Proceedings of KFIS Spring Conference 2007 Vol. 17, No. 1.

시간 변동 시간 지연을 가지는 뉴트럴 시스템의 관측기 설계에 관한 연구

Delay-Dependent Observer-Based Control for a Class of Neutral Systems with Time-Varying Delays

송민국[1], 주영훈[2], 박진배[1]

[1] 연세대학교 전기전자공학과
E-mail: {s5ngm2n9k, jbpark}@control.yonsei.ac.kr
[2] 군산대학교 전기정보공학부
E-mail: yhjoo@kunsan.ac.kr

요 약

본 논문은 시간 변동 시간 지연을 가지는 선형 Neutral 시스템에 관한 관측기 설계에 대해서 논의한다. 시간 지연을 가지는 시스템의 안정도를 판별하기 위하여 Lyapunov-Krasovskii의 이론을 도입한다. 시스템의 안정도를 위한 조건으로 시간 변동 시간 지연에 종속적인 충분조건을 제시한다. 선형 행렬 부등식을 이용하여 관측기의 이득값을 설계하며, 오차 상태 방정식의 안정도를 판별한다. 본 논문의 결과는 Luenberger가 제안한 관측기의 일반적인 결과를 나타낸다. 모의 실험을 통해 논문의 결과를 입증하였다.

Key Words : Neutral System, Time delay, Observer

1. 서 론

시간 지연 현상은 생물학, 경제 시스템, 그리고 다양한 공학 분야에서 흔히 발견된다. 게다가 시간 지연은 시스템의 안정성을 저해하며, 성능을 떨어뜨리는 역할을 한다. 따라서 이러한 시간 지연을 포함한 시스템의 안정도 해석에 관한 연구가 주요 관심사가 되어 왔으며, 활발한 연구가 진행되어 왔다 [1-5].

많은 응용 시스템에서 상태 변수는 항상 측정 가능하지가 않다. 이러한 상황에서는 관측기 기반의 제어기 설계가 필요하다. 따라서 본 논문에서는 시간 변동 시간 지연을 가지는 neutral 선형 시스템에 관한 관측기 설계를 목표로 한다.

관측기 설계는 오랜 시간에 걸쳐 논의 되어 왔다. [1]에서는 스펙트럼 부여 방법에 의해서 관측기를 설계하는 방법을 제시하였다. 또한 관측기 설계를 위해서 일반적인 좌표 변환 방법과 선형 행렬식에 의한 접근법이 제시되었다 [2]. [3]에서는 시간 변동 시간 지연을 가지는 선형 retarded 시스템에 관한 연구가 진행되었다. 일반적으로 시간 지연 시스템의 안정도 분석을 위해서는 Lyapunov 안정성 이론과 선형 행렬 부등식이 이용되어 왔다 [4]. [5]에서는 알려진 시간 지연을 가지는 선형 neutral 시스템에 대해서 연구되었다.

본 논문에서는 지금까지 연구 되어온 시간 지연 시스템에 관한 다양한 결과를 시간 변동 시간 지연을 가지는 선형 neutral 시스템에 맞게 적용시켰다. 이때 구해지는 안정도 조건은 시간지연 항이 포함되는 조건이다

제안된 설계 기법을 이용하여 시간 변동 시간 지연을 가지는 선형 neutral 시스템의 관측기를 설계하고자 한다. 먼저 선형 시스템을 앞서 제안된 모델 변환을 이용하여 시스템을 변형한다 [6]. 관측기를 설계하기 위해 시간 변동 시간 지연에 관한 몇 가지 가정을 덧붙인다. 다음으로 정의한 오차 상태 방정식을 안정화 시키는 관측기를 설계한다. LMI를 이용하여 안정한 관측기 존재성의 충분조건을 살펴본다. 임의의 선형 시스템에 대하여 본 논문이 제안한 이론이 타당한지를 모의 실험한다.

2. Neutral System

다음의 시간 변동 시간 지연 $\tau(t)$와 $g(t)$을 가지는 선형 Neutral 시스템을 고려한다.

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) - D\dot{x}(t-g(t)) &= Ax(t) + A_d x(t-\tau(t)) \\
&\quad + Bu(t), \\
x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-h, 0] \qquad (1) \\
y(t) &= Cx(t).
\end{aligned}
$$

여기서 $x(t) \in R^n$는 상태변수, $u(t) \in R^m$는 제어 입력이며, $\phi(t)$는 연속적인 벡터 초기 함수이다. h는 시간 변동 시간 지연 $\tau(t)$와 $g(t)$의 상위 경계이며, A, A_d, B, C와 그리고 D는 알려진 차원의 행렬이다.

본 논문에서는 다음과 같은 관측기를 고려한다.

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}(t) - D\dot{\hat{x}}(t-g(t)) &= A\hat{x}(t) + A_d\hat{x}(t-\tau(t)) \\
&\quad + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)), \\
\hat{y}(t) &= C\hat{x}(t). \qquad (2)
\end{aligned}
$$

여기서 L은 관측기의 이득값으로 본 논문에서 설계될 값이다. 또한 시스템의 안정도를 위해 다음을 가정한다.

가정 1. 행렬 D는 다음을 만족한다.
$D \neq 0, \quad \| D \| < 1.$

오차 상태 변수를 다음과 같이 정의 한다.
$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$
우리는 식 (1)과 (2)를 바탕으로 다음의 식을 유도할 수 있다.

$$\dot{e}(t) - D\dot{e}(t-g(t)) = A_o e(t) - A_d e(t-\tau(t)) \quad (3)$$

여기서 $A_o = A - LC$이다.

[6]에서 유도된 모델 변환을 이용하면, 식 (3)은 다음과 같이 변환할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&\dot{e}(t) - D\dot{e}(t-g(t)) \\
&= (A_0 + A_d)e(t) - A_d e(t) + A_d e(t-\tau(t)) \\
&\dot{e}(t) - D\dot{e}(t-g(t)) \\
&= (A_0 + A_d)e(t) - \int_{t-\tau(t)}^{t} \dot{e}(s)ds
\end{aligned}
$$

본 논문의 목적은 관측기를 포함하는 오차 상태 방정식 (3)이 안정하게 되는 것이다. 이를 위해서 오차 상태 방정식 (3)이 안정하게 만족하는 관측기 이득값 L을 설계한다. 이 때 오차 상태 방정식 (3)의 안정도는 $g(t)$에는 독립적이며, $\tau(t)$에는 종속적임을 확인한다.

본 논문에서는 시간 변동 시간 지연 $\tau(t)$에 대해서 다음을 가정한다.

가정 2. $\tau(t)$는 미분 가능한 함수이며, 모든 시간 $t \geq 0$에서 다음을 만족한다.
$0 \leq \tau(t) \leq h \ , \ \dot{\tau}(t) \leq d < 1.$

3. Neutral 시스템의 관측기 설계

3.1 안정도 해석

이 장에서는 오차 상태 방정식 (3)의 안정도에 대해서 논의한다. 오차 상태 방정식 (3)의 안정도를 판별하기 위한 충분조건을 제시한다. 우리의 결론을 나타내기 위해서 다음의 보조 정리를 이용한다.

보조정리 1 [7]. 적정한 행렬 X, Z에 대해서 주어진 행렬 $a \in R^a$, $b \in R^b, N \in R^{a \times b}$는 다음의 부등식을 만족한다.

$$-2a^T Nb \leq \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y-N \\ Y^T - N^T & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$

여기서 $\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \geq 0$이다.

다음의 정리 1은 오차 상태 방정식의 안정도를 양한정 대칭 행렬의 존재로 보여준다. 따라서 이는 관측기 설계 문제의 핵심이 된다.

정리 1. 다음의 양한정 행렬 R, Q, S, Y_1, Y_2, Y_3, Z_1, Z_2, Z_3 그리고 P_1과 어떤 적합한 행렬 P_2, P_3이 다음의 선형 행렬 부등식을 만족하면 시스템 (3)은 안정하다.

$$
\Phi = \begin{bmatrix} \Psi & P^T\begin{bmatrix} 0 \\ A_d \end{bmatrix} - Y^T & P^T\begin{bmatrix} 0 \\ D \end{bmatrix} \\ * & -(1-\dot{\tau}(t))S & 0 \\ * & 0 & -(1-\dot{g}(t))Q \end{bmatrix} < 0, \quad (4)
$$

여기서

$$
\begin{aligned}
\Psi = {} & P^T\begin{bmatrix} 0 & I \\ A_0 & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & A_o \\ I & -I \end{bmatrix}P + hZ \\
& + \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & hR+Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix}^T,
\end{aligned}
$$

$Y = [\, Y_1 \ Y_2 \,], Z = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ * & Z_3 \end{bmatrix}$이다.

증명) Lyapunov-Krasovskii의 방법을 적용한다.
이 논문에서 주어진 시스템을 위해서 우리는 [6]의 연구에서 도입된 descriptor 모델 변환을 이용한다. 이때의 모델 변환은 다음과 같다.

$$
E\dot{\bar{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ -y(t) + D\dot{e}(t-g(t)) + (A_0 + A_d)e(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ A_d \end{bmatrix} \int_{t-\tau(t)}^{t} y(s)ds
$$

여기서 $\bar{x}(t) = col\{x(t), y(t)\}$이며,
$E = diag\{I, 0\}$이다.
따라서 다음의 Lyapunov 함수를 고려할 수 있다.

$$V = \bar{X}^T EP\bar{x} + \int_{-h}^{0}\int_{t+\theta}^{t} y^t(s)Ry(s)dsd\theta + \int_{t-\tau(t)}^{t} x^T(s)Sx(s)ds + \int_{t-g(t)}^{t} y^T(s)Qy(s)ds$$

여기서 $P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}, P_1, R, S, Q > 0$이다.

Lyapunov 함수의 첫 번째 항을 시간 t에 관하여 미분 하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt}(\bar{x}^T EP\bar{x}) = 2x^T(t)P_1 x(t) = 2\bar{x}^T P^T \begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

이를 이용하여, 전체 Lyapunov 함수의 시간 t에 관한 미분을 구해보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V \le\ & \overline{x^T}\Phi\bar{x}(t) + \int_{t-h}^{t} y^T(s)Ry(s)ds \\ & -(1-\dot{\tau}(t))x^T(t-\tau(t))Sx(t-\tau(t)) \\ & -\eta(t) - (1-\dot{g}(t))y^T(t-g(t))Qy(t-g(t))\end{aligned}$$

여기서

$$\eta(t) = -2\int_{t-\tau(t)}^{t} \bar{x}^T P^T \begin{bmatrix} 0 \\ A_d \end{bmatrix} y(s)ds \text{ 이다.}$$

보조정리 1을 이용하여 $\eta(t)$를 정리하면 다음과 같다. 보조정리 1을 이용하기 위해서 $N = P^T \begin{bmatrix} 0 \\ A_d \end{bmatrix}, a = y(S), b = \bar{x}(t)$로 생각하면 된다.

$$\begin{aligned}\eta(t) &< \int_{t-\tau(t)}^{t} \begin{bmatrix} y(s) \\ \bar{x}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & Y - [0\ A_d]P \\ Y^T - P^T\begin{bmatrix} 0 \\ A_d \end{bmatrix} & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(s) \\ \bar{x}(t)r \end{bmatrix} ds \\ &= \int_{t-\tau(t)}^{t} y^T(s)Ry(s)ds + \int_{t-\tau(t)}^{t} \overline{x^T}(t)Z\bar{x}(t)ds \\ &\quad + 2\int_{t-\tau(t)}^{t} y^T(s)(Y - [0\ A_d]P)\bar{x}(t)ds \\ &= \int_{t-\tau(t)}^{t} y^T(s)Ry(s)ds + \tau(t)\overline{x^T}(t)Zbarx(t) \\ &\quad + 2\int_{t-\tau(t)}^{t} \dot{x}^T(s)(Y - [0\ A_d]P)\bar{x}(t)ds \\ &= \int_{t-\tau(t)}^{t} y^T(s)Ry(s)ds + x^T(t)(Y - [0\ A_d]P)\bar{x}(t)ds \\ &\quad x^T(t-\tau(t))(Y - [0\ A_d]P)x(t)ds + h\bar{x}^T(t)Z\bar{x}(t)\end{aligned}$$

이를 이용하여 Lyapunov 함수의 시간 t에 관한 미분을 정리하면, 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt}V \le \xi^T(t)\Phi\xi(t)$$

여기서 $\xi(t) = col\{x(t)\quad y(t)\quad x(t-\tau(t))\}$이다.
따라서 LMI 조건 (4) 이 만족 되면, $\dot{V}(t) \le 0$를 만족한다. 따라서 Lyapunov-Krasovskii의 방법에 따라서 오차 상태 방정식 (3)은 안정하다. ■

3.2 관측기 이득값 설계

이 장에서는 시간 변동 시간 지연이 있는 Neutral 선형 시스템을 관측하기 위한 관측기 이득값 설계를 고려한다. 관측기를 설계하는 방식은 [6]에서 시간 지연이 있는 시스템에 적용한 방식과 유사하다.

관측기 이득값 L을 구하기 위해서 우리는 정리 1을 결과를 이용한다. 정리 1에서 주어진 LMI 조건을 바로 이용할 경우 P_2LC와 P_3LC 의 항들에 의해서 구하고자 하는 이득값 L을 구할 수가 없다. 따라서 우리는 다음의 주어진 정리 2를 이용하고자 한다.

정리 2. 다음의 양한정 행렬 $R, Q, S, Y_1, Y_2, Y_3, Z_1, Z_2, Z_3$ 그리고 P_1과 어떤 적합한 행렬 P_2, P_3이 다음의 선형 행렬 부등식을 만족하면 시스템 (3)은 안정하다.

$$\begin{bmatrix} X_2 + X_2^T & * & * & * & * & * \\ \Psi_1 & -X_3 - X_3^T & * & * & * & * \\ * & P^T\begin{bmatrix} 0 \\ A_d \end{bmatrix} - Y^T & -(1-\dot{\tau}(t))S^{-1} & * & * & * \\ * & P^T\begin{bmatrix} 0 \\ D \end{bmatrix} & 0 & -(1-\dot{g}(t))Q^{-1} & * & * \\ X_2 & X_3 & 0 & 0 & -(1-\dot{g}(t))Q^{-1} & * \\ \tau(t)X_2 & \tau(t)X_3 & 0 & 0 & 0 & -(1-\dot{\tau}(t))S^{-1} \end{bmatrix} < 0. \tag{5}$$

여기서
$\Psi_1 = X_3 - X_2^T + X_1(A_o + A_D) + C^T W^T$이며,
이득값 $L = X_1^{-1}W$이다.

증명) 공간의 제약으로 생략한다. ■

4. 시뮬레이션 및 결과 고찰

이 장에서는 시간 변동 시간 지연을 가지는 선형 neutral 시스템의 관측기 설계 및 오차 상태 방정식의 안정도를 판별한다. 여기서 고려하는 시간 지연을 가지는 선형 시스템은 [7]에서 쓰인 예를 본 논문의 모델에 맞게 수정한 것이다.

$$A=\begin{bmatrix}0.9 & 3\\ -0.6 & -2\end{bmatrix}, A_d=\begin{bmatrix}-0.4 & 1.2\\ 0.2 & -0.3\end{bmatrix},$$
$$D=\begin{bmatrix}-0.3 & 0.3\\ 0.2 & -0.5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & -0.5\end{bmatrix},$$
$\tau(t)=3\sin t, g(t)=3$이다.

행렬 (A,C)는 가관측성을 가짐을 확인할 수 있다. 정리 1과 2의 LMI 조건을 이용하여 다음의 해를 구할 수 있다.

$$X_1=\begin{bmatrix}2954.4 & -720.23\\ -720.23 & 1777.5\end{bmatrix}, X_2=\begin{bmatrix}522.52 & 271.62\\ -24.992 & 503.68\end{bmatrix},$$
$$X_3=\begin{bmatrix}1143.6 & -1585.5\\ 1796.7 & 1260.5\end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix}902.66 & -28146\\ 28681 & 1069.4\end{bmatrix},$$
$$R=\begin{bmatrix}3657.3 & 7619.9\\ -7730.8 & 3304.3\end{bmatrix}.$$

정리 2를 이용하여 구하고자 하는 관측값 이득을 구해보면 다음과 같다.

$$L=\begin{bmatrix}22.3098\\ -84.2314\end{bmatrix}.$$

이제 설계된 관측기를 선형 시스템에 적용면 $e_1(t)$와 $e_2(t)$의 시스템 응답은 그림 1과 같다. 그림에서 나타나듯이 오차는 시간이 지날수록 0에 수렴함을 확인 할 수 있다.

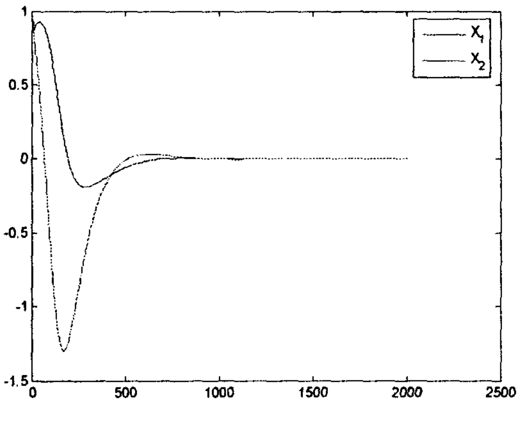

그림 1. 관측기를 적용한 오차 상태 시스템의 시간 응답

Figure 1. Time response of the system

5. 결론

본 논문은 시간 변동 시간 지연을 가지는 선형 neutral 시스템에 관한 관측기 설계에 대해서 논의하였다. 시간 지연을 가지는 시스템의 안정도를 Lyapunov-Krasovskii의 이론을 이용하여 판별하고 이를 바탕으로 시스템의 안정도를 분석하였다. 시간 변동 시간 지연에 대한 안정도 조건을 제시하였다. 선형 행렬 부등식을 이용하여 관측기의 이득값을 설계하며, 오차 상태 방정식의 안정도를 판별하였다. 모의실험을 통해 논문의 결과를 입증하였다.

감사의 글

이 논문은 2007년도 두뇌한국21사업에 의하여 지원되었음

참 고 문 헌

[1] P. Zitek, "Anisochronic state observers for hereditary systems," Int. J. Control, Vol. 42, pp. 581-599, 1998.

[2] M. Hou, P. Zitek, and R. J. Patton, "An observer design for linear time-delay systems," IEEE Trans. Autom. Control, Vol. 47, pp. 121-125, 2002.

[3] Z. Wang, J. Lam, and K. J. burnham, "Stability analysis and observer design for neutral delay systems," IEEE Trans. Autom. Contro, Vol. 47, pp. 478-483, 2002.

[4] M. S. Mahmoud, "Robust control and filtering for time-delay systems," New York.

[5] C. H. Lien and J. D. Chen, "Discrete-delay-independent and discrete -delay-dependent criteria for a class of neutral systems", ASME J. DYn. Syst., Vol 125, pp. 33-41, 2003.

[6] E. Fridman, "New Lyapunov-Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems," Systems & Control letters, Vol 43, pp. 309-319, 2001

[7] P. Park, "A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays", IEEE Trans. Automat. Contr. Vol 44, pp. 876-887, 1999.