

로터 시스템 해석을 위한 회전운동 매개화

Rotation Parametrizations for Rotor System Analysis

*#윤성호

*#S. H. Yun(shyun@kumoh.ac.kr)

금오공과대학교 기계공학부

Key words : rotor system, quaternion, rotation parameterization

1. 서론

회전기계들은 발전기, 선박 및 차량의 추진계통, 자동화 기계, 공작기계, 의공학기 등 공학적으로 다양하게 사용되고 있다. 디스크와 로터가 회전할 때 유연축(flexible shaft)이 휘어지거나 질량의 불균형분포, 베어링의 불충분한 지지로 인하여 회전이 정속하지 못할 경우가 많다. 이러한 임계회전속도(critical whirling speed)를 알아내기 위해서는 회전축의 진동모드해석이 필수적이다. 또한 이와 관련된 정확한 동적인 모델은 진동현상을 이해하고, 그 원인을 규명하는데 있어 필수적으로 마련되어야 할 도구이다. 초기의 연구는 균일한 로터축을 사용하여 회전관성과 자이로스코픽 효과(gyroscopic effect)를 무시하였다.¹⁻³ 이후에 사다리꼴 축을 이용하여 축의 전단변형을 고려하였고 고차원의 유한요소를 사용하여 해석하였다.^{4, 5} 문제를 정의한 후에는 연구자들이 방대한 절점의 데이터를 효과적으로 줄여 저주파수에 염두에 두고 차수가 낮은 질량행렬과 강성행렬로 모달변환(modal transformation)을 시도해 왔다.⁶⁻⁸ 선형의 유한요소모델이 회전체 시스템을 제어하기 위하여 사용되었을 뿐 아니라 유체에 의한 복잡한 회전체의 진동현상을 파악하고자 사용되었다.^{9, 10} 그러나 선형연구자들은 운동방정식을 유도하기 위하여 운동에너지를 산정할 때, 회전에 의한 에너지는 회전좌표계에서 관측한 각속도를 구하기 위하여 오일러 각(Euler angle)을 사용하였다. 이 때, 연구자마다 유한회전(finite rotation)의 순서를 달리하여 주로 관성좌표계(inertial frame or fixed frame)에서 선형인 운동방정식을 유도하였다.

본 논문은 로터 시스템을 구성하는 디스크, 회전축, 베어링의 운동방정식을 모두 통합하는 과정에서 기존 연구자들이 채택한 디스크 강체와 회전축 유연체 운동방정식의 단점과 한계성을 규명할 것이다. 아울러 이를 극복하기 위하여 회전운동을 매개화할 수 있는 4원법(quaternion)을 적용하여 새로운 운동방정식을 제시할 것이다.

2. 유한회전

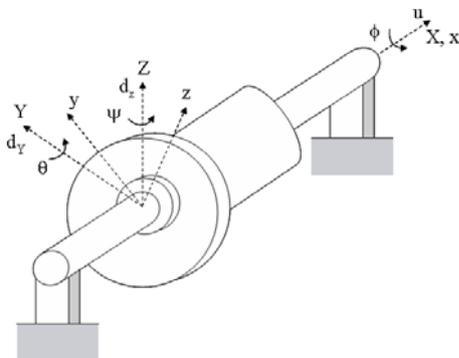


Fig. 1 Definitions of the inertial frame and rotating frame

그림 1과 같이 $B(X, Y, Z)$ 는 시스템의 관성좌표계이고 $b(x, y, z)$ 는 회전하는 디스크에 부착된 좌표계이다. 좌표축 X 와 x 는 변형전 로터의 중심선과 일치하며, 좌표계 B 또는 b 에서 좌표축 X 또는 x 에 대하여 회전속도(whirling speed) ω 로 회전한다. 속도에 관한 회전텐서를 구하는데 있어 오일러 각(Euler angle)

을 사용할 때, 먼저 각도 ϕ 를 X 축에 관하여 회전한 좌표계가 $b^1(x_1, y_1, z_1)$ 이고, 다음에 각도 θ 를 y_1 축에 관하여 회전한 좌표계가 $b^2(x_2, y_2, z_2)$ 이고, 마지막으로 각도 ψ 를 z_2 축에 관하여 회전한 좌표계가 $b(x, y, z)$ 이다. 회전텐서 R 는 좌표계가 변환되는 과정에서 다음과 같이 표현된다.

$$R^{[B]} = R^{[I]} R^{[b_1]} R^{[b_2]} = R_\phi R_\theta R_\psi \quad (1)$$

회전좌표계에서 각속도에 관한 사교대칭행렬(skew-symmetric matrix) $\tilde{\omega}^* = R^{[B]T} \dot{R}^{[B]}$ 에 식 (1)을 적용하면 다음과 같다.

$$\tilde{\omega}^* = (R_\theta R_\psi)^T \dot{\phi} X^{[I]} + R_\psi^T \dot{\theta} y_1^{[b_1]} + \dot{\psi} z_2 \quad (2)$$

좌표축 $X^{[I]T} = [1 \ 0 \ 0]$, $y_1^{[b_1]T} = [0 \ 1 \ 0]$, $z_2^{[b_2]T} = [0 \ 0 \ 1]$ 을 이용하여 각속도를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}^* = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi c\theta & c\psi & 0 \\ -s\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

여기서 c 와 s 는 각각 정현(sine)과 여현(cosine) 함수를 나타내고, $(\dot{\cdot})$ 는 시간 t 에 한 미분이다. ϕ 는 로터가 일정한 속도 Ω 로 회전할 때의 각도이며, 이 때 비틀림 변형은 무시할 것이다.

이와 비슷한 방법으로 먼저 각도 ψ 를 $B(X, Y, Z)$ 에서 Z 축에 관하여 회전한 좌표계가 $b^1(x_1, y_1, z_1)$ 이고, 다음에 각도 θ 를 y_1 축에 관하여 회전한 좌표계가 $b^2(x_2, y_2, z_2)$ 이고, 마지막으로 각도 ϕ 를 x_2 축에 관하여 회전한 좌표계가 $b(x, y, z)$ 일 때 각속도를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}^* = \begin{bmatrix} s\theta & 0 & 1 \\ s\psi c\theta & c\phi & 0 \\ c\theta c\phi & -s\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

식(3)과 (4)를 바탕으로 회전운동 에너지에 오일러-라그랑지(Euler-Langrange) 식을 이용하여 도출되는 디스크의 회전운동 방정식은 다음과 같다.

$$J_d \ddot{\mathbf{E}}_d - \Omega G_1 \dot{\mathbf{E}}_d = \mathbf{F}_d \quad (5)$$

$$J_d \ddot{\mathbf{E}}_d - \Omega G_2 \dot{\mathbf{E}}_d = \mathbf{F}_d \quad (6)$$

여기서 I_d 는 Y 축과 Z 축의 관성모멘트이고 Ω 는 축의 회전속도, J_d , G_1 과 G_2 는 다음과 같고, $\mathbf{E}_d = [\theta \ \psi]^T$, \mathbf{F}_d 는 외부에서 가한 모멘트이다.

$$J_d = \begin{bmatrix} I_d & 0 \\ 0 & I_d \end{bmatrix}; \quad G_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2I_d \\ 2I_d & 0 \end{bmatrix}; \quad (7a, b, c)$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 0 & I_d/2 \\ I_d/2 & 0 \end{bmatrix}$$

식 (5)와 (6)에서 보는 바와 같이 G_1 과 G_2 는 자이로스코픽 효과(gyroscopic effect)에 의하여 나타나는 행렬로서 서로 다른 오일러 각의 순서가 다르다면 그에 따른 운동방정식도 다르다는 것을 알 수 있다. 이는 오일러 각의 순서를 선택하는 방법이 12가지이므로 오일러 각을 채택함으로써 도출되는 운동방정식들은 동일하지 않다.

3. 회전운동 매개화

회전운동을 다른 방법으로 표현하기 위하여 축방향이 벡터 \mathbf{n} 이고 크기 ϕ 로 회전하는 경우를 생각한다. 오일러 매개변수를 4개의 원소로

하는 4원법(quaternion)을 다음과 같이 정의하여 회전텐서 R 을 구하면 다음과 같다.

$$\hat{e} = [e_0 \ e]^T = [c \frac{\phi}{2} \ s \ \frac{\phi}{2} \ \mathbf{n}]^T \quad (8)$$

$$R(\mathbf{e}) = I + 2e_0 \tilde{e} + 2\tilde{e}\tilde{e} \quad (9)$$

회전좌표계에서 각속도에 대한 4원법은 다음과 같이 구하여 진다.

$$\hat{\omega}^* = 2A^T(\hat{e})\hat{e} \quad (10)$$

여기서 행렬 A 는 다음과 같다.

$$A(\hat{e}) = \begin{bmatrix} e_0 & -\mathbf{e}^T \\ \mathbf{e} & e_0 I + \tilde{e} \end{bmatrix} \quad (11)$$

구 좌표계(spherical coordinates)를 이용하여 4원법을 적용하고 $\hat{e}^T \hat{e} = 1$ 인 단위 4원법을 생각해 보자. 이 때 θ 는 회전축과 z 축 간의 회전각이고 ψ 는 회전축과 x 축 간의 회전각이다.

$$\hat{e} = [c \frac{\phi}{2} \ s \ \frac{\phi}{2} \ s \theta c \psi \ s \ \frac{\phi}{2} \ s \theta s \psi \ s \ \frac{\phi}{2} \ c \theta]^T \quad (12)$$

미세한 세차운동(precession)이 y 축과 z 축에서 $\epsilon(t)$ 만큼 발생하는 디스크의 회전각은 다음과 같다고 가정한다.

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \frac{\pi}{2} \pm \epsilon_\theta(t); \\ \psi(t) &= \pi \pm \epsilon_\psi(t) \end{aligned} \quad (13)$$

이에 해당하는 식 (12)의 4원법은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\hat{e} = [c \frac{\phi}{2} \ -s \ \frac{\phi}{2} \mp s \ \frac{\phi}{2} \ \epsilon_\psi \ \mp s \ \frac{\phi}{2} \ \epsilon_\theta]^T \quad (14)$$

식 (11)과 (14)를 식 (10)에 대입하여 운동에너지 K 를 다음과 같이 계산한다.

$$K = \frac{1}{2} \hat{\omega}^{*T} J \hat{\omega}^*; \quad J = I_d \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15a, b)$$

오일러-라그랑지 식을 이용하여 도출되는 디스크의 회전운동 방정식은 다음과 같다.

$$J_d \left\{ 4s^2 \frac{\phi}{2} \ddot{\mathbf{E}}_d - \Omega s \phi (\dot{\mathbf{E}}_d - \mathbf{E}_d) \right\} = \mathbf{F}_d \quad (16)$$

상기의 식은 비선형 운동방정식을 나타내며 자이로스코픽 효과 뿐 아니라 세 번째 항에서 강성이 추가되는 효과도 보여주고 있다. 식 (5)와 (6)은 운동에너지에서 각속도 $\dot{\phi}$ 와 $\dot{\psi}$ 의 2차식만 고려하여 선형 방정식의 형태를 갖추고 있다. 따라서 회전축의 운동방정식도 4원법으로 회전을 매개화하면 식 (16)의 형태로 될 것이다.

4. 결론

로터 시스템의 회전운동 모델을 설정하고자 오일러 각을 채택한 기존의 방법과 회전 매개화를 사용한 방법을 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 오일러 각의 순서를 달리하여 운동에너지에서 3차 이상의 고차항을 무시하고 도출한 선형의 운동방정식들은 동일하지 않다는 것을 확인하였다.
- 2) 4원법을 사용하여 회전을 매개화함으로써 유도된 운동방정식은 비선형성을 나타내며, 자이로스코픽과 강성 효과를 내포하고 있음을 발견하였다.
- 3) 향후, 회전축에도 이와 같은 매개화 방법을 사용하면 로터 시스템의 모델은 비선형성을 가지며, 보다 정확한 해답을 얻을 수 있는 새로운 운동방정식이 도출될 것으로 예상된다.

참고문헌

1. Nelson, H. D. and McVaugh J. M., "The dynamics of rotor-bearing systems using finite element," ASME Journal of Engineering for Industry, Vol. 98, pp. 593~600, 1976.
2. Zorzi E. S. and Nelson, H. D., "The dynamics of rotor-bearing systems with axial torque-a finite element approach," Journal of Mechanical Engineering Design, Vol. 102, pp. 158~161, 1980.
3. Rao J. S., Rotor Dynamics, John Wiley & Sons, New York, 1983.
4. Greenhill L. M. Brickford J. D. and Nelson, H. D., "A conical beam finite element for rotor dynamic analysis," ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 107, pp. 421~430, 1985.
5. Mohiuddin M. A. and Khulief Y. A., "Modal characteristics of rotors using a conical shaft finite element," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 115, pp. 125~144, 1994.
6. Kane K. and Torby B. J., "The extended modal reduction method applied to rotor dynamic problems," ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 113, pp. 79~84, 1991.
7. Khulief Y. A., "On the finite element dynamic analysis of flexible mechanisms," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 97, pp. 23~32, 1992.
8. Mohiuddin M. A. and Khulief Y. A., "Coupled bending torsional vibration of rotors using finite element," Journal of Vibration and Vibrations, Vol. 223, pp. 297~316, 1999.
9. Firoozian R. and Stanway R., "Modeling and control of turbomachinery vibrations, Journal of Vibration and Acoustics, " Vol. 110, pp. 521~527, 1988.
10. Diewald W. and Nordmann R., "Dynamics Analysis of centrifugal pump rotor with fluid-interactions," Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 111, pp. 370~378, 1989.