

NURBS를 이용한 격자생성 및 제어기법

윤 옹 현

A STUDY ON THE NURBS GRID GENERATION AND GRID CONTROL

Y.H. Yoon

A fast and robust method of grid generation to multiple functions has been developed for flow analysis in three dimensional space. It is based on the Non-Uniform Rational B-Spline of an approximation method. The grid generation method, details of numerical implementation, examples of application, and potential extensions of the current method are illustrated in this paper.

Key Words : BURBS(Non-Uniform Rational B-Spline), Knot Vector, Surface Modeling

1. 서 론

CAE(Computer Aided Engineering)분야에서 필요한 공학 모델을 표현할 때 많이 사용되고 있는 NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines)기법은 컴퓨터 지원형상설계(CAGD: Computer Aided Geometry) Design)분야에서 개발된 분야이나 형상 모델링은 물론 전산 유체 역학의 정렬 격자나 비정렬 격자를 생성하거나 격자를 제어하는 적응격자 또는 최적설계 등 다양한 분야에 많이 이용되고 있다[1-3].

본 연구의 목적은 NURBS의 형상 모델링 능력, 격자구성 능력, 격자 제어 및 조절 기능들에 대한 잠재 능력을 개발하여 이를 전산유체역학 분야에 다양하게 활용하는데 있다. NURBS는 컴퓨터 그래픽을 위한 도구로써 Versprille[3], Tiller[4], 그리고 Piegl와 Tiller[5]등에 의해서 많이 연구되었으며, 1983년 이래 미국에서는 IGES(Initial Graphics Exchange Specification)로 사용되어 오고 있다[6,7].

2. 본 론

2.1 수학적 모델링

3차원 임의형상을 모델링하는 곡면 표현기법으로 가장 범용성을 가진 NURBS는 4차원 동차 좌표 공간을 이용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$Q(u, w) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} B_{i,j}^h N_{i,k}(u) M_{j,l}(w) \quad (1)$$

여기서 $B_{i,j}^h$ 는 4차원 동차 좌표로 나타내는 조절망(control net)이고, $N_{i,k}(u)$ 와 $M_{j,l}(w)$ 는 다음과 같이 정의되는 기저함수(basis function)이다.

$$\begin{aligned} N_{i,1}(u) &= \begin{cases} 1 & \text{if } x_i \leq u < x_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ N_{i,k}(u) &= \frac{(u-x_i)N_{i,k-1}(u)}{x_{i+k-1}-x_i} \\ &+ \frac{(x_{i+k}-u)N_{i+1,k-1}(u)}{x_{i+k}-x_{i+1}} \\ M_{j,1}(w) &= \begin{cases} 1 & \text{if } y_j \leq w < y_{j+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ M_{j,l}(w) &= \frac{(w-y_j)M_{j,l-1}(W)}{y_{j+l-1}-y_j} \\ &+ \frac{(y_{j+l}-w)M_{j+1,l-1}(w)}{y_{j+l}-y_{j+1}} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 x_i 와 y_j 는 knot vector이다.

식 (1)을 동차 좌표계로 나누어주면 3차원 공간에 다시 투영시킨 Rational B-spline 형태의 식은 다음과 같다.

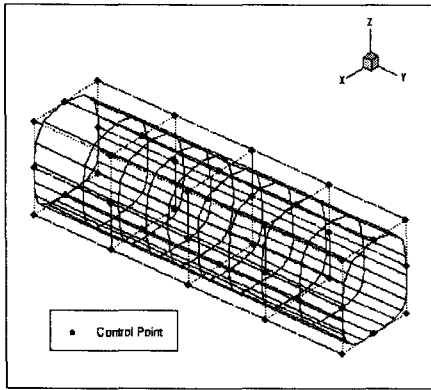


Fig. 1 3차원 형상 모델링

$$Q(u, w) = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} h_{i,j} B_{i,j}^h N_{i,k}(u) M_{j,l}(w)}{\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} h_{i,j} N_{i,k}(u) M_{j,l}(w)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} B_{i,j} S_{i,j}(u, w) \tag{3}$$

여기서 기저함수는 다음과 같다.

$$S_{i,j}(u, w) = \frac{h_{i,j} N_{i,k}(u) M_{j,l}(w)}{\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} h_{i,j} N_{i,k}(u) M_{j,l}(w)} \tag{4}$$

식 (3)에서 u, w에 대한 기저함수의 값은 항상 영보다 크며 그 총합은 1이 된다. 즉

$$S_{i,j} \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} S_{i,j}(u, w) \equiv 1 \tag{5}$$

이상과 같은 수학적 모델을 이용하여 다양한 곡선 및 곡면을 근사할 수 있을 뿐 아니라 ruled 곡면, 회전 곡면 등을 생성할 수 있다. 먼저 식 (1)을 이용하여 3차원 임의곡선 및 곡면 구성 프로그램을 작성하여 입력 자료로써 원하는 형상에 대한 형상 조절 망인 $B_{i,j}(u, w)$ 을 이용하여 3차원 모델링을 하였다.

NURBS의 결과에 의해서 얻어진 곡면의 데이터 $Q(u, w)$ 를 주어진 값으로 하여 정해진 기저함수의 차수를 통해 기저함수 값 $N_{i,k}(u)$ 와 $M_{j,l}(w)$ 을 결정한 후 미지수인 조절망

(control net) $B_{i,j}$ 의 값들을 찾아냈다. 이것을 매트릭스 형태로 쓰면 다음과 같다.

$$[D] = [C][B] \tag{6}$$

여기에서 [D]는 곡면 데이터의 3차원 좌표 값들로 일차 선형 계를 이룬다. 예를 들어 어떤 B-spline 곡선 상에 j 개의 3차원 데이터가 주어질 경우 다음과 같은 선형 식으로 표현된다.

$$D_1(t_1) = N_{1,k}(t_1)B_1 + N_{2,k}(t_1)B_2 + \dots + N_{n+1,k}(t_1)B_{n+1}$$

$$D_2(t_2) = N_{2,k}(t_2)B_1 + N_{2,k}(t_2)B_2 + \dots + N_{n+1,k}(t_2)B_{n+1}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots \tag{7}$$

이다.

$$D_j(t_j) = N_{1,k}(t_j)B_1 + N_{2,k}(t_j)B_2 + \dots + N_{n+1,k}(t_j)B_{n+1}$$

where $2 \leq k \leq n+1 \leq j$

그리고 식 (6)의 [C]는 B-spline 기저함수를 이루는 매트릭스이며, [B]가 3차원 조절 망으로 찾고자하는 미지수가 된다. 따라서 다음과 같은 역행렬을 이용하여 조절 망의 값들을 구한다.

$$[B] = [[C]^T [C]]^{-1} [C]^T [D] \tag{8}$$

이렇게 해서 얻어진 조절 망의 값들은 보다 정교한 형상 설계를 위해 사용될 수 있다.

2.2 3차원 격자 생성

3차원 형상 모델링은 먼저 원하는 형상에 대한 형상 조절 망인 $B_{i,j}(u, w)$ 한다. 다음은 항공기 날개 형상에 대한 3차원 모델링 결과를 보여 주고 있다.[Fig. 2 참조]

이러한 모델링은 조절망을 제어함으로써 형상을 새롭게 구성할 수도 있다. 다음 Fig. 3은 조절점을 이동하여 새로운 형상변화를 시도한 그림이다.

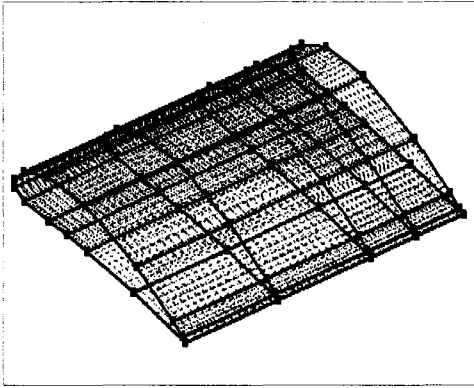


Fig. 2 날개 형상모델링

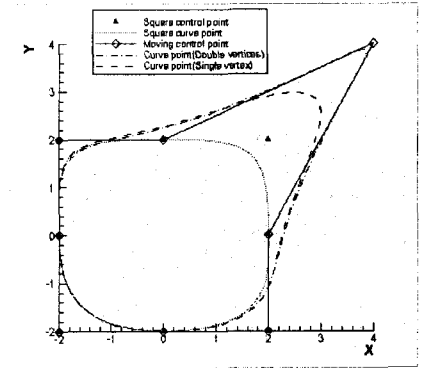


Fig. 5 Control Points 제어

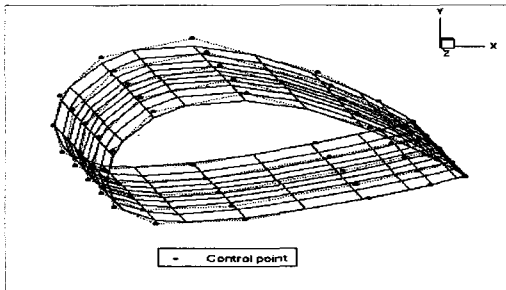


Fig. 3 조절점을 이용한 형상변화

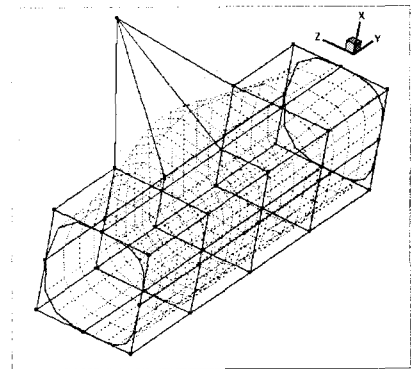


Fig. 6 도관의 형상변형

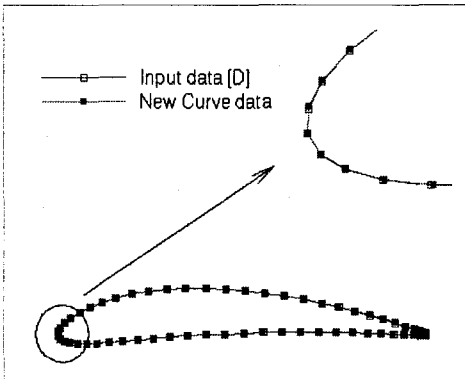


Fig. 4 데이터[D]와 새로운 곡선 데이터

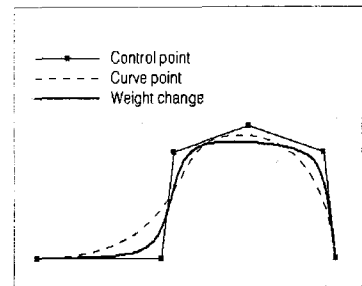


Fig. 7 Weight 변환 제어

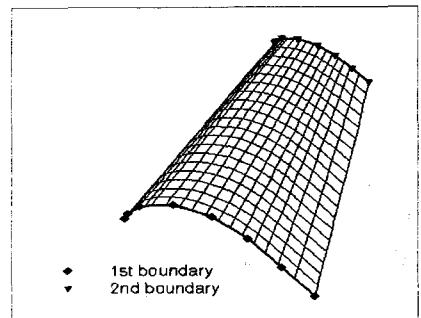


Fig. 8 Knot insert 제어 전

날개의 경우 앞전(leading edge)형상 유지가 매우 중요한데 이를 다시 생성했을 경우 앞전 형상이 잘 유지되고 있음을 보여 주고 있다.

2.3 격자 제어 기능 프로그램

NURBS의 격자조절기능은 control point제어, knot insert 제어, weight제어 등 다양한 격자조절 기능이 있다. 다음 Fig. 5,6은 이러한 격자 제어 기능을 모사한 그림이다.

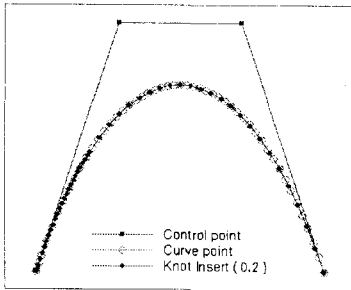


Fig. 9 Knot Insert 제어

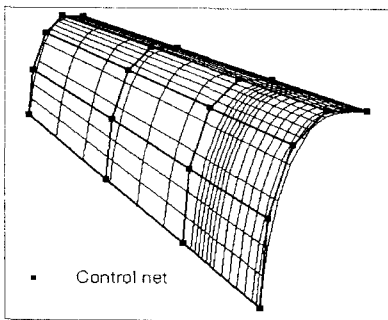


Fig. 10 Knot Insert 후 격자분포

3. 결 론

NURBS를 이용하여 형상 모델링, 격자 구성 및 제어에 관한 여러 가지 기법을 구현해 보았다. NURBS는 격자구성 및 제어 그리고 최적 모델링 등에 여러 가지 잠재 능력이 있는 기법으로 향후 활용도가 높아 질 것으로 전망된다.

참고문헌

- [1] Mustafa Kaya and Ismail H. Tuncer, 2006, "Path Optimization of Flapping Airfoils Based on NURBS," *Parallel CFD 2006*, Busan, Korea.
- [2] Simon Painchau-Quellet, etc, October 2006, "Airfoil Shape Optimization Using a Nonuniform Rational B-Splines Parameterization Under Thickness Constraint," *AIAA Journal*, Vol.44, No.10.
- [3] 이병준, 김종암, 2006. 3, "NURBS를 이용한 S형 천음속 흡입관 최적 설계," *한국전산유체공학회지*, 제11권 제1호.
- [4] Versprille, K.J., February. 1975, "Computer-Aided Design Applications of the Rational B-spline Approximation Form," *PhD dissertation*, Syracuse Univ., Syracuse, NY.
- [5] Tiller, W., September 1983, "Rational B-splines for Curve and Surface Representation," *IEEE Comp. Graph. & Appl.*, Vol.3, No.6, pp.61-69.
- [6] Piegl, L., and Tiller, W., 1987, "Curve and Surface Constructions Using Rational B-splines," *Comp. Aid. Des...*, Vol.19, pp.485-498.
- [7] IGES, 1986, "Initial Graphics Exchange Specifications, Version 3.0," *Doc. No.NBSIR 86-3359 Nar. Bur. of Stds.*, Gaithersburg, MD, USA.
- [8] Barsky, B.A., and Greenberg, D.P., 1980, "Determining a Set of B-spline Control Vertices to Generate an Interpolating Surface," *Comp. Graph. Imag. Proc.*, Vol.14, pp.203-226.