근사 이산화 모델들을 이용한 재설계된 퍼지 디지털 제어시스템의 상태-정합 특성 및 안정도

State-Matching Properties and Stability of Redesigned Fuzzy Digital Control System

김도완[1], 주영훈[2], 박진배[1]

[1] 연세대학교
E-mail: {dwkim,jbpark}@control.yonsei.ac.kr
[2] 군산대학교
E-mail: yhjoo@kunsan.ac.kr

요 약

본 논문에서는 근사 이산-시간 모델 기반 지능형 디지털 재설계 기법의 타당성에 대해서 논의한다. 타당성을 검증하기 위해 재설계된 디지털 제어 퍼지 시스템의 안정도 및 상태-정합에 특성이 분석된다. 구체적으로 근사 이산-시간 모델들의 상태 사이의 비정합의 크기가 충분히 작으면 재설계된 디지털 제어 퍼지 시스템의 평형점은 점근적 안정함을 보인다. 또한 이러한 비정합이 영으로 수렴함에 따라 재설계된 디지털 제어 퍼지 시스템과 주어진 아날로그 제어시스템 사이의 비정합은 매우 작아짐을 보인다.

Key Words : 상태-정합, 안정도, 지능형 디지털 재설계(intelligent digital redesign: IDR), 타카기-수게노(Takagi-Sugeno: T-S) 퍼지 모델, 대략화(approximation), 이산-시간 모델.

1. 서 론

복잡한 비선형 제어 시스템 효과적인 디지털 구현을 위한 기법 중 하나인 지능형 디지털 재설계(intelligent digital redesign: IDR)에 대한 많은 연구결과가 [1]-[6]에서 있어 왔다. [1]-[7]에서 소개된 공토된 아이디어는 비선형 시스템을 타카기-수게노(Takagi-Sugeno: T-S) 퍼지 모델로 묘사한 후 최적 상태정합 성능을 발휘하는 퍼지 모델-기반 디지털 제어기를 설계하는 것이다. 지능형 디지털 재설계의 개념은 [1]에서 처음 소개되었다. [2]에서는 불확실성인 존재하는 퍼지 시스템의 강인 디지털 제어기 설계 문제를 지능형 디지털 재설계 기법을 이용하여 해결하였다. 그러나 [1], [2]에서 소개된 기법으로는 전역 상태정합을 충족시키는 제어기를 설계 할 수 없다. 이러한 문제점을 해결하기 위해서 [3-6]에서 전역 상태-정합을 고려한 기법들이 소개되었다. 하지만 [1-6]의 기법들은 근사 이산-시간 모델을 상태 정합을 위한 조건 유도에 사용하였다. 따라서 근사화로 인한 오차로 때문에 그들이 유도한 충분조건을 만족하더라도 실제 아날로그 및 디지털 제어 시스템의 상태-정합에 대해서 근사화에 대한 가정 없이는 우리는 어떠한 결론도 내릴 수 없다.

본 논문에서는 근사 이산-시간 모델 기반 지능형 디지털 재설계 기법의 타당성을 조사한다. 당성을 검증하기 위해 근사 이산-시간 모델들의 상태 사이의 비정합의 크기에 따른 재설계된 디지털 제어 퍼지 시스템의 안정도 및 상태-정합에 특성이 분석된다.

2. 아날로그 및 디지털 퍼지 제어시스템

다음과 같은 T-S 퍼지 모델로 표현 가능한 비선형 시스템 $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ 고려하자:

$$\begin{aligned} R_i:&\ \text{IF } z_1(t) \text{ is } \Gamma_{i1} \text{ and } \cdots \text{ and } z_p(t) \text{ is } \Gamma_{ip} \\ &\text{THEN } \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 $x(t) \in \mathbb{R}^n$는 상태벡터(state vector)를 나타내며, $u(t) \in \mathbb{R}^m$은 제어입력이며, R_i, $i \in \mathcal{I}_r = \{1, 2, \cdots, r\}$,는 i번째 퍼지규칙을 의미하며, $z_h(t)$, $h \in \mathcal{I}_p = \{1, 2, \cdots, p\}$,는 h번째 전반부 변수(premise variable)이고, Γ_{ih}, $(i, h) \in \mathcal{I}_r \times \mathcal{I}_p$,는 R_i에서 $z_h(t)$의 퍼지 집합을 의미한다.

아날로그와 디지털 퍼지 제어기의 규칙은 다음과 같다:

$$\begin{aligned} R_i:&\ \text{IF } z_{a1}(t) \text{ is } \Gamma_{i1} \text{ and } \cdots \text{ and } z_{ap}(t) \text{ is } \Gamma_{ip} \\ &\text{THEN } u_a(t) = \hat{K}_i x_a(t) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} R_i:&\ \text{IF } z_{d1}(kT) \text{ is } \Gamma_{i1} \text{ and } \cdots \text{ and } z_{dp}(kT) \text{ is } \Gamma_{ip} \\ &\text{THEN } u_d(t) = K_i x_d(kT) \end{aligned} \tag{3}$$

여기서 $u_a(t)$는 아날로그 제어 입력이며, $u_d(t)$는 $[kT, kT+T)$, $k \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2 \cdots\}$,에서 일정한 값을 가지는 디지털 제어 입력이고, T는 샘플링 주기를 나타낸다. 중심값-평균 비퍼지화(center-average defuzzification), 곱셈추론(product inference), 싱글톤 퍼지화(singleton fuzzifier)를 사용하여, (1), (2)와 (3)은 다음과 같이 추론된다:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \theta_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \tag{4}$$

$$u_a(t) = \sum_{i=1}^{r} \theta_i(z_a(t))\hat{K}_i x_a(t) \tag{5}$$

$$u_d(t) = \sum_{i=1}^{r} \theta_i(z_d(kT))K_i x_d(kT) \tag{6}$$

여기서 $\theta_i(z(t)) = w_i(z(t))/\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))$, $w_i(z(t)) = \prod_{h=1}^{p} \mu_{\Gamma_{ih}}(z_h(t))$, 그리고 $\mu_{\Gamma_{ih}}(z_h(t))$: $U_{z_h(t)} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{[0,1]}$은 소속함수(membership function)이다. 식 (4), (5)와 (6)을 이용하여 우리는 두 개의 폐루프(closed-loop) 시스템

$$\dot{x}_a(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \vartheta_{ij}(z_a(t))(A_i + B_i\hat{K}_j)x_a(t) \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_d(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \vartheta_{ij}(z_d(t, kT))(A_i x_d(t) + B_i K_j \\ \times x_d(kT)) \end{aligned} \tag{8}$$

을 얻는다, 여기서 $\vartheta_{ij} = \theta_i\theta_j$. 식 (7)과 (8)의 근사 (approximate) 이산-시간 모델은

$$x_a(kT+T) \approx \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \vartheta_{ij}(z(kT))\hat{G}_{ij} x_a(kT) \tag{9}$$

$$\begin{aligned} x_d(kT+T) \approx \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \vartheta_{ij}(z(kT))(G_i + H_i K_j) \\ \times x_d(kT) \end{aligned} \tag{10}$$

으로 각각 주어진다 [1-7], 여기서 $\hat{G}_{ij} = e^{(A_i + B_i\hat{K}_j)T}$, $G_i = e^{A_i T}$, 그리고 $H_i = \int_{kT}^{kT+T} e^{A_i(kT+T-\tau)} B_i d\tau$.

3. 주요 결과

본 논문의 해결하고자하는 문제는 다음과 같다:

문제 1: 시스템 (7)의 평형점(equilibrium point), 즉 원점이 점근적으로 안정하고 식 (6)은 충분히 작은 $\gamma \geq 0$에 대해서 부등식

$$\|\Delta_{ij}\| \leq \gamma \tag{11}$$

여기서 $\Delta_{ij} = G_i + H_i K_j - \widehat{G}_{ij}$, 을 만족하도록 재설계 되었다고 가정하자. 그때, (8)의 평형점의 안정도 및 (7)과 (8)의 궤적(trajectory) 사이의 상태-정합(state-matching)을 알아보자.

본 논문의 주요결과를 도출하기 위해서 다음과 같은 보조정리와 정의들이 필요하다:

보조정리 1: 시스템 (7)과 (8)를 고려하고 $p = x_d - x_a$라 정의하자. 그때, 부등식

$$\begin{aligned}\|p(kT)\| \leq \left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\|\Delta_{ij}\| + \rho_1\right)^{k-k_0} \Bigg\{ &\|p(k_0T)\| \\ &+ \left(2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\|\Delta_{ij}\| + \rho_2\right) \\ &\times \sum_{t=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\|\Delta_{ij}\| + \rho_1\right)^{-t-1} \\ &\times \sum_{t=0}^{\infty}\|x_a(tT + k_0T)\| \Bigg\}\end{aligned} \tag{12}$$

을 만족하는 어떤 양의 상수 ρ_1과 ρ_2가 존재한다, 여기서

$$\rho_1 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}(\|\widehat{G}_{ij}\| + \|I - G_i - H_iK_j\| + T\varrho_3\|A_i\| + T\|B_iK_j\|)$$

$$\rho_2 = T\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}((\varrho_1 + \varrho_4)\|A_i\| + \|B_iK_j - B_i\widehat{K}_j\| + \varrho_2\|B_i\widehat{K}_j\| + \|B_iK_j\|)$$

$$\varrho_1 = e^{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\|A_i + B_i\widehat{K}_j\|T}$$

$$\varrho_2 = T\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\|A_i + B_i\widehat{K}_j\| e^{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\|A_i + B_i\widehat{K}_j\|T}$$

$$\varrho_3 = \left(1 + T\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\|B_iK_j\|\right) e^{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\|A_i\|T}$$

$$\varrho_4 = T\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\Big(\|B_iK_j - B_i\widehat{K}_j\| + \|B_iK_j\| + \varrho_1\|A_i\| + \varrho_2\|B_i\widehat{K}_j\|\Big) e^{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\|A_i\|T}.$$

증명: 식 (8)에서 (7)을 뺀 후 양변에 놈(norm)을 취한 후 Grnowall-Bellman 부등식, 등 을 이용하여 식(12)를 쉽게 유도할 수 있다. ■

보조정리 2: 시스템 (8)의 평형점(equilibrium point)은 시스템 (8)의 정확한 이산 시간 모델의 평형점(equilibrium point)이 점근적 안정(asymptotically stable)하면 점근적 안정(asymptotically stable)하다.

증명: 식 (8)의 해를 구한 후 양변에 놈(norm)을 취하여 $x(t)$는 $x(kT)$에 의하여 유계되어 짐(bounded)을 보인다. ■

정의 1 [임의의 점에서 함수의 극한]: (M,d)과 (N,ρ)을 두 개의 행렬 공간(metric spaces)이라 하고, $A \subset M$, 그리고 $f : A \to N$를 고려하자. 임의의 $\varepsilon > 0$에 대해서 $d(x^*, x) < \delta$이면 $\rho(f(x), b) < \varepsilon$를 만족하는 $\delta > 0$가 존재한다며 $b \in N$는 x^*에서 f의 극한값이다.

정의 2 [점근적 안정도(asymptotic stability)]: 시스템 $\dot{x}(t) = f(x(t))$ (또는 $x(k+1) = f(x(k))$)의 평형점이 안정하고

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty}\|x(t)\| = 0$$

(또는 $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\|x(k)\| = 0$)을 만족하는 δ 가 존재한다면 점근적 안정하다(asymptotically stable).

본 논문의 주요결과는 다음과 같다:

정리 1: 시스템 (7)의 평형점(equilibrium point), 즉 원점이 점근적으로 안정하고 식 (6)은 충분히 작은 $\gamma \geq 0$에 대해서 부등식 (11)을

만족하도록 재설계 되었다고 가정하자. 그때, 충분히 작은 $\gamma \geq 0$에 대해서 (8)의 평형점은 점근적으로 안정하며 (7)의 상태(state)는 (8)의 상태와 애우 가깝게 정합된다.

증명: 시스템 (8)의 상태정합 및 안정도 특성은 보조정리 1과 2와 정의 1과 2를 이용하여 을 쉽게 분석 가능하다. ■

4. 결 론

본 논문에서는 근사 이산-시간 모델 기반 지능형 디지털 재설계 기법의 타당성을 알아보았다. 우리는 타당성을 검증하기 위해 재설계된 디지털 제어 퍼지 시스템의 두 가지 특성을 알아보았다. 첫 번째로, 아날로그 및 디지털 제어 시스템의 근사 이산-시간 모델들의 상태 사이의 비정합의 크기가 매우 작으면 재설계된 디지털 제어 퍼지 시스템의 평형 점은 원점으로 수렴한다. 두 번째로, 근사 이산-시간 모델들의 상태사이에 비정합이 영으로 수렴하면 실제 아날로그 및 디지털 제어 시스템의 비정합 또한 영으로 수렴한다.

참 고 문 헌

[1] Y. H. Joo, G. Chen, and L. S. Shieh, "Hybrid state-space fuzzy model-based controller with dual-rate sampling for digital control of chaotic systems," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 7, pp. 394-408, Aug. 1999.

[2] W. Chang, J. B. Park, Y. H. Joo, and G. Chen, "Design of sampled-data fuzzy-model-based control systems by using intelligent digital redesign," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 49, pp. 509-517, Apr. 2002.

[3] W. Chang, J. B. Park, and Y. H. Joo, "GA-based intelligent digital redesign of fuzzy-model-based controllers," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 11, no. 1, pp. 35-44, 2003.

[4] H. J. Lee, H. B. Kim, Y. H. Joo, W. Chang, and J. B. Park, "A new intelligent digital redesign for T-S fuzzy systems: Global approach," *IEEE Trans. Fuzzy syst.*, vol 12, no.2, pp. 274-284, Apr. 2004.

[5] H. J. Lee, J. B. Park, and Y. H. Joo, "Digitalizing a fuzzy obsever-based output-feedback control: intelligent digital redesign approach," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 13, no. 5, pp. 701-716, 2005.

[6] D. W. Kim, J. B. Park, and Y. H. Joo, "Effective digital implementation of fuzzy control systems Based on Approximate Discrete-time Models,'' *Automatica*, 2007, (To be published)

[7] D. W. Kim, J. B. Park, H. J. Lee, and Y. H. Joo, "Discretisation of continuous-time T-S fuzzy system: global approach," *IEE Proc. Control Theory Appl.*, pp. 237-246, vol. 153, 2006.