

압축성 박리 유동에서 Realizability 조건의 영향

박수형,^{*1} 사정환,² 김지웅²

INFLUENCE OF THE REALIZABILITY CONDITION ON TURBULENT SEPARATED FLOW SIMULATIONS

S.H. Park,^{*1} J.H. Sa² and J.W. Kim²

The realizability condition has been applied to modern turbulence models. Simulations are performed to compare k- ω turbulence models imposing the realizability condition. An improvement to the k- ϵ turbulence model is also presented and shown to lead to better agreement with data for supersonic base flows. The improvement is achieved by imposing a grid-independent realizability constraint in the Launder-Sharma k- ϵ model. Numerical results for several test problems show a critical role of the realizability constraint in the prediction of separated flows.

Key Words : 전산유체역학(CFD), 난류 박리 유동(Turbulent Separated Flow), 난류모델링(Turbulence Modeling), 현실성조건(Realizability Condition)

1. 서 론

압축성 유동의 난류해석을 위한 난류 모델의 개발은 지난 수십 년간 이루어져 왔으며, 최근에는 컴퓨터 성능의 발달에 힘입어 LES (large eddy simulation)나 DNS 등을 이용한 난류 해석으로 무게중심이 옮겨가고 있다. 그러나, 항공우주공학에서 관심이 되는 영역은 대부분 높은 레이놀즈수와 비선형 압축성 효과가 지배적인 영역으로 아직까지 LES와 DNS를 적용하기에는 어려움이 많은 것 또한 사실이다. Reynolds 평균된 Navier-Stokes 방정식을 위한 RANS 난류모델링은 최근 DNS 결과를 반영한 모델의 개발이나 LES 해석기법과 결합(hybrid) 하는 방법으로 성능을 개선하는 방향으로 발전하고 있다.

본 연구에서는 90년대 이후 RANS 모델이 충족하여야 하는 realizability 조건을 바탕으로 예측성능의 발전을 이룬 여러 난류모델을 압축성 박리 유동(compressible separated flow)의 해석에 적용하여 realizability 조건의 영향을 살펴보고, 향후 개선방향을 제시하고자 한다.

2. Governing Equations

2.1 k- ω turbulence models[1]

2차원 k- ω 난류방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial q_T}{\partial t} + \frac{\partial(f_{T_i} - f_{T_v})}{\partial x_j} = S_{k\omega} \quad (1)$$

여기서 $q^T = [\rho k, \rho \omega]^T$ 이고, f_{T_i} 와 f_{T_v} 는 대류항과 확산항을 나타낸다. 난류방정식의 생성항은 난류운동에너지(k)와 난류 소멸율(ω)의 생성과 소멸을 나타내며 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$S_{k\omega} = \begin{bmatrix} P_k - D_k \\ P_\omega - D_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_t S^2 - \frac{2}{3} \rho k S_{kk} - \beta' \rho k \omega \\ \alpha \frac{\omega}{k} \left(\mu_t \frac{S^2}{\alpha_\nu} - \frac{2}{3} \rho k S_{kk} \right) - \beta \rho \omega^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

여기서 S는 속도의 평균 변형률(mean strain rate)을 의미하며 다음과 같이 정의된다.

1 정회원, 건국대학교 항공우주정보시스템공학과

2 학생회원, 건국대학교 대학원 항공우주정보시스템공학과

* Corresponding author, E-mail: pish@konkuk.ac.kr

$$S^2 = 2S_{ij}S_{ji} - \frac{1}{3}S_{kk}^2 \quad (3)$$

본 논문에서는 Wilcox 모델[2], Wilcox-Durbin+ 모델[3,4], Menter의 SST (shear stress transport) 모델[5]을 사용하였으며, 난류모델의 자세한 상수 값은 참고문헌을 참고하기 바란다.

벽면 근처나 유동구배가 큰 곳에서 $k-\omega$ 모델을 적용하고, 그 외 영역에서 자유류 의존성이 적은 $k-\epsilon$ 모델을 적용하도록 설계된 $k-\omega$ SST 모델의 경우 ω 방정식에 다음과 같은 교차 확산항(cross diffusion) P_{cd} 가 첨가된다:

$$P_{cd} = 2\rho(1-F_1)\frac{\sigma_{\omega 2}}{\omega}\frac{\partial k}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (4)$$

본 논문에 적용된 $k-\omega$ 모델을 특징짓는 중요한 변수는 난류점성의 계수 값으로 각 모델의 계수 값은 다음과 같다:

$$\mu_t = c_\mu \frac{\rho k}{\omega} \quad (5)$$

Wilcox : $c_\mu = 0.09$ (6)

WD+: $c_\mu = \min[0.09, 0.3\omega/\sqrt{(S^2 + \Omega^2)/2}]$ (7)

SST : $c_\mu = \min\{0.09, 0.31\omega/\Omega F_2\}$ (8)

여기서 Ω 는 각 방향 vorticity의 평균값이고, SST 모델의 F_2 는 벽면에서 1, 자유류에서 0의 값을 가지도록 설계된 함수이다[5].

식 (6)의 상수 값은 압력구배가 없는 경계층 유동의 벽 법칙을 잘 만족시키지만, 역압력구배가 존재하는 박리층이나 강한 전단 흐름이 존재하는 곳에서는 난류 변화를 잘 포착하지 못하게 된다. Bradshaw 등[6]은 2차원 유동에서 역압력구배가 존재하는 곳에서 다음의 조건이 만족되어야 함을 보였다.

$$\tau_{ij}^* = -\rho \overline{u'v'} = \rho \sqrt{c_\mu^*} k \quad (9)$$

이에 따라 Durbin 등[4]은 평균 변형률이 큰 곳에서 식 (9)를 따르도록 C_μ 를 변형시키는 방법을 채택하였다. 한편, 이러한 고려는 Coakley[7]에 의해서도 제안되었으며 이후 SST 모델에서도 동일한 방식으로 적용되었다. SST 모델에서는 strain rate 대신 vorticity를 사용한다는 점이 주요한 차이점이다. 본 질적으로 변형률 S 가 커질 때 C_μ 값이 영으로 접근한다는 것

이 가장 중요한 점이라고 볼 수 있다. 이러한 비선형 계수모델은 난류 요동의 RMS 값이 모두 양(positive)의 값을 가져야 한다는 realizability condition을 만족시킴을 보일 수 있다.

2.2 k-ε turbulence models[8,9]

Launder-Sharma $k-\epsilon$ 난류모델[8]은 다음과 같다.

$$\frac{\partial q_T}{\partial t} + \frac{\partial(f_{T_i} - f_{TV_i})}{\partial x_j} = S_{k\epsilon} \quad (10)$$

$$S_{k\epsilon} = \left[\begin{array}{l} P_k - D_k \\ P_\epsilon - D_\epsilon \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \mu_t S^2 - \frac{2}{3} \rho k S_{kk} - \beta' \rho \epsilon + D \\ \alpha \frac{\epsilon}{k} \left(\mu_t S^2 - \frac{2}{3} \rho k S_{kk} \right) - \beta f_\epsilon (\text{Re}_\tau) \frac{\epsilon^2}{k} + E \end{array} \right]$$

여기서 D 와 E 는 벽면효과로 인한 비등방성(anisotropic) 소산률을 모델한 항이다. 감쇠함수(damping function) f_ϵ 는 Turbulent Reynolds 수의 함수로 표현된다. 본 논문에서는 원래의 Launder-Sharma 모델 (LS)과 DNS 자료에 기초하여 난류점성의 계수를 새롭게 구성한 Craft 모델(Craft)을 사용하였다[9]. $k-\epsilon$ 모델의 난류점성은 다음과 같이 표현된다.

$$\mu_t = c_\mu \frac{\rho k^2}{\epsilon} \quad (11)$$

LS : $c_\mu = 0.09$

Craft : (12)

$$c_\mu^{craft} = \frac{0.3}{1 + 0.35(\max(S, \Omega))^2} \left(1 - \exp\left[\frac{-0.36}{\exp(-0.75 \max(S, \Omega))}\right] \right) \left(1 - \exp\left[-\left(\frac{\text{Re}_\tau}{90}\right)^2 - \left(\frac{\text{Re}_\tau}{400}\right)^2\right] \right)$$

2.3 Realizability 조건의 영향

본 논문에 사용된 $k-\omega$ 난류모델은 천음속 익형과 날개 문제, 초음속 충돌제트 유동 등에 적용되어 왔다. 선형모델과 비선형모델 간의 차이는 유동박리가 심하거나 강한 전단층이 형성되는 곳에서 발생하였으며, 비선형모델이 상당히 좋은 결과를 제시함을 알 수 있었다. 뿐만 아니라 비선형모델은 난류생성에 직접 비례하는 변형률에 반비례하여 난류점성의 계수를 줄이기 때문에, 과도한 난류운동에너지의 생성을 방지함으로써 계산의 안정성을 증대시키는 효과를 가지고 있다.

이러한 realizability 조건의 효과는 $k-\epsilon$ 모델에서도 동일하게 나타나며 이를 위해 본 연구에서는 Launder-Sharma 모델이 식 (7)의 realizability 조건을 적용한 모델(MLS1)을 사용하여 계산의 정확도와 함께 안정성을 증진시켰다.

$$c_\mu^{MLS1} = \min[0.09, 0.3/\sqrt{(S^2 + \Omega^2)/2}] \quad (13)$$

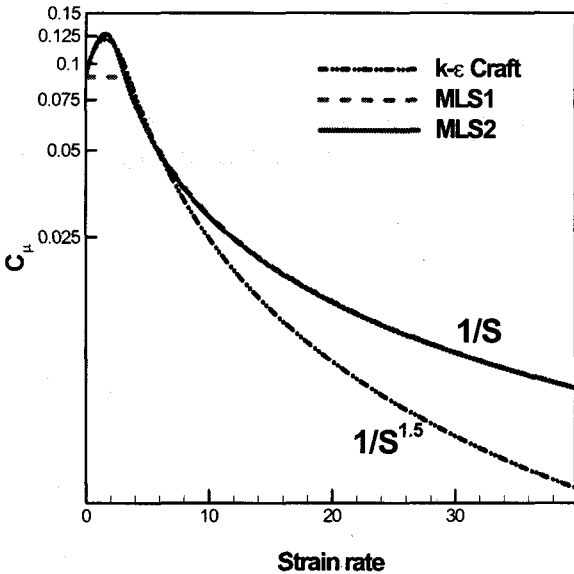


Fig.1 Variation of eddy viscosity with mean strain rate at large turbulent Reynolds number.

MLS1 모델의 경우 $k-\epsilon$ 모델에 적용되는 모든 종류의 제한자를 사용하지 않고 안정성을 유지할 수 있다.

식 (12)에 주어진 Craft 모형의 계수 값은 DNS 결과를 잘 충족시키도록 설계되었으며, 난류점성의 계수값이 $\max(\bar{S}, \bar{\Omega})^{1.5}$ 에 반비례하도록 설계되었다. Craft 모형과 MLS1 모형의 차이를 Fig. 1에 나타내었다. 이러한 차이가 압축성 유동에서 어떤 영향을 미치는지를 확인하기 위해 수직 충격파에서 난류 운동에너지의 발생[3]을 이론적으로 살펴보았다.

x-방향으로의 속도구배가 큰 영역에서 변형률 S는 다음과 같이 간략화할 수 있다.

$$S^2 \sim \frac{4}{3} \left(\frac{\Delta U}{\Delta x} \right)^2, \quad S_{kk} \sim \left(\frac{\Delta U}{\Delta x} \right)$$

이때 $k-\omega$ 모델에서 난류운동에너지의 생성항 P_k 를 한 격자 내에서 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\int (\mu_T S^2 - \frac{2}{3} \rho k S_{kk}) dV \sim \frac{4}{3} c_\mu^0 \frac{\rho k^2}{\epsilon} \frac{(\Delta U)^2}{\Delta x} - \frac{2}{3} \rho k \Delta U = \frac{2}{3} \rho k \Delta U \left[\sqrt{3} c_\mu^0 \bar{S} - 1 \right]$$

이로부터 만약 C_μ 가 상수일 경우 난류운동에너지의 생성은 격자간격의 역수에 비례하여 증가함을 알 수 있고, 이는 격자간격이 작은 영역에서 과도한 난류에너지의 발생을 야기할 수 있음을 보여준다. 이러한 격자의존성은 식 (7) 또는 (8)과 같이 realizability 조건을 적용함으로써 제거됨을 쉽게 알 수

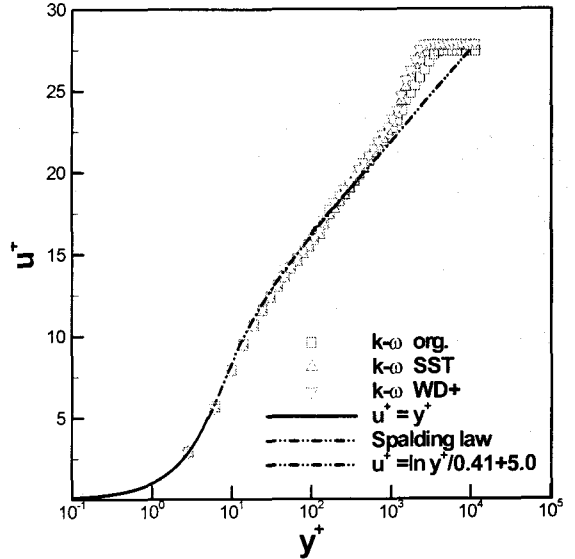


Fig.2 Nondimensional velocity distribution on a flat plate.

있다. 동일한 방법을 $k-\epsilon$ Craft 모델과 MLS1 모델에 적용해 보면 다음의 결과를 얻게 된다.

For Eq. (12),

$$\int (\mu_T S^2 - \frac{2}{3} \rho k S_{kk}) dV \sim \frac{2}{3} \rho k \Delta U \left[\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{S}} - 1 \right]$$

For Eq. (13),

$$\int (\mu_T S^2 - \frac{2}{3} \rho k S_{kk}) dV \sim \frac{2}{3} \rho k \Delta U \left[2\sqrt{3} c_\mu^0 - 1 \right]$$

이 결과는 큰 변형률이 존재하는 곳에서 Craft 모델의 난류에너지 생성율이 $\sqrt{\Delta x}$ 에 비례하고, MLS1 모델의 경우 격자에 무관하게 일정한 값을 가짐을 보여준다. 따라서 본 연구에서는 Craft 모형이 격자에 무관할 수 있도록 약간의 수정 (MLS2 모델)을 가하여 그 특성을 비교해 보고자 한다.

$$c_\mu^{MLS2} = \frac{2.4}{1 + 8\sqrt{(\bar{S}^2 + \bar{\Omega}^2)/2}} \left(1 - 1.375 \exp \left[\frac{-0.36}{\exp(-0.9\sqrt{(\bar{S}^2 + \bar{\Omega}^2)/2})} \right] \right) \left(1 - \exp \left[-\left(\frac{Re_T}{90} \right)^{1.4} - \left(\frac{Re_T}{400} \right)^{1.7} \right] \right)$$

이를 통해 낮은 변형률을 가지는 영역에서는 Craft 모델을 따르고, 변형률이 큰 영역에서는 MLS1 모델을 따르도록 수정됨을 Fig. 1에서 볼 수 있다.

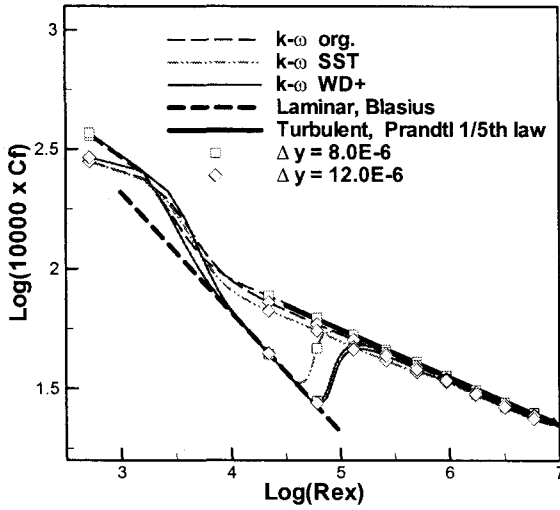


Fig.3 Skin friction coefficient with Reynolds number on a flat plate.

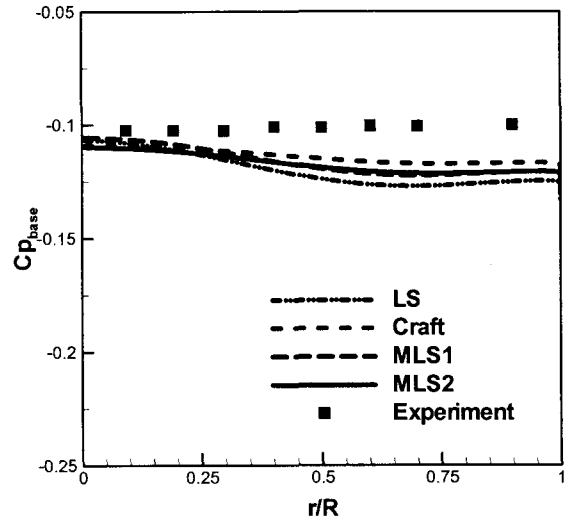


Fig.5 Pressure coefficient distributions on the base with radial distance from centerline.

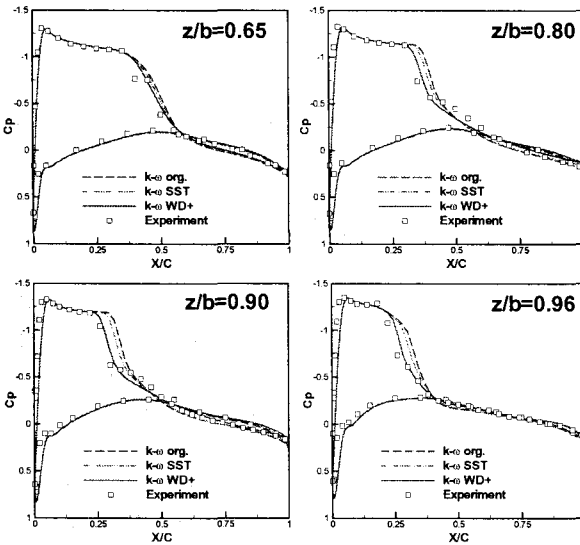


Fig.4 Wall pressure coefficient over ONERA M6 wing at $\alpha=5.06$ deg.

3. Numerical Results

3.1 2-dimensional boundary layer on a flat plate

먼저 본 연구에 적용한 비선형 난류점성 계수가 경계층에 미치는 영향을 살펴보기 위해 마하수 0.2, $Re=10^7$ 의 2차원 평판 문제를 해석하였다. 무차원거리에 대한 무차원 속도를 나타낸 Fig. 2에서 보듯이 모든 $k-\omega$ 난류모델이 벽 법칙과 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다. 또한, 점성저층(viscous sublayer)에 단 3개의 격자점이 존재함에도 불구하고 벽 법칙을 잘 따

르고 있다. Fig. 3은 평판의 시작점을 기준으로 한 레이놀즈수에 대한 마찰계수의 분포를 나타낸 그림이다. 레이놀즈수가 $4\sim 5 \times 10^4$ 근방에서 난류로의 전이가 나타남을 볼 수 있다. 전이 현상은 충분히 조밀한 격자를 사용할 경우에만 포착할 수 있으며 Wilcox 모델의 경우 격자영향이 더 크게 나타난다. 난류로의 전이는 난류의 생성이 소멸보다 커지는 지점에서 이루어지는데, Wilcox 모델의 전이가 훨씬 빨리 일어나는 이유는 난류의 생성이 제어되지 못하여 층류 경계층이 유지되지 못하기 때문이다. 평판 경계층 유동의 해석은 WD+ 모델과 SST 모델의 비선형 난류점성 계수가 경계층 해석에는 영향을 주지 않고 있음을 말해준다.

3.2 3-dimensional ONERA M6 wing

마하수 0.845, 받음각 5.06에서 ONERA M6 날개 위에 형성된 박리유동을 해석하였다. 자유류 레이놀즈수는 11.7×10^6 이고 사용된 격자는 $149 \times 49 \times 33$ 으로 구성되어 있다. Fig. 4는 스펠방향의 각 지점에서 $k-\omega$ 난류모델에 따른 벽면 압력 분포를 나타내고 있다. 박리가 약하게 일어나는 곳에서는 압력 분포가 거의 일정한 반면, 박리가 강한 곳에서는 비선형 난류점성 계수가 좋은 결과를 나타냄을 볼 수 있다. 비선형 난류계수 모형은 역압력구배가 존재하는 박리영역에서 난류에너지의 생성을 억제함으로써 충격파 뒤쪽에 발생하는 박리 bubble의 크기와 강도를 선형 모델에 비해 작게 예측한다. 평균 변형률을 사용한 WD+ 모델의 경우 압력회복 영역을 뚜렷이 포착하고 있다. 와도의 절대값을 사용하는 SST 모델과의 차이를 고려할 때, 변형률과 와도값이 명백히 구분되는 3차원

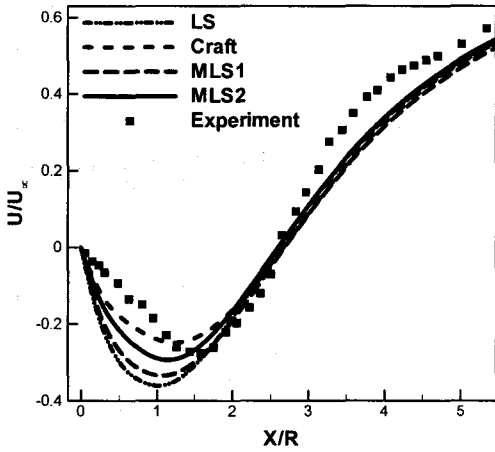
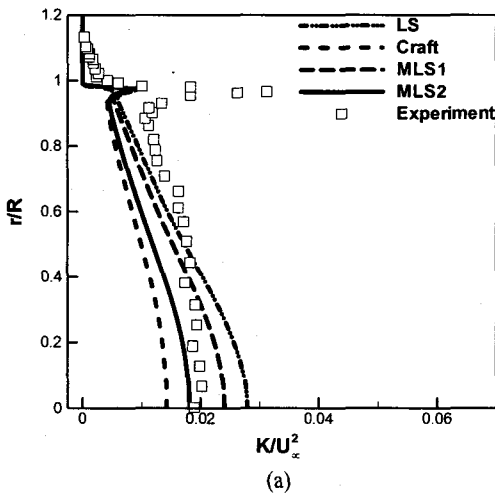
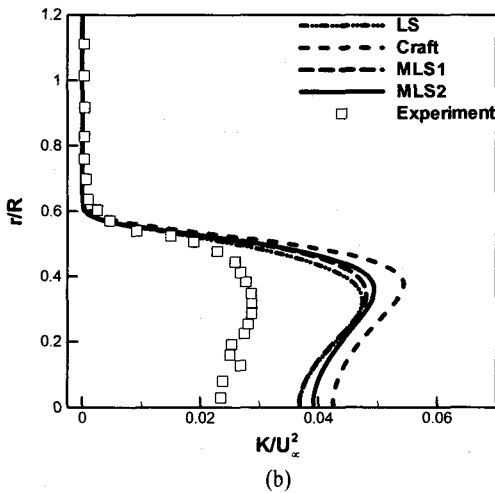


Fig.6 U velocity distributions along the centerline.



(a)



(b)

Fig.7 TKE profiles: (a) X/R=0.079 (b) X/R=2.67.

유동에서는 식 (7)과 같은 적절한 조화가 SST 모델에 필요하다고 볼 수 있다.

3.3 Supersonic axisymmetric base flow

마지막으로 초음속 축대칭 기저부 유동[10,11]에서 realizability 조건의 영향을 살펴보았다. 입구조건과 형상은 참고문헌[10]에 잘 나와 있다. Fig. 5는 기저부 벽면을 따라 압력계수의 변화를 나타낸 그림이다. 순환영역 내부이므로 압력 평형을 이루어 일정한 압력값을 나타내는데, $k-\epsilon$ 모델들 모두 약간 작은 압력을 나타내었다. Fig. 6은 중심선을 기준으로 흐름방향 속도를 나타낸 그림이다. MLS1 모델은 Launder-Sharma 모델에 realizability 조건을 부가한 모델이며, MLS2 모델은 Craft 모델의 격자의존성을 제거한 모델이다. Fig. 6에서 박리순환영역에서 역방향 속도를 Craft 모델이 가장 잘 예측하고 있으며 LS 모델이 가장 좋지 못한 결과를 주고 있다. 역방향 속도의 최대값은 순환영역의 난류운동에너지에 직접 비례함을 Fig. 7에서 확인할 수 있으며, 이러한 경향은 M6 날개의 충격과 뒤쪽 박리 영역에서의 경향과 유사하다. 즉, realizability 조건을 통해 난류운동에너지의 과도한 발생을 억제하여 실제와 더 잘 일치하는 결과를 얻을 수 있게 된다.

4. 결 론

비선형 난류점성 계수의 영향을 살펴보기 위해 압축성 난류 유동을 해석하였다. 최근의 RANS 난류 모형은 그 형태와 적용방법이 서로 다르더라도 본질적으로 realizability 조건을 대부분 내포하고 있으며, 난류점성의 계수를 상수가 아닌 평균 변형을 또는 와도값의 함수로 취급한다. Realizability 조건은 충격과 또는 강한 전단층에서 발생할 수 있는 난류운동에너지의 과도한 생성을 억제함으로써 박리 유동을 좀 더 실제와 가깝게 모사할 수 있도록 돕는다는 것을 알 수 있었다.

후 기

본 연구는 교육인적자원부 지원으로 수행하는 BK21 사업의 일환으로 수행되었습니다.

참고문헌

[1] Park, S. H., and Kwon, J. H., "Implementation of $k-\omega$ Turbulence Models in an Implicit Multigrid Method," *AIAA J.*, Vol.42, No.7, 2004, pp.1348-1357.
 [2] Wilcox, D. C., "Reassessment of the Scale-Determining

- Equation for Advanced Turbulence Models," *AIAA J.*, Vol.26, No.11, 1988, pp.1299-1310.
- [3] Thivet, F. Knight, D. D., Zheltovodov, A. A., and Maksimov, A. I., "Insights in Turbulence Modeling for Crossing-Shock- Wave/Boundary-Layer Interactions," *AIAA J.*, Vol.39, No.6, 2001, pp.985-995.
- [4] Durbin, P. A., "On the $k-\epsilon$ Stagnation Point Anomaly," *Inter. J. Heat Fluid Flow*, Vol.17, No.1, 1996, pp.89, 90.
- [5] Menter, F. R., "Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications," *AIAA Journal*, Vol.32, No.8, 1994, pp.1598-1605.
- [6] Bradshaw, P., Ferriss, D. H., and Atwell, N. P., "Calculation of Boundary-Layer Development Using the Turbulent Energy Equation," *J. Fluid Mech.*, Vol.28, No.3, 1967, pp.593-616.
- [7] Coakley, T. J., "Turbulence Modeling Methods for the Compressible Navier-Stokes Equations," *AIAA* 83-1693, June 1983.
- [8] Launder, B. E., and Sharma, B. I., "Application of the Energy Dissipation Model of Turbulence to the Calculation of Flows near a Spinning Disk," *Letters in Heat and Mass Transfer*, Vol.1, 1974, pp.131-138.
- [9] Craft, T. J., Launder, B. E., and Suga, K., "Development and Application of a Cubic Eddy-Viscosity Model of Turbulence," *Inter. J. Heat Fluid Flow*, Vol.17, 1996, pp.108-115.
- [10] Herrin, J. L. and Dutton, J. C., 1993, "Supersonic Base Flow Experiments in the Near Wake of a Cylindrical Afterbody," *AIAA* 93-2924.
- [11] Sahu, J., 1994, "Numerical Computations of Supersonic Base Flow with Special Emphasis on Turbulence Modeling," *AIAA J.*, Vol.32, No.7, pp.1547-1549.