Proceedings of KFIS Spring Conference 2007 Vol. 17, No. 1.

비선형 상호 결합 시스템의 퍼지 출력 궤한 제어기 설계 : 선형 행렬 부등식 접근

Fuzzy Output Feedback Controller for Nonlinear Interconnected Systems : An LMI Approach

구근범[1], 주영훈[2], 박진배[1]

[1] 연세대학교 전기전자공학과
E-mail: {milbam, jbpark}@control.yonsei.ac..kr
[2] 군산대학교 전기전자공학부
E-mail: yhjoo@kunsan.ac.kr

요 약

본 논문에서는 비선형 상호 결합 시스템의 출력 궤환 제어기 설계에 대해서 연구한다. 먼저 퍼지 모델 기법을 이용하여 비선형 상호 연결된 시스템을 Takagi-Sugeno (T-S) 퍼지 모델로 모델링한다. 그 각각의 하위 시스템에 대한 출력 궤환 제어기를 동적 병렬 분산 보상 (DPDC) 기법을 이용하여 퍼지 출력 궤환 제어기로 설계한다. 하위 시스템들의 평형점이 안정화 되는 선형 행렬 부등식 (LMI)를 구하고, 그 부등식을 만족하는 값들로부터 하위 시스템의 제어기 이득을 구한다.

Key Words : 비선형 상호 결합 시스템, 퍼지 출력 궤한 제어, 선형행렬 부등식, 퍼지 모델링

1. 서 론

상호 결합 시스템이란 각 시스템의 상태변수가 다른 시스템에 상태변수에 영향을 주는 시스템들을 하나의 시스템으로 보는 것을 의미한다. 이때 상호 결합 시스템 속에 있는 각각의 시스템을 하위 시스템이라 부른다. 상호 결합 시스템은 하위 시스템들이 서로에게 영향을 줄 때, 그 시스템들을 해석하기 위해 사용하여도 용이하지만 복잡한 하나의 시스템을 몇 개의 간단한 시스템으로 나눠서 계산이나 제어 등을 할 때에도 사용될 수 있다. 즉, 하나의 시스템을 몇 개의 하위 시스템으로 이뤄졌다 상정하여 해석할 수 도 있다. 이러한 상호 결합 시스템에 대한 제어는 Yan이나 Wang에 의해 활발히 연구되어 왔다 [1-4].

동적 출력 궤한 제어기란 시스템을 제어할 때 상태 변수를 궤한하는 것이 아니라 시스템의 출력을 궤한하는 것을 말한다. 특히 출력을 궤한할 때 이득값에 동적인 변화를 주어 더욱 일반적인 제어를 하는 것을 동적 출력 궤한 제어라 한다. 동적 출력 궤한 제어기는 기존의 상태 변수 제어기에 비해 하드웨어로 쉽게 구성할 수 있다는 점과 정적 출력 궤한 제어기에 비해 훨씬 넓은 범위에서 제어가 가능하다는 장점이 있다. 이러한 동적 출력 궤한 제어기에 대한 연구 역시 활발히 연구되어 왔다 [5-6].

상호 결합 시스템을 제어하는 연구에 관해서도 여러 연구자에 의해 진행되었다. 특히 Tao [3]는 비선형 상호 결합 시스템을 제어하는 것에 있어 퍼지 모델링 후, 병렬 분산 보상 (PDC) 기법을 사용하여 제어기를 설계하였다. 또한 Yan [1]은 비선형 상호 결합 시스템에 정적 출력 궤한 제어기를 설계하였다.

본 논문에서는 상호 결합 시스템에 동적 출력 궤한 제어기를 사용하여서 기존에 연구되었던 상호 결합 시스템에 정적 출력 궤한 제어기를 사용한 경우보다 더욱 일반적인 방법을 제안한다. 더욱이 상호 결합 시스템을 비선형으로 두어 이를 T-S 퍼지 모델로 모델링한 후, 동적 병렬 분상 보상 (DPDC) 기법 [7]을 이용하여 동적 출력 궤한 제어기를 설계한다. 이후. 제어기의 이득값을 구하기 위한 선형 행렬 부등식 (LMI) 을 유도한다. 이를 통해 비선형 상호 결합 시스템에 대한 동적 출력 궤한 제어기를 설계하고 예제를 이용해 타당성을 검증한다.

2. 상호 결합 시스템의 T-S퍼지 모델링과 퍼지 동적 출력 궤한 제어기 설계

비선형 상호 결합 시스템이 N개의 하위 시스템을 가지고 있다고 가정한다. 그 중 i 번째 시스템은 다음과 같이 나타낼 수 있다:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_i, u_i) + h_i(t, x) \tag{1}$$

여기서 $f_i(\bullet)$는 시간변수와 i 번째 하위 시스템의 상태변수, 입력으로만 이뤄진 비선형 함수이고, $h_i(\bullet)$는 시간변수와 전체 시스템의 상태변수로 이뤄진 비선형 상호 결합 함수이다. x_i와 u_i는 각각 i 번째 하위 시스템의 상태변수와 입력이고, $x = [x_1^T \ x_2^T \ \cdots \ x_N^T]^T$ 는 전체 시스템의 상태변수이다.

주어진 비선형 상호 결합 시스템은 다음과 같은 규칙으로 T-S퍼지 모델링을 하게 된다.

Plant Rule k:

$$\begin{aligned} &IF\ z_{i1}\ is\ F_{i1}^k\ , \dots, \text{and}\ z_{ip}\ is\ F_{ip}^k, \\ &THEN \begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_{ik}x_i(t) + B_{ik}u_i(t) + h_i(t,x) \\ y_i(t) = C_{ik}x_i(t) \end{cases} \\ &\qquad\qquad (1 \le k \le L) \end{aligned} \tag{2}$$

여기서 F_{i1}^k는 k 번째 규칙의 소속함수이고, 각 규칙마다 p 개의 소속함수를 가지고 있다. L 개의 퍼지 규칙을 가지는 비선형 상호 결합 시스템의 T-S 퍼지 모델을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \sum_{k=1}^{L} \mu_k(z_i(t))(A_{ik}x_i(t) + B_{ik}u_i(k) + h_i(t,x)), \\ y_i(t) &= \sum_{k=1}^{L} \mu_k(z_i(t))(C_{ik}x_i(t)). \end{aligned} \tag{3}$$

위의 퍼지 시스템을 제어하기 위해서 동적 병렬 분산 보상(DPDC)를 이용한다. DPDC를 이용하여 다음과 같은 제어기의 퍼지 규칙을 생성한다:

Controller Rule km:

$$\begin{aligned} &IF\ z_{i1}\ is\ F_{i1}^k\ \text{and}\ z_{i1}\ is\ F_{i1}^m\ , \dots, \\ &\quad \text{and}\ z_{ip}\ is\ F_{ip}^k\ \text{and}\ z_{ip}\ is\ F_{ip}^m\ , \\ &THEN \begin{cases} u_i(t) = C_{ik}^c x_i^c(t) \\ \dot{x}_i^c(t) = A_{ikm}^c x_i(t) + B_{ik}^c y_i(t) \end{cases} \\ &\qquad\qquad (1 \le k \le L,\ 1 \le m \le L) \end{aligned} \tag{4}$$

DPDC를 이용으로 퍼지 규칙의 전제부는 제어할 시스템의 퍼지 규칙의 제어부와 동일하게 된다. 출력 궤한 제어에는 동적 모델을 부여한다. A_{ikm}^c 와 B_{ik}^c, C_{ik}^c는 km 번째 퍼지 규칙일 때 제어기의 이득값이 된다. 결국 궤한된 퍼지 규칙에 의거하여 동적 출력 궤환 제어기를 구한다.

$$\begin{aligned} u_i(t) &= \sum_{k=1}^{L} \mu_k(z_i(t))(C_{ik}^c x_i^c(t)), \\ \dot{x}_i^c(t) &= \sum_{k=1}^{L}\sum_{m=1}^{L} \mu_k(z_i(t))\mu_m(z_i(t))(A_{ikm}^c x_i^c(t) \\ &\quad + B_{ik}^c(t) y_i(t)). \end{aligned} \tag{5}$$

식(3)과 (5)으로부터 동적 출력 궤한 제어가 된 비선형 상호 결합 시스템의 모델을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_i(t) \\ \dot{x}_i^c(t) \end{bmatrix} &= \sum_{k=1}^{L}\sum_{m=1}^{L} \mu_k(z_i(t))\mu_m(z_i(t)) \\ &\quad \times \left(\begin{bmatrix} A_{ik} & B_{ik}C_{im}^c \\ B_{ik}^c C_{im} & A_{ikm}^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i(t) \\ x_i^c(t) \end{bmatrix} + h_i(t,x) \right) \\ u_i(t) &= \sum_{k=1}^{L} \mu_k(z_i(t))(C_{ik}^c x_i^c(t)) \\ y_i(t) &= \sum_{k=1}^{L} \mu_k(z_i(t))(C_{ik}x_i(t)). \end{aligned} \tag{6}$$

3. 제어 이득 값을 구하기 위한 선형 행렬 부등식

동적 출력 궤한 제어기가 달린 비선형 상호 결합 시스템의 안정성을 위한 제어기 이득값을 구하기 위해서 선형 행렬 부등식(LMI)을 유도한다. LMI를 유도하기 위해서 먼저 Lyapunov 함수을 다음과 같이 정한다:

$$V(t,x) = \sum_{i=1}^{N} V_i(t, x_i) \tag{7}$$

$$V_i(t, x_i) = \begin{bmatrix} x_i(t) \\ x_i^c(t) \end{bmatrix}^T P_i \begin{bmatrix} x_i(t) \\ x_i^c(t) \end{bmatrix}. \qquad (1 \le i \le N) \tag{8}$$

전체 Lyapunov 함수을 i 번째 하위 시스템의 Lyapunov 함수의 합으로 나타낸다. 여기서 $P_i > 0$ $(1 \le i \le N)$를 항상 만족하게 된다.

가정 1 비선형 상호 결합 시스템에서 상호 결합 함수 부분 $h_i(t,x)$을 다음과 같이 가정한다:

$$\| h_i(t,x) \| \le \sum_{i=1}^{N} \sqrt{H_{ij}^T H_{ij}}\, x_i. \tag{9}$$

보조 정리 1 [8] 어떤 상수 $\epsilon > 0$와 적합한 차원을 가지는 어떤 행렬 X와 Y가 존재할 때 다음 부등식이 성립한다:

$$X^T Y + Y^T X \le \epsilon X^T X + \frac{1}{\epsilon} Y^T Y \tag{10}$$

식(7)을 미분한 식은 위의 가정1과 보조정리1을 통해서 다음과 같이 정리된다:

$$\begin{aligned}
&\dot{V}(t,x)\\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{L}\sum_{m=1}^{L} \mu_k(z_i(t))\mu_m(z_i(t)) \begin{bmatrix} x_i(t) \\ x_i^c(t) \end{bmatrix}^T \\
&\bullet\ ((A_{ikm}^{cl})^T P_i + P_i A_{ikm}^{cl} + P_i^2 + G_i^T G_i) \begin{bmatrix} x_i(t) \\ x_i^c(t) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{11}$$

여기서

$$A_{ikm}^{cl} = \begin{bmatrix} A_{ik} & B_{ik} C_{im}^c \\ B_{ik}^c C_{im} & A_{ikm}^c \end{bmatrix}$$

$$G_i^T = \left[H_{1i}^T, H_{2i}^T, \ldots\ldots, H_{\ni}^T \right].$$

Lyapunov 함수를 미분하여 안정될 조건을 찾는 LMI를 구하기 위해서 다음의 가정들과 보조정리를 사용한다.

가정 2 [6] 양한정 행렬 P_i를 다음과 같이 정한다.

$$P_i = \begin{bmatrix} I & I \\ I & P_i^{22} \end{bmatrix} > 0 ,$$

$$P_i^{-1} = \begin{bmatrix} Q_i^{11} & (Q_i^{21})^T \\ Q_i^{21} & Q_i^{22} \end{bmatrix} > 0 . \tag{12}$$

보조 정리 2 [9] 적합한 차원의 어떤 상수 대칭 행렬 N, O, L이 주어졌을 때 다음의 두 개의 부등식은 서로 필요충분조건이 된다.:

$$O > 0, \qquad N + L^T O L < 0 \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix} N & L^T \\ L & -O^{-1} \end{bmatrix} < 0 \text{ or } \begin{bmatrix} -O^{-1} & L^T \\ L & N \end{bmatrix} < 0 . \tag{14}$$

정리 1 다음의 부등식이 성립하게 되면 동적 출력 궤한 제어기가 있는 비선형 상호 결합 시스템이 점근적으로 안정된다:

$$\Pi_i^T ((A_{ikm}^{cl})^T P_i + P_i A_{ikm}^{cl} + P_i^2 + G_i^T G_i) \Pi_i < 0 \tag{15}$$

여기서

$$\Pi_i = \begin{bmatrix} Q_i^{11} & I \\ Q_i^{21} & 0 \end{bmatrix}.$$

정리 2 Q_i^{11}, Q_i^{21}, M_{im},N_{ikm}, B_{ik}^c를 변수로 가지는 다음의 LMI가 만족되면 정리 1은 항상 성립한다:

$$\begin{bmatrix} Q_i^{11} & I \\ I & I \end{bmatrix} > 0 , \tag{16}$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{ik} & * & * & * \\ \Xi_{ikm} & \Gamma_{ikm} & * & * \\ G_i Q_i^{11} & G_i & -I & * \\ G_i Q_i^{21} & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 . \tag{17}$$

$$(1 \le i \le N,\ 1 \le k \le L,\ 1 \le m \le L)$$

여기서

$$\Psi_{ik} = A_{ik} Q_i^{11} + (Q_i^{11})^T A_{ik}^T + B_{ik} M_{im} + M_{im}^T B_{ik}^T + I$$

$$\Xi_{ikm} = A_{ik} + A_{ik}^T + N_{ikm} + N_{ikm}^T + I$$

$$\Gamma_{ikm} = A_{ik} + A_{ik}^T + B_{ik}^c C_{im} + C_{im}^T (B_{ik}^c)^T + 2I$$

$$M_{im} = C_{im}^c Q_i^{21}$$

$$N_{ikm} = (A_{ik} + B_{ik}^c C_{im}) Q_i^{11} + (A_{ikm}^c + B_{ik} C_{im}^c) Q_i^{21}$$

$*$는 행렬에서의 전치 요소를 의미한다. 또한 가정2에서의 조건으로부터 다음의 식이 만족되어야 한다.

$$Q_i^{11} + Q_i^{21} = I. \tag{18}$$

증명 정리 1이 만족되기 위해서는 식(12)와 (15)가 만족되어야 한다. 먼저 식(12)가 만족되는 식을 찾기 위해서 다음의 과정을 거친다.

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} Q_i^{11} & I \\ Q_i^{21} & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & I \\ I & P_i^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_i^{11} & I \\ Q_i^{21} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} Q_i^{11} & (Q_i^{21})^T \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & I \\ I & P_i^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_i^{11} & I \\ Q_i^{21} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} Q_i^{11} & I \\ I & I \end{bmatrix} > 0 .
\end{aligned}$$

또한 식(15)로부터 식(17)이 유도되는 과정은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
&\Pi_i^T((A^{cl}_{ikm})^T P_i + P_i A^{cl}_{ikm} + P_i^2 + G_i^T G_i)\Pi_i \\
&= (A^{cl}_{ikm}\Pi_i)^T P_i\Pi_i + (P_i\Pi_i)^T A^{cl}_{ikm}\Pi_i \\
&\quad + (P_i\Pi_i)^T P_i\Pi_i + (G_i\Pi_i)^T G_i\Pi_i \\
&= H_{ikm} + H^T_{ikm} + \begin{bmatrix} I & I \\ I & 2I \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} G_iQ_i^{11} & G_i \\ G_iQ_i^{21} & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} G_iQ_i^{11} & G_i \\ G_iQ_i^{21} & 0 \end{bmatrix}. \qquad (19)
\end{aligned}
$$

여기서

$$
H_{ikm} = \begin{bmatrix} A_{ik}Q_i^{11} + B_{ik}M_{im} & A_{ik} \\ N_{ikm} & A + B^c_{ik}C_{im} \end{bmatrix}
$$

위의 식(19)에 보조정리2 를 사용하여 정리하면 식(17)을 얻을 수 있다. ■

LMI를 통해서 구한 값들로부터 동적 출력 궤한 제어기의 이득값 B^c_{ik}는 바로 구할 수 있고, A^c_{ikm}와 C^c_{im}는 다음 식으로부터 구할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
A^c_{ikm} &= (N_{ikm} - B_{ik}M_{im} - (A_{ik} + B^c_{ik}C_{im})Q_i^{11}) \\
&\quad \times (Q_i^{21})^{-1}. \qquad (19)
\end{aligned}
$$

$$
C^c_{im} = M_{im}(Q_i^{21})^{-1}. \qquad (20)
$$

4. 결론

본 논문에서는 비선형 상호 결합 시스템의 동적 출력 궤한 제어기를 소개하였다. 제어기 설계 문제를 제약 조건이 있는 선형 행렬 부등식의 형태로 표현하였다. 선형 행렬 부등식의 해가 존재할 경우 동적 출력 궤한 제어기의 이득값을 구할 수 있고, 그 이득값에 따라 비선형 상호 결합 시스템이 안정화 됨을 증명하였다. 그에 따라 비선형 상호 결합 시스템에 동적 출력 궤한 제어기를 설계할 수 있다는 것을 보였다. 앞으로 더욱 일반적인 가정에서의 동적 출력 궤한 제어기의 설계에 대한 연구를 진행할 것이다.

감사의 글 : 이 논문은 2007년도 두뇌한국21사업에 의하여 지원되었음

참 고 문 헌

[1] X. G. Yan, "Decentralized Output Feedback Robust Stabilization for a Class of Nonlinear Interconnected Systems with Similarity," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 43, No. 2, pp. 294-299, 1998.

[2] X. G. Yan, "Decentralized Robust Sliding Mode Control for a Class of Nonlinear Interconnected Systems by Static Output Feedback," Automatica, Vol. 40, pp. 613-620, 2003.

[3] T. Wang, "Fuzzy Robust Decentralized Control of Nonlinear Interconnected Systems with Parametric Uncertainties," Proceedings of the Fourth International Conference on Machine Learning and Cybernetics, pp 851-856, 2005.

[4] F. H. Hsiao, "Robustness Design of Fuzzy Controllers for Nonlinear Interconnected Systems," SICE Annual Conference in Fukui, pp. 701-706, 2003.

[5] Z. X. Han, "Dynamic Output Feedback Controller Design for Fuzzy Systems," IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics Part B, Vol. 30, No. 1, pp. 204-210, 2000

[6] C. Scherer, "Multiobjective Output Feedback Control via LMI Optimization," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 42, No. 7, pp. 896-911, 1997.

[7] J. Li, "Parallel Distributed Compensation for Takagi-Sugeno Fuzzy Model: Multiobjective Controller Design," Proceedings of the American Control Conference, pp. 1832-1836, 1999

[8] I. R. Petersen, "A stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Linear Systems," Systems and Control Letters, Vol. 8, pp. 351-357, 1987.

[9] H. J. Lee, "Robust Fuzzy Control of Non linear Systems with Parametric Uncertainties," IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 9, No. 2, pp. 369-379, 2001.