Proceedings of KFIS Spring Conference 2007 Vol. 17, No. 1.

관측기 기반 시스템에 대한 강인 디지털 재설계

Robust Digital Redesign for Observer-based System

성화창[1], 주영훈[2], 박진배[1]

[1]서울시 서대문구 연세대학교 전기전자공학과
E-mail: {casfirspear, jbpark}@yonsei.ac.kr

[2]전라북도 군산시 군산대학교 전자정보공학부
E-mail: yhjoo@kunsan.ac.kr

요 약

본 논문은 관측기 기반 시스템에 대한 강인 디지털 재설계 방안을 제안한다. 디지털 재설계란, 기존의 안정화 된 연속시간 플랜트와 이산 시간에서 설계된 디지털 제어기와의 상태 접합 및 안정도 분석을 통해 전체 시스템을 재구성 하는 것을 말한다. 그리고 전 역적 접근을 위한 방안으로서 문제를 볼록 최적화 관점으로 변환 후, 에러가 가질 수 있는 놈의 영역을 최소화 하여 상태 접합을 이루고자 하였다. 본 논문에서는 관측기 기반 시스템에 대한 디지털 재설계를 목표로 하되, 추가적인 파라미터 불확실성을 고려한 강인 디지털 재설계를 구성하게 된다. 파라미터 불확실성은 이산화 과정에서 구조적 형태가 변화하기 때문에, 이를 고려하여 주어진 식을 선형 행렬 부등식 형태로 나타내게 된다. 이 조건들을 통해 디지털 재설계의 상태 접합 및 안정도가 유도 가능하다는 것을 본 논문에서 증명하게 된다.

Key Words : 강인 디지털 재설계, 관측기 기반 시스템, 선형 행렬 부등식

1. 서 론

산업현장에서 많이 사용되는 동적 시스템의 제어에 관한 문제에 있어서 일반적으로 사용되는 모델과 제어기는 대부분 연속 시간으로 표현되어 설계되어 왔다. 그러나 최근 컴퓨터의 발달로 인하여 구현의 용이성, 적용의 유연성 등의 장점을 기반으로 한 디지털 도구의 활용도가 증대되고 있으며, 그 활용 범위 역시 점차 확대되고 있는 추세이다. 제어에 있어서 이와 같은 문제 접근의 경우, 제어기 설계 문제를 기존의 연속시간 방식에서 디지털로 변환하는 과정이 대표적이다.

연속 시간 제어기에 대응되는 디지털 제어기 설계 문제를 디지털 재설계라고 한다. 좀 더 구체적으로, 디지털 재설계는 안정화 된 연속 시간 제어기에 대하여 이에 상응하는 디지털 제어기를 설계하는 것으로 다음 두 조건이 만족해야 한다. 우선 연속 시간 및 이산 시간에서 설계된 시스템 간의 상태 접합이 이루어져야 한다. 두 번째는 재설계된 디지털 시스템의 안정도가 보장되어야 한다는 사실이다. 이와 같은 문제는 Kuo 에 의해 처음으로 제안되었으며 [1], Shieh등을 통해 많은 발전을 이루었다 [6-8]. 그리고 Lee는 기존의 방법이 가지고 있던 지역적 상태 접합이라는 한계점을 전 역적 접근 방법으로 풀어낸 새로운 기법을 제안 하였다 [2-3]. 이 방법의 경우 정합되어야 할 두 개의 선형 작용소의 놈(norm)을 최소화하는 볼록 최적화 문제로 간주하여 디지털 제어기를 설계하게 된다. 이 기법은 관측기 기반 시스템에 대해서도 유사한 방법론으로 접근 되었으며, 그 효율성을 입증 받았다 [4].

강인 디지털 재설계 기법 연구도 이루어졌다 [5], [8-10]. 대부분의 산업용 플랜트는 불확실성을 내포하고 있으며, 이러한 불확실성은 센서 잡음, 파라미터의 변화 등을 원인으로 발생된다. Shieh은 불확실성이 포함된 시스템 에서의 디지털 재설계 기법들을 제안하였으나 [6], 이 논문은 다음의 몇 가지 한계점을 내포하고 있다. 우선, 전 역적 접근이 아닌 지역적 상태 접합으로 인하여 한정된 샘플링 시간에서만 기법이 적용된다. 그리고 전체 시스템의 안정도 판별이 아닌 연속 시간에서의 안정도 판별만이 이루어졌다는 것이다. 또한 제어 이득 행렬에 불확실성이 포함되어 있기 때문에 시스템 궤적이 일정하지 않다. 관측기 기반 시스템에 대한 재설계 문제도 고려했지만, 에러 상태 행렬에 대한 고려는 하지 않았다 [8].

이와 같은 불확실성의 문제 및 제어 이득 선정에서의 문제를 해결하기 위해, 본 논문에서는 쌍선형과 역 쌍선형 기법 [7]의 도입을 통해 문제가 되는 식을 이산화 시킴으로써 전 역적 접근의 디지털 재설계

방안을 이루어 냈다. 또한, 해당 문제를 풀기 위해 선형 행렬 부등식을 활용함으로써 전체 시스템의 상태 접합 및 안정도조건을 위한 디지털 제어 이득 행렬을 쉽게 구할 수 있게 된다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절은 관측기 기반 시스템에 대해 간략하게 소개한다. 3절에서는 불확실성이 포함된 시스템에서의 디지털 재설계 기법을 제안한다. 4장에서 결론을 제시하게 된다.

2. 이론적 배경

2.1 연속시간 관측기 기반 시스템

다음과 같은 불확실성이 포함된 연속시간 선형 시불변(LTI) 시스템을 가정하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= (A+\Delta A)x_c(t) + (B+\Delta B)u_c(t) \\ y_c(t) &= Cx_c(t) \end{aligned} \tag{1}$$

여기서, $x_c(t) \in R^n$ 은 상태 벡터 이며, $y_c(t) \in R^p$ 이다. 그리고 첨자 'c' 는 연속 시간 제어 신호를 의미하며, 'd' 는 디지털 제어 신호를 의미한다. 그리고 A 와 B 는 일반 상태 벡터를 의미하며, ΔA 와 ΔB 는 적당한 크기를 갖는 불확실성을 나타내는 벡터이다. 본 논문 전체를 통틀어 우리는 모든 상태들이 직접적으로 측정되지는 않지만, (A, B)는 제어 가능하고 (A, C)는 관측 가능하다고 가정하게 된다. 또한 우리는 불확실성을 나타내는 벡터 $(\Delta A, \Delta B)$를 다음과 같이 나타낼 수 있다고 가정한다.

가정 1: 불확실성을 나타내는 두 식, ΔA 와 ΔB 는 놈(norm) 바운드 되어 있으며 다음의 구조로 이루어져 있다.

$$[\Delta A \;\; \Delta B] = DF(t)[E_1 \;\; E_2] \tag{2}$$

여기서 D, E_1, 와 E_2 는 불확실성을 나타내는, 충분한 공간을 가진 결정된 행렬이며, $F(t)$ 는 불확실성을 내포한 Lebesque-measurable 값으로 $F^T(t)F(t) \le I$ 를 만족하게 된다. 상태 측정을 위한 관측기는 다음과 같이 나타내어진다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}_c(t) + Bu_c(t) + L_c(y_c(t) - \hat{y}_c(t)) \\ y_c(t) &= C\hat{x}_c(t) \end{aligned} \tag{3}$$

여기서, $\hat{x}_c(t) \in R^n$ 은 $x_c(t)$의 측정이며, $L_c(t)$는 관측기 이득 값이다. 연속 시간 제어 이득 K_c를 갖는 제어기 $u_c(t) = K_c\hat{x}(t)$를 설계하게 되고, 그때 해당 에러 벡터가 $e_c(t) = x_c(t) - \hat{x}_c(t)$로 나타날 때, 연속시간 폐루프는 다음과 같다.

$$\dot{\chi}_c(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_c(t)^T \\ \dot{e}_c(t)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \chi_c(t) \tag{4}$$

여기서, 각 파라미터 $\phi_{11} = (A+\Delta A) + (B+\Delta B)K_c$, $\phi_{12} = -(B+\Delta B)K_c$, $\phi_{21} = \Delta A + \Delta BK_c$ 그리고 $\phi_{22} = A - \Delta BK_c - L_cC$ 이다. 식 (4)에 대한 이산화를 수행하면 다음과 같다.

$$\chi_c(kT+T) = \begin{bmatrix} \widehat{\phi_{11}} & \widehat{\phi_{12}} \\ \widehat{\phi_{21}} & \widehat{\phi_{22}} \end{bmatrix} \chi_c(kT) = \Phi\chi_c(kT) \tag{5}$$

여기서 블록 행렬 Φ는 다음과 같이 구성된다.

$$\widehat{\phi_{11}} = e^{\phi_{11}T}, \quad \widehat{\phi_{12}} = -\int_0^T e^{\phi_{11}(T-\tau)}\phi_{12}e^{\phi_{22}\tau}d\tau,$$

$$\widehat{\phi_{22}} = e^{\phi_{22}T}, \quad \widehat{\phi_{21}} = \int_0^T e^{\phi_{22}(T-\tau)}\phi_{21}e^{\phi_{11}\tau}d\tau.$$

2.2 디지털 관측기 기반 시스템

디지털 시스템은 다음과 같이 구성된다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_d(t) &= (A+\Delta A)x_d(t) + (B+\Delta B)u_d(t) \\ y_d(t) &= Cx_d(t) \end{aligned} \tag{6}$$

여기서 $u_d(t) = u_d(kT)$ 이며 $[kT, kT+T)$에서 조각 상수 함수이다. 식 (6)에 대한 솔루션은

$$\begin{aligned} \dot{x}_d(kT+T) &= (G+\Delta G)x_d(kT) + (H+\Delta H)u_d(kT) \\ y_d(kT) &= Cx_d(kT) \end{aligned} \tag{7}$$

여기서 $[\Delta G \;\; \Delta H] = \Upsilon F(t)[\varepsilon_1 \;\; \varepsilon_2]$로 나타나며, 각각은 $G = e^{AT}$, $H = (G-I)A^{-1}B$,

$\Delta G = (1/2)(G-I)A^{-1}\Delta A(G+I)$,

$\Delta H = (1/2)(G-I)A^{-1}(2\Delta B + \Delta AH)$,

$\Upsilon = (1/2)(G-I)A^{-1}D$, $\varepsilon_1 = E_1(G+I)$,

$\varepsilon_2 = (2E_2 + E_1H)$ 으로 나타내어진다. 시스템 (7)을 위한 이산 관측기를 설계하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{x}_d(kT) &= G_o\hat{x}_d(kT-T) + H_ou_d(kT-T) \\ &\quad + L_d(y_d(kT-T) + y_d(kT)) \\ \hat{y}_d(kT) &= C\hat{x}_d(kT) \end{aligned} \tag{8}$$

여기서 G_o, H_o 그리고 L_d 는 이산 관측 행렬이다. 에러 함수를 $e_d(kT) = x_d(kT) - \hat{x}_d(kT)$로 정의하고 (7)로부터 (8)을 빼면 $e_d(kT+T)$가 정의된다.

3. 디지털 재설계

디지털 재설계 기법은 선형 시스템을 위한 디지털 제어기를 효율적으로 설계할 수 있는 기법으로서, 연속 시간 시스템과 이산 시간 시스템의 응답 특성을 정합함으로써 미리 설계된 연속 시간 제어기를 디지털 제어기로 변환한다. 기존의 관측기 기반 디지털 재설계 문제에 있어서 대부분은 상태 예측 에러를 고려한 것이 아니라, 제로 상태 예측 에러만을 고려하였다. 그럼으로써, 관측기 설계에 따른 에러의 동작을 정확히 고려하지 않은 결과를 낳게 되며, 이는 전체 재설계 문제에 있어서 큰 에러로 작용할 수 있다 [4]. 본 논문에서는 이런 문제점을 해결하기 위하여 앞에서 구한 상태 예측 에러 $e_d(kT+T)$를 고려하여 재설계 문제를 재구성하게 된다. 우선 다음과 같은 디지털

제어기를 설계하게 된다.

$$u_d(kT) = K_d\hat{x_d}(kT) + Jy_d(kT) \quad (9)$$

제어기 (11)을 이용한 디지털 폐루프 시스템은

$$\dot{\chi}_d(kT+T) = \left(\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{bmatrix} T\right)\chi_d(kT) \quad (10)$$

이다. 여기서 식 (12)를 구성하는 각 파라미터는

$\sigma_{11} = (G+\Delta G) + (H+\Delta H)(K_d + JC)$,

$\sigma_{12} = -(H+\Delta H)K_d$,

$\sigma_{21} = (I - L_d C)(\Delta G + \Delta H K_d + JC)$,

$\sigma_{22} = G - L_d C(I+G) - (I - L_d C)\Delta H K_d$ 이다. 디지털 재설계 문제는 1) 식 (5)와 식 (11)간의 상태 접합 2) 제어기 (11)을 통한 (6)의 안정화 문제로 재구성 된다. 효율적인 식 전개를 위해 다음과 같은

보조정리 1[9]: 실수 행렬 $\Lambda_1 = \Lambda_1^T$, Λ_2, $\Lambda_3(t)$와 Λ_4 는 적당한 크기를 갖고 다음 부등식에서,

$$\Lambda_1 + \Lambda_2\Lambda_3(t)\Lambda_4 + \Lambda_4^T\Lambda_3^T(t)\Lambda_2^T < 0$$

여기서 $\Lambda_3(t)^T\Lambda_3(t) \le I$ 를 만족한다면

$$\Lambda_1 + \begin{bmatrix}\epsilon^{-1}\Lambda_4\\ \epsilon\Lambda_2^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\epsilon^{-1}\Lambda_4\\ \epsilon\Lambda_2^T\end{bmatrix} < 0$$

가 어떤 $\epsilon > 0$에서 성립한다.

제안 1: $\chi_c(kT) = \chi_d(kT) := \chi(kT)$을 가정하자. 만약 K_d가 존재한다면 어떤 $\hat{\gamma} > 0$에 대하여

$$\| \hat{\phi}_{11} - \sigma_{11} \| \le \hat{\gamma}_1,\ \| \hat{\phi}_{12} - \sigma_{12} \| \le \hat{\gamma}_1 \quad (11)$$

$$\| \hat{\phi}_{21} - \sigma_{21} \| \le \hat{\gamma}_2,\ \| \hat{\phi}_{22} - \sigma_{22} \| \le \hat{\gamma}_2 \quad (12)$$

가 성립한다.

증명: (5)에서 (10)을 뺀 식에 놈을 취하게 되면,

$$\| \chi_c(kT+T) - \chi_d(kT+T) \| \le \left\| \begin{bmatrix}\hat{\phi}_{11} - \sigma_{11} & \hat{\phi}_{12} - \sigma_{12}\\ \hat{\phi}_{21} - \sigma_{21} & \hat{\phi}_{22} - \sigma_{12}\end{bmatrix} \right\| \| \chi_d(kT) \|$$

이 성립하게 된다. $\hat{\gamma} > 0$에 대하여 (11)과 (12)과 같이 각각의 놈으로써 정리 될 수 있다.

제안 2: 어떤 상수 $\eta > 0$에 대하여

$$\| x_d(t) \| \le \eta \| \chi_d(kT) \| \quad (13)$$

가 성립하면 디지털 시스템 (6)은 안정하다.

증명: 식 (6)의 솔루션은 다음과 같다.

$$x_d(t) = x_d(kT) + \int_{kT}^{t} (A+\Delta A)x_d(\tau) + (B+\Delta B) \times ((K_d + JC)x_d(kT) - K_d e_d(kT))d\tau$$

여기서 $t \in [kT, kT+T)$이다. 양변에 놈을 취하면,

$$\begin{aligned} \| x_d(t) \| \le\ & \| x_d(kT) \| + \int_{kT}^{t} \| (A+\Delta A) \| \\ & \times \| x_d(\tau) \| + \| (B+\Delta B)(K_d + JC) \| \\ & \times \| x_d(kT) \| d\tau \\ & + \int_{kT}^{T} \| K_d \| \ \| e_d(kT) \| d\tau \end{aligned}$$

가정 1에 의하여, 위의 식은

$$\begin{aligned} \| x_d(t) \| \le\ & (1 + T(\| B \| \ \| K_d + JC \| + \| D \| \\ & \times \| E_2(K_d + JC) \|)) \| x_d(kT) \| \\ & \times T \| K_d \| \ \| e_d(kT) \| \\ & + \int_{kT}^{kT+T} (\| A \| + \| D \| \ \| E_1 \|) \\ & \times \| x_d(kT) \| d\tau. \end{aligned}$$

따라서, Gronwall-Bellman 부등식에 의하여 $\| x_d(kT) \|$ 에 곱해지는 term이 η보다 작다면 식 (13)은 성립한다. ∎

이로써 디지털 재설계 문제는 다음으로 구체화된다.

정리 1 : 만약 양 한정 대칭 행렬 Q, 반 양 한정 대칭 행렬 O, 상수 행렬 F 가 존재 한다면 식 (11)과 (12)는 다음 GEVP 문제 (14)와 (15) 로 변환될 수 있다.

GEVP1: Minimize γ_1 subject to Q_1, F, O

$$\begin{bmatrix} -\gamma Q_1 & * & * & * \\ \hat{G}Q_1 - GQ_1 + H(K_d + JC) & \epsilon\tilde{D} - I & * & * \\ \hat{\varepsilon} & 0 & -\epsilon & * \\ -\varepsilon_1 - \varepsilon_2(K_d + JC) & 0 & 0 & -\epsilon \end{bmatrix} < 0 \quad (14)$$

GEVP2: Minimize γ_2 subject to Q_2, F, N

$$\begin{bmatrix} -\gamma Q_2 & * & * & * \\ \tilde{G}Q_2 - GQ_2 + L_d C(I+G)Q_2 & \epsilon(-\tilde{D} + (I - L_d C)D) & * & * \\ \tilde{\varepsilon}\, Q_2 & 0 & -\epsilon & 0 \\ \varepsilon_2 F & 0 & 0 & -\epsilon \end{bmatrix} < 0. \quad (15)$$

증명: 식 (11) 과 (12)를 풀게 되면 상태 접합에 대한 총 4개의 LMI가 유추된다. 이를 풀기 위해 가정 1 및 보조 정리 1을 이용하게 되며, 기본 적인 전개는 다음의 변환으로 이루어진다.

$$(\hat{\phi}_{11}-\sigma_{11})(\hat{\phi}_{11}-\sigma_{11})^T < \gamma_1 P_1 \qquad (16)$$

식 (16)은 Schur complement을 통해 행렬 형태로 변환 가능하며, 이 후 과정 및 기타 LMI는 지면 관계상 생략한다. (논문 [1], [4], [10]를 참고하기 바란다.)

참고 1: 다음의 Lyapunov 함수를 고려해 보자.

$$V(\chi_d(kT)) = \chi_d(kT)^T P \chi_d(kT) \qquad (17)$$

여기서 P는 양 한정 대칭 행렬이며, 안정도 조건을 위한 $\Delta V(\chi_d(kT))$는 다음과 같다.

$$((G+\Delta G)+(H+\Delta H)K_d)^T P_1((G+\Delta G)$$
$$+(H+\Delta H)(K_d+JC)) - P_1 < 0 \quad (18)$$

Schur complement에 의하여 식 (18)은

$$\begin{bmatrix} -P_1 & * \\ (G+\Delta G)+(H+\Delta H)(K_d+JC) & -P_1^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

로 변형 가능하다. 여기서, $diag[P_1^{-1}\ I]$로 양변에 변환을 시켜준 후, 가정 및 보조 정리를 이용하게 되면, 논문에서 언급된 식을 통해 안정도 조건으로 귀결 된다.

참고 2 (분리 원리) [4]: LMI 식 (14)와 (15)에서 볼 수 있듯이, 둘은 다른 GEVP를 기반으로 하고 있으며, 최소화 문제에 있어서도 (14)의 경우 Q_1, F, 그리고 O을 바탕으로 하고 있고, (15)의 경우는 Q_2, L_d 그리고 N 을 기반으로 하고 있다. 서로 다른 두 개의 LMI는 독립적으로 작용하게 되며, 이에 따라 본 논문에서도가 각각 다르게 설정하여 전체 문제를 풀게 되었다.

참고 3: 제안된 기법은 시스템이 포함하고 있는 파라미터 불확실성에 대한 직접적이면서도 보다 일반적인 해석으로 접근하였기 때문에, 선형에서의 제어뿐만이 아니라 다양한 분야에서의 활용이 가능하다. 특히 퍼지, H_∞ 제어 등을 이용한 비선형 시스템에서의 확장은 매우 용이하다.

4. 결 론

본 논문에서는 관측기 기반 시스템에 대한 강인 디지털 재설계 방안을 제안하였다. 디지털 재설계를 위하여 안정화된 연속시간 시스템과 이산 시간에서 설계된 디지털 제어기와 두 가지 조건 – 상태 접합 및 안정도 분석을 수행하였다. 관측기 기반 시스템에서 시스템을 설계함으로써 기존의 상태 피드백 시스템에서 가지는 상태 추정 오차를 좀 더 완화시키고자 하였다. 또한 시스템에 존재하는 불확실성을 고려함으로써 시스템에 강인성을 부여하였다. 이산화시 발생하는 불확실성의 구조적 변화에 대해서는 쌍선형 및 역 쌍선형 정리를 이용하여 보다 일반적인 전개를 가능케 하였다. 전체 주어진 식은 선형 행렬 부등식 형태로 나타내어, 디지털 제어 이득을 구할 수 있는 알고리즘을 제시하였다.

감사의 글 : 이 논문은 2007년도 두뇌한국21사업에 의하여 지원되었음

참 고 문 헌

[1] KUO, B. C. "Digital control systems", Saunders College publishing, 1992, 2nd edn.
[2] H. J. Lee, J. B. Park, and G. Chen, ``Robust fuzzy control of nonlinear systems with parameteric uncertainties," IEEE Trans. Fuzzy Syst., vol. 9, pp. 369–379, Apr. 2001.
[3] H. J. Lee, H. B. Kim, Y. H. Joo, W. Chang, and J. B. Park, ``A new intelligent digital redesign for T--S fuzzy systems: Global approach," IEEE Trans. Fuzzy Syst., vol. 12, pp. 274–284, Apr. 2004.
[4] H. J. Lee, J. B. Park, and Y. H. Joo, ``An efficient observer-based sampled-data control: digital redesign approach," IEEE Trans. Circuits Syst. I, vol. 50, no. 12, pp. 1595–1601, Dec. 2003.
[5] W. Chang, J. B. Park, H. J. LEE and Y.H. Joo, "LMI approach to digital redesign of linear time-invariant systems", IEE Proc-Control Theory, Appl., Vol. 149, No. 4, July 2002.
[6] L. S. Shieh, J. Gu, and J. W. Sunke, "Model conversions of uncertain linear systems using the bilinear and inverse-bilinear approximation method", Proc. 36th Midwest Symposium, vol. 1, pp. 514–517, Aug. 1993.
[7] L. S. Shieh, X. M. ZHAO, and J. W. SUNKE, "Hybrid state-space self-tuning control using dual-rate sampling". IEE Proc, Control Theory Appl, 1991, 138, (1), pp. 50–58.
[8] L. S. Shieh, W. M. Wang, and J. B. Zheng ``Robust control of sampled-data uncertain systems using digitally redesigned observer-based controller," Int. J. Contr. vol. 66, no. 1, pp. 43–64, 1997.
[9] L. Xie, ``Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainties," Int. J. Contr. vol. 63, no. 4, pp. 741–750, 1996.
[10] 성화창, 주영훈, 박진배, ``불확실성을 갖는 비선형 시스템의 강인한 지능형 디지털 재설계," 퍼지 및 지능 시스템학회 논문지, vol. 16, no. 2, pp. 138–143, Apr. 2006.