에서의 와도(vorticity)와 마찰을 무시하는 유사 점성유동이론을 말한다.

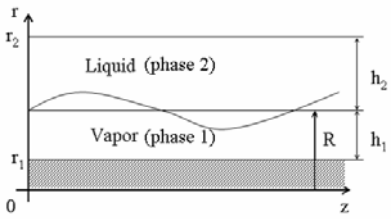
이를 바탕으로 본 연구에서는 점성포텐셜유동을 이용하여 환형 관내에서의 막상 비등 현상에서 일어나는 물과 증기의 표면에서 불안정성 중 표면장력에 의해 일어나는 Rayleigh 불안정성을 해석하였다.

2. 분산관계식(Dispersion relation)

2.1 지배방정식



(a) Geometric diagram



(b) Schematic of analysis

Fig. 1 Schematic of problem

그림 1(a)와 같은 형상에서의 막상 비등을 고려한다. 여기서 상 1 은 증기, 상 2 는 액체로 고려한다. 액체가 차있는 반경 r_2를 가지는 관 내부에 반경 r_1을 가지는 고온의 환형열원이 존재하고 있을 때, 열원 주변으로 상변화가 일어나면서 증기가 발생하게 되는데, 이때 내부의 원통의 온도를 T_1, 외부 원통의 온도를 T_2라 할 때, 온도차이가 커질 경우 막상 비등 현상이 발생하여 액체와 증기의 영역이 분리된다. 이때, 증기의 영역을 그림 1(b)처럼 h_1, 액체 영역을 h_2라 할 때, 원통좌표계를 이용하여 액체-증기 경계면의 높이는 다음과 같이 결정된다.

$$F(r,z,t) = r - R - \eta(z,t) = 0 \qquad (2.1)$$

여기서 η는 경계면에서 교란된 높이를 나타낸다. 그리고 점성포텐셜유동에 의해 속도는 포텐셜로 나타낼 수 있고, 이는 Laplace 방정식을 만족한다. 여기서 상 1 을 증기, 상 2 를 액체라고 했을 때,

$$u_i = \nabla\phi_i,\ \nabla^2\phi_i = 0,\ \ (i = 1,2) \qquad (2.2)$$

액체-증기 경계에서 질량보존식은

$$\left[\!\left[\rho_i \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \nabla\phi_i \cdot \nabla F \right) \right]\!\right] = 0 \qquad (2.3)$$

인데, $[\![x]\!] = x_2 - x_1$를 나타낸다. 그리고 운동량보존식은

$$\begin{aligned} &\rho_1 (\nabla\phi_1 \cdot \nabla F)\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \nabla\phi_1 \cdot \nabla F \right) = \\ &\rho_2 (\nabla\phi_2 \cdot \nabla F)\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \nabla\phi_2 \cdot \nabla F \right) + \\ &\begin{pmatrix} p_2 - p_1 - 2\mu_2 n \cdot \nabla \otimes \nabla\phi_2 \cdot n + \\ 2\mu_1 n \cdot \nabla \otimes \nabla\phi_1 \cdot n + \sigma\nabla \cdot \mathbf{n} \end{pmatrix} |\nabla F|^2 \end{aligned} \qquad (2.4)$$

이고, 여기서 **n** 은 경계면에 수직인 벡터이다. 그리고 식 (4)에서 Bernoulli 식을 이용하여 압력항을 소거하면,

$$\begin{aligned} &\left[\!\left[\rho_i \left\{ \frac{\partial\phi_i}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial z}\right)^2 - \right.\right.\right. \\ &\left[1 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)^2\right]^{-1} \left(\frac{\partial\phi_i}{\partial r} - \frac{\partial\eta}{\partial z}\frac{\partial\phi_i}{\partial z} \right) \times \\ &\left.\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial r} - \frac{\partial\eta}{\partial t} - \frac{\partial\eta}{\partial z}\frac{\partial\phi_i}{\partial z} \right) \right\} \\ &\left.\left. + 2\mu_i \left[\frac{\partial^2\phi_i}{\partial r^2} - 2\frac{\partial\eta}{\partial z}\frac{\partial^2\phi_i}{\partial r\partial z} + \frac{\partial^2\phi_i}{\partial z^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)^2 \right] \right]\!\right] = \\ &\sigma\ \nabla \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \qquad (2.5)$$

2.2 경계조건

유동장을 포텐셜유동으로 가정하였으므로 no-slip 조건을 만족시킬 수 없으므로 원통 벽면에서의 경계조건은,

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial r} = 0 \text{ at } r = r_i,\ \ (i = 1,2) \qquad (2.6)$$

그리고 액체-증기 경계면 $r = R + \eta(z,t)$ 에서

상변화에 의한 열전달은 Hsieh[3]에 의해,

$$L\rho_1\left(\frac{\partial F}{\partial t}+\nabla\phi_1\cdot\nabla F\right)=S(\eta)\ \text{at}\ r=R+\eta \quad (2.7)$$

로 나타낼 수 있는데, 여기서 S 는 경계면에서의 순열유량을 나타낸다.

평형상태를 0 으로 나타낼 때, 평형상태에서 양의 반경방향으로 순열유량은

$$S(\eta)=\frac{\theta_2(T_0-T_2)}{(R+\eta)(\ln r_2-\ln(R+\eta))}-\frac{\theta_1(T_1-T_0)}{(R+\eta)(\ln(R+\eta)-\ln r_1)} \quad (2.8)$$

로 나타낼 수 있다. 그리고 S 는 r=R 일 때, Taylor 확장에 의해

$$S(\eta)=S(0)+\eta S'(0)+\frac{1}{2}\eta^2 S''(0) \quad (2.9)$$

그러므로 S(0)=0 이므로

$$\frac{k_2(T_0-T_2)}{R\ln(r_2/R)}=\frac{k_1(T_1-T_0)}{R\ln(R/r_1)}=G \quad (2.10)$$

인데, 이는 평형상태에서 두 유체 사이의 열유량은 같다는 것을 나타낸다. 위의 식 (2.1)과 (2.8-10)을 통하여 식 (2.7)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\rho_1\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial r}-\frac{\partial\eta}{\partial t}-\frac{\partial\eta}{\partial z}\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\right)=\alpha\eta \quad (2.11)$$

여기서 α는

$$\alpha=\frac{G}{L}\frac{\ln(r_2/r_1)}{R\ln(R/r_1)\ln(r_2/R)}$$

를 나타낸다.

2.3 선형화

본 연구에서는 축대칭 방향으로 진행되는 교란항만을 고려한다. 그리고 포텐셜에서 교란항은

$$\phi_i=\tilde{\phi}_i(r,z),\quad (i=1,2) \quad (2.12)$$

와 같이 쓸 수 있다. 그리고 포텐셜은 Laplace 방정식을 만족하므로,

$$\nabla^2\tilde{\phi}=\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial r}+\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial r}-k^2\tilde{\phi}=0 \quad (2.13)$$

와 같이 쓸 수 있다. 식 (2.12)를 이용하여 지배방정식을 선형화하면 다음과 같다.

$$\left[\!\left[\rho_i\left(\frac{\partial\tilde{\phi}_i}{\partial r}-\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial t}\right)\right]\!\right]=0 \quad (2.14)$$

$$\left[\!\left[\rho_i\frac{\partial\tilde{\phi}_i}{\partial t}+2\mu_i\frac{\partial^2\tilde{\phi}_i}{\partial r^2}\right]\!\right]=-\sigma\left(\frac{\partial^2\tilde{\eta}}{\partial z^2}+\frac{\tilde{\eta}}{R^2}\right) \quad (2.15)$$

그리고 위와 같은 방법으로 경계조건 역시 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial\tilde{\phi}_1}{\partial r}=0,\ \text{at}\ r=r_1,\qquad \frac{\partial\tilde{\phi}_2}{\partial r}=0,\ \text{at}\ r=r_2 \quad (2.16)$$

$$\rho_1\left(\frac{\partial\tilde{\phi}_1}{\partial r}-\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial t}\right)=\alpha\tilde{\eta} \quad (2.17)$$

분산관계식을 얻기 위해 미소교란항을 표준법으로 나타내면,

$$\tilde{\eta}=C\exp(\mathrm{i}kz-\mathrm{i}\omega t)+\text{c.c.}=CE+\text{c.c.},\qquad E\equiv\exp(\mathrm{i}kz-\mathrm{i}\omega t) \quad (2.18)$$

여기서 i 는 허수, C 는 상수, c.c.는 켤래복소수, k 는 실수 영역의 파수(wave number), ω는 $\omega=\omega_{\mathrm{R}}+\mathrm{i}\omega_{\mathrm{I}}$ 로 되는 복소수이다. 이를 이용하면,

$$\tilde{\phi}_1=\frac{1}{k}\left(\frac{\alpha}{\rho_1}-\mathrm{i}\omega\right)A_0(kr)CE+\text{c.c.},\qquad \tilde{\phi}_2=\frac{1}{k}\left(\frac{\alpha}{\rho_2}-\mathrm{i}\omega\right)B_0(kr)CE+\text{c.c.} \quad (2.19)$$

$$A_0(kr)=\frac{I_0(kr)K_1(kr_1)+I_1(kr_1)K_0(kr)}{I_1(kR)K_1(kr_1)-I_1(kr_1)K_1(kR)},\qquad B_0(kr)=\frac{I_0(kr)K_1(kr_2)+I_1(kr_2)K_0(kr)}{I_1(kR)K_1(kr_2)-I_1(kr_2)K_1(kR)} \quad (2.20)$$

여기서 I_n과 K_n은 수정베셀함수를 나타내고 이들은 식 (2.13)을 만족한다.

2.4 분산관계식

식 (2.18,19)를 식 (2.15)에 대입하면 다음과 같은 분산관계식을 얻을 수 있다.

$$D(\omega,k)=a_0\omega^2+\mathrm{i}a_1\omega+a_2=0 \quad (2.21)$$

여기서

$$a_0=\rho_1A_0(kR)-\rho_2B_0(kR),$$

$$a_1=\alpha(A_0(kR)-B_0(kR))+2k^2[\mu_1A_t(kR)-\mu_2B_t(kR)],$$

$$a_2=-\sigma k\left(k^2-\frac{1}{R^2}\right)-2\alpha k^2\left[\frac{\mu_1}{\rho_1}A_t(kR)-\frac{\mu_2}{\rho_2}B_t(kR)\right],$$

$$A_t(kR)=\frac{I_0''(kR)K_1(kr_1)+I_1(kr_1)K_0''(kR)}{I_1(kR)K_1(kr_1)-I_1(kr_1)K_1(kR)}=A_0(kR)-\frac{1}{kR},$$

$$B_t(kR) = \frac{I_0''(kR)K_1(kr_2) + I_1(kr_2)K_0''(kR)}{I_1(kR)K_1(kr_2) - I_1(kr_2)K_1(kR)}$$
$$= B_0(kR) - \frac{1}{kR}$$

여기서 $I_n''(kr) = d^2 I_n(kr)/d(kr)^2$ 을 나타낸다. 그리고 $\omega = \omega_R + i\omega_I$ 이므로, 이를 식 (2.21)에 대입하여 ω_I 항을 없애면,

$$a_0\omega_I^2 + a_1\omega_I - a_2 = 0 \qquad (2.22)$$

식 (2.22)에서는 액체-증기 경계면에서 가장 불안정한 최대파수 k_m과 최대주파수 ω_m 를 구할 수 있다. 그리고 식 (2.22)에서 교란의 성장률 ω_I 가 0 이 되려면 $a_2 = 0$ 이어야 하는데, 이 항이 본 연구의 분산관계식의 중립곡선이 된다.

$$\sigma\left(k_c^2 - \frac{1}{R^2}\right) + 2\alpha k_c\left[\frac{\mu_1}{\rho_1}A_t(k_cR) - \frac{\mu_2}{\rho_2}B_t(k_cR)\right] = 0 \qquad (2.23)$$

이는 Lee[9]와 달리 점성포텐셜유동으로 인하여 중립곡선에서 점성 및 다른 변수의 영향을 고려할 수 있다는 것을 말해준다.

3. 수치 해석 결과

3.1 파수에 따른 성장률 비교

위에서 얻어진 분산관계식과 중립곡선을 통해 불안정성을 알아보기 위해 600K 에서의 물-증기의 특성를 사용하였다.

$\rho_1 = 0.365\text{kg}/\text{m}^3$,

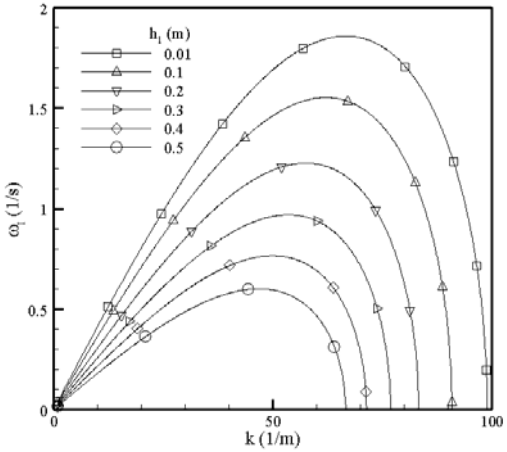
$\rho_2 = 649\text{kg}/\text{m}^3$,

$\mu_1 = 2.067\times10^{-5}\text{kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$,

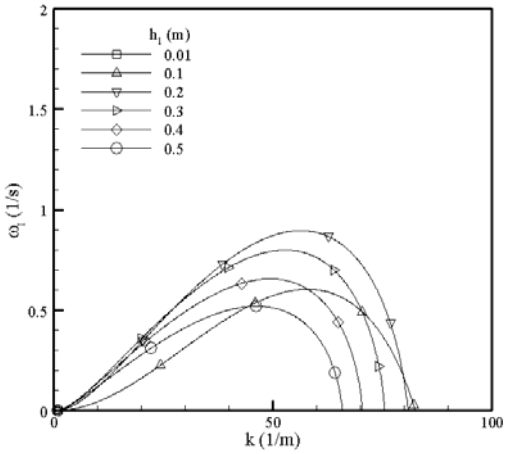
$\mu_2 = 8.1\times10^{-5}\text{kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$,

$\sigma = 8.34\times10^{-3}\text{N}/\text{m}$

일반적인 불안정성의 성장률 곡선은 Fig. 2 와 같은 형태로 나타나게 된다. 이때, 성장률 ω_I 가 최대가 되는 곳이 실제 현상에서 나타나게 되고, 이 때의 주파수를 ω_{Im}, 파수를 k_m 이라 한다. 그리고 성장률이 0 이 될 때의 파수를 k_c 라 한다. k_c 가 되면 이보다 짧은 파장을 가지는 교란은 유동장에 영향을 주지 못한다는 것을 말한다. 해석 결과에서 기존의 포텐셜유동을 이용하여 해석한 결과를 IPF(inviscid potential flow), 점성포텐셜유로 해석된 결과에 대해 VPF(viscous potential flow)라 부른다. Fig. 2 에서는 열계수 G/L 에 다른 성장률 곡선의 변화를 보여준다. 각 결과는 증기층의 높이를 달리 하면서 계산되었는데, 이는 전체 유동장에서의 증기분율을 나타낸다고 볼 수 있다. 열계수 G/L이 증가한다는 것은 그만큼 열교환이 크다는 것을 말해준다. Fig. 2(a)와 (b)를 비교해 보면, 열유량이 클수록 ω_{Im} 과 k_c 가 감소하는 것을 볼 수 있는데, 이는 열유량이 증가하면서 유동장의 안정한 영역이 증가하고 교란의 강도 역시 감소한다는 것을 보여준다. 그리고 IPF와 VPF의 결



(a) G/L=0.0



(b) G/L=0.1

Fig. 2 Growth rate vs. k with varing vapor height using VPF

Table 1 Comparison of IPF and VPF

G/L=0.1 (kg/m^2 s)						
	IPF			VPF		
h_1	ω_{Im}	k_m	k_c	ω_{Im}	k_m	k_c
0.01	0.02	70.0	99.1	-	-	-
0.10	0.82	63.6	91.0	0.60	57.9	82.7
0.30	0.83	53.8	77.0	0.80	52.9	75.7
0.50	0.53	46.9	66.7	0.52	46.4	66.0

과를 Table 1 에 나타내었다. Fig. 2(b)와 Table 1.에서 h_1이 낮을 경우 ω_{Im} 이 0 이 되는 것을 알 수 있는데, 이는 원통 내부에서 증기분율이 낮을 경우 유동이 안정화되는 것으로 볼 수 있다. 그리고 VPF 해석 결과 Rayleigh 불안정성 해석에서 점성은 ω_{Im} 과 k_c 를 감소시키는 것을 확인할 수 있다.

3.2 중립곡선

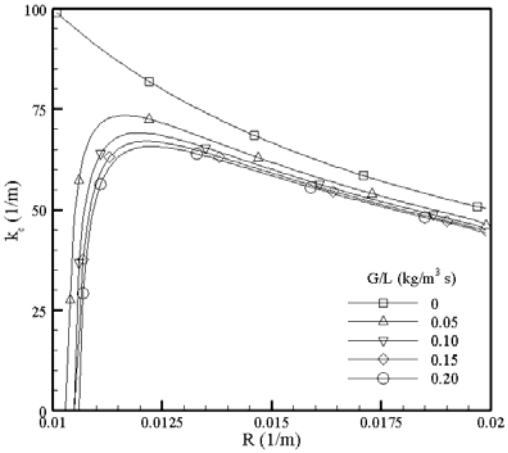


Fig. 3 Effect of vapor fraction on k_c (VPF)

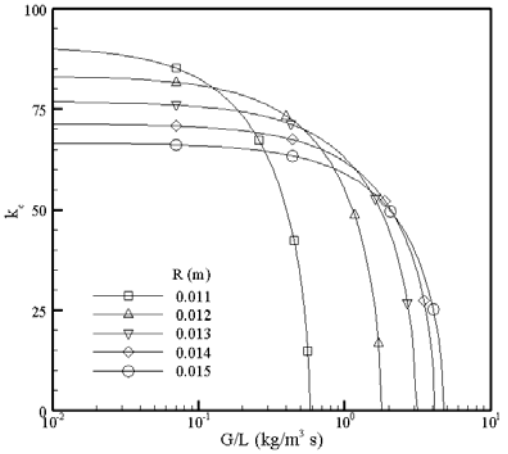


Fig. 4 Effect of heat and mass transfer on k_c (VPF)

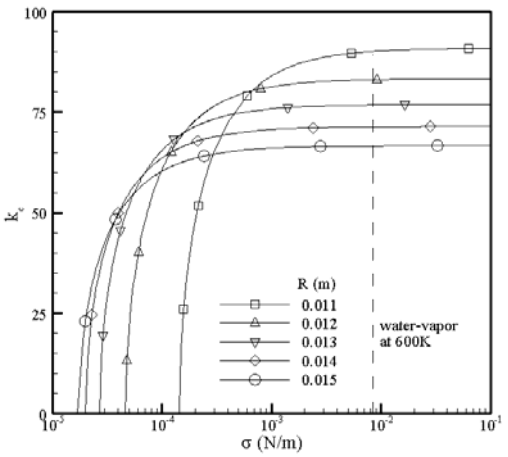


Fig. 5 Effect of surface tension on k_c (VPF)

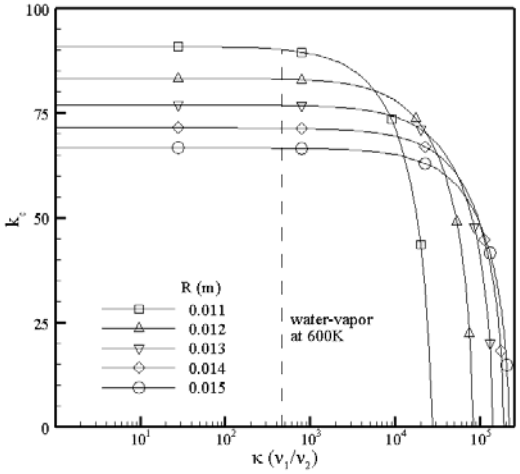


Fig. 6 Effect of

식 (2.23)을 이용하여 k_c 의 변화를 알아보았다. Lee[9]에서도 유사한 식을 얻을 수 있지만, 그 경우에는 $k_c = 1/R$ 로 열계수인 G/L=0 인 경우와 같다. 그러나 본 연구에서는 VPF 로 해석하여 점성의 영향은 물론 다른 여러 변수에 대한 k_c 의 변화를 알아볼 수 있다. 막상 비등 현상이 일어나게 되면 증기와 액체 사이에서 복사만 존재하게 되므로 이는 열전달효율을 악화시키게 된다. 그러므로 실제 적용에 있어서는 불안정성을 증가시키는 것이 중요하다.

Fig. 3 에서 증기분율에 대한 k_c 의 변화를 알아보았다. 이 그림에서 곡선 내부의 영역이 불안정화되는 영역이고, 외부가 안정한 영역이라 할 수 있다. 열유량이 증가할수록 k_c 가 감소하는 것을 확인할 수 있는데, 열유량에 따라 k_c 의 최대값이 달라지는 것을 알 수 있다. 그리고 Fig. 4 에서는 열계수 G/L 의 영향을 알아보았다. 증기분율이 낮을수록 낮은 열계수에서 안정화 구간이 나타나는 것을 알 수 있다. Fig. 5 는 표면장력의 영향을 나타낸다. 표면장력은 온도에 따라 크게 달라지는데, 이로 인해서 Marangoni 현상 등을 동반한 다른 불안정 현상들이 나타나기도 한다. 표면장력이 증가하면서 각각의 증기분율에 대해 고유한 k_c 를 가지게 된다. 이는 Fig. 6 등과 같이 다른 결과들에도 나타나는데, 이를 통해 막상 비등 현상의 계면 안정성에 있어 가장 중요한 요소는 액체와 증기의 분율이라는 것을 알 수 있다. Fig. 6 에서는 VPF 를 이용하여 유체의 동점성계수의 비에 따른 k_c 의 변화를 나타내었다.

4. 결 론

본 연구에서는 점성포텐셜유동 이론을 이용하여 막상 비등 현상에서 발생하는 액체-증기의 표면의 안정성을 여러 가지 경우에 따라 분석하였다. 점성포텐셜유동 이론을 통하여 간단한 방법으로 이상유동장에 점성의 영향을 고려할 수 있었다. 그리고 막상 비등 현상의 해석을 통하여 유체의 점성이 액체-증기 계면의 안정성을 증가시킨다는 것을 확인하였다. 그리고 점성포텐셜유동 이론을 이용하여 유동의 안정화 구간에 대해 다양한 변수에 대한 변화를 확인할 수 있었다.

참고문헌

(1) Funada, T. and Joseph, D.D., 2001, "Viscous potential flow analysis of Kelvin-Helmholtz instability in a channel, " J. Fluid Mech,. Vol. 445, pp. 263-283

(2) Funada, T. and Joseph, D.D., 2002, "Viscous potential flow analysis of capillary instability," Int. J. Multiphase Flow, Vol. 28, pp. 1459-1478.

(3) Hsieh, D.Y., 1978, "Interfacial stability with mass and heat transfer, " Phys. Fluids, Vol. 21, pp. 745-748.

(4) Joseph, D.D. and Liao, T.Y., 1994, "Potential flow of viscous and viscoelastic fluids, " J. Fluid Mech., Vol. 265, pp. 1–23.

(5) Joseph, D.D., Belanger J. and Beavers, G.S., 1999, "Breakup of a liquid drop suddenly exposed to a high-speed airstream, " Int. J. Multiphase Flow, Vol. 25, pp. 1263–1303.

(6) Joseph, D.D., 2003, "Viscous potential flow, ", J. Fluid Mech., Vol. 479, pp.191-197.

(7) Lee, D.S., 1997, "Nonlinear interaction of capillary-gravity waves with a subsonic gas in the presence of magnetic field, " J. Physique II, Vol. 7, pp. 1045–55.

(8) Lee. D.S., 2002, "Nonlinear stability in magnetic fluids of cylindrical interface with mass and heat transfer, " Eur. Phys. J. B, Vol. 28, pp. 495-503.

(9) Lee, D.S., 2003, "Nonlinear Rayleigh instability of cylindrical flow with mass and heat transfer, " J. Phys. A: Math. Gen., Vol. 36, pp. 573–583.

(10) Nayak, A.R. and Chakraborty, B. B., 1984, "Kelvin–Helmholtz stability with mass and heat transfer, " Phys. Fluds, Vol. 27, pp. 1937-1941.