

중첩격자에 대한 이동최소자승법 적용 연구

이 관 중¹, 이 승 수^{*2}

APPLICATION OF MOVING LEAST SQUARE METHOD IN CHIMERA GRID METHOD

K. Lee¹ and S. Lee^{*2}

Chimera grid Method is widely used in Computational Fluid Dynamics due to its simplicity in constructing grid system over complex bodies. Especially, Chimera grid method is suitable for unsteady flow computations with bodies in relative motions. However, interpolation procedure for ensuring continuity of solution over overlapped region fails when so-call orphan cells are present. We have adopted MLS(Moving Least Squares) method to replace commonly used linear interpolations in order to alleviate the difficulty associated with orphan cells. MSL is one of interpolation methods used in mesh-less methods. A number of examples with MLS are presented to show the validity and the accuracy of the method.

Key Words : 중첩격자기법(Chimera Grid Method), Orphan Cell, 이동최소자승법(Moving Least Square Method)

1. 서 론

중첩격자기법(Chimera Grid Method)[1]은 복잡한 형상을 가진 유동장 해석과, 외부장착물 분리 문제와 같이 격자계간 상대 운동이 있는 문제에 격자계 생성이 유리하여 많이 사용되는 격자 기법이다. 이 중첩격자기법은 서로 독립적으로 구성된 격자계에서 해를 구하고 해의 연속은 격자간의 정보를 내삽을 통하여 확보하게 된다.

이러한 내삽은 몇몇의 문제점을 내포하고 있다. 중첩영역 내 하나의 내삽점에 대해 2차원에서는 4개, 3차원에서는 8개의 피내삽점(Donor Cell)을 필요로 한다. 이때 피 내삽점이 존재 하지 않거나, 혹은 피 내삽점의 수가 부족한 경우 내삽을 수행 할 수가 없게 되는 문제점이 있다. 이러한 내삽점을 Orphan Cell이라 하며, 지금까지의 중첩격자기법에서는 Orphan Cell 발생 시 피내삽점에 인접한 격자점의 값을 기존 피내삽점에서의 값으로 대체하여 내삽을 수행하는 형태를 취해왔다. 따라서 Orphan Cell 발생은 해의 결과에 좋지 않은 영향을 주게 된다. 또 다른 문제점으로 중첩영역내의 두 개 이상의 격자계가 중첩이 되어 있어도, 그 중 하나의 격자계의 정보만을

내삽 하여 가져 올 수밖에 없다는 것이다. 이러한 문제들은 내삽이 격자점들의 기하학적 관계에 종속적인 방법이기 때문에 발생하는 문제점들이다.

본 논문에서는 이와 같은 문제점이 있는 기존의 내삽방법을 대체하기 위해 전산구조분야에서 개발된 무요소 보간 기법인 이동최소자승법(Moving Least Square Method)을 도입하여 새로운 중첩격자 내삽방법을 개발하였다. 무요소 보간 기법[2]은 기존 유한 요소의 형상 함수를 격자와 무관하게 생성하는 기법을 말한다. 개발된 방법을 비정상 1차원 Shock Tube 문제와 정상 2차원 문제에 적용 하여, 그 정확성과 효율성을 보였다.

2. 중첩격자기법

중첩격자기법[3]은 크게 다음과 같은 절차를 따라 유동장을 해석하게 된다.

- 독립된 격자계들의 인식 및 중첩
- 고체 물체면(Solid Wall) 혹은 해석에 사용되지 않는 Hole 점 제거(Hole Cutting)를 통한 교차영역 구성
- 내삽을 통한 유동 정보의 전달

본 논문에서는 위의 절차 중 Orphan Cell 발생에 직접적인 영향을 미치는 교차영역 구성부터 다루었다.

1 학생회원, 인하대학교 대학원 항공공학과

2 정회원, 인하대학교 기계공학부 항공우주전공

* Corresponding author, E-mail: slee@inha.ac.kr

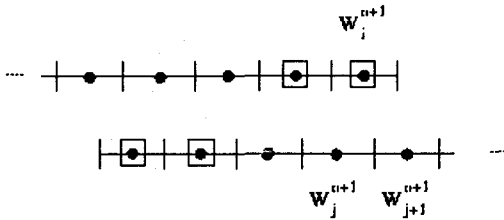


Fig. 1 Normal Interpolations in 1-D Problem

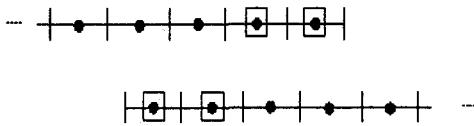


Fig. 2 Orphan Cell Interpolations in 1-D Problem

2.1 교차영역 구성 및 Orphan Cell

중첩격자계에선 격자는 다른 격자에 있는 물체의 존재를 모르게 된다. 그러므로 유동변수의 연속성을 유지 할 수 없다. 따라서 유동변수의 연속성을 전체 격자계에서 유지시키기 위해선 각 격자의 유동정보를 다른 격자로 이동시켜줘야 한다. 이러한 역할을 내삽점이 수행하게 된다. 이 내삽점은 격자계들이 서로 중첩되는 지역인 교차영역의 경계면에 위치하게 된다. 이러한 교차영역은 1층 혹은 2층 이상의 다층으로 구성시킬 수 있다. 1층의 교차 영역은 하나의 내삽점을 가지므로, 2개의 내삽점을 가지는 2층의 교차영역보다 쉽게 구성할 수 있다. 하지만 해석자의 공간 정확도가 2차 이상이라면, 2층의 교차영역을 구성함으로써 해석자의 정확도를 따라갈 필요가 있다.

Fig. 1과 같이 1차원의 경우 하나의 내삽점에 2개의 피내삽점이 교차 되어 있다면, 내삽을 수행 할 수 있다. 기존의 중첩격자기법이 2차원에서는 bilinear 내삽을, 3차원에서는 trilinear 내삽 방법을 사용 하므로, 2차원에서는 4개의 피내삽점이, 마찬가지로 3차원에서는 8개의 피내삽점이 존재 한다면 그 내삽점에서 내삽을 수행할 수 있다. 그러나 교차영역부족 등의 이유로 Fig. 2와 같이 피내삽점이 존재 하지 않아 내삽을 수행할 수가 없는 내삽점, 즉 Orphan Cell이 발생한다. 1차원에 경우 거의 발생 하지 않지만, 2차원과 3차원은 많은 수의 피내삽점이 필요 하므로 상당한 수의 Orphan Cell이 발생 된다. 특히 해석자의 공간 정확도가 2차 이상이라면, 2층의 교차영역 구성이 필요로 하므로, Orphan Cell의 발생은 더욱 더 증가 하게 된다. Fig. 3에는 2차원 문제에서 발생한 Orphan Cell을 보여주고 있다.

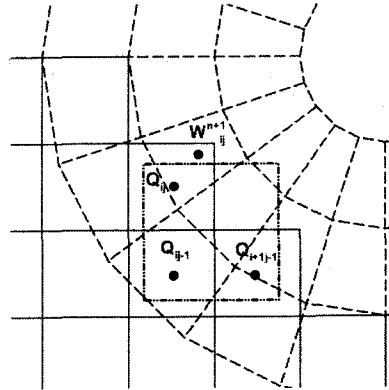


Fig. 3 Orphan Cell Interpolations in 2-D problem

2.2 내삽 및 기존 Orphan Cell 처리 방법

Bilinear 내삽 및 trilinear 내삽은 다음과 같다.

$$Q_{i,j}^{n+1} = \sum_{i,j}^{2^m} W_{i,j}^{n+1} N_{i,j} \tag{1}$$

여기서 $N_{i,j}$ 는 iso-parametric transformation이며, m 은 유동장의 차원을 나타낸다. 그림 3과 같이 내삽에 필요한 피 내삽점이 없는 경우 기존의 중첩격자 기법에서는 인접한 격자점의 유동 정보를 필요한 피내삽점에서의 유동정보로 대체하여, 내삽을 수행, Orphan Cell을 처리하였다. 그러나 이러한 방법은 Orphan Cell의 존재를 인식한 후 교차 영역을 재구성 하는 수준이기 때문에 Orphan Cell에 대한 근본적인 해결책이 될 수 없다.

3 이동최소자승법(Moving Least Square Method)

무요소 보간기법은 크게 이동최소자승법과 Kernel estimate 법, 그리고 Partition of Unity 로 나뉘어 진다. 이중 이동최소자승법은 임의로 주어진 점들을 이용하여 정확한 근사가 가능하여 무요소법에 최적의 방법이라 알려져 있다[4]. 그러나 변위경계 조건 부여가 어려우며, 사용하는 함수 형태가 단순 다항식이 아니므로 수치 적분이 다른 보간 방법에 비해 어렵다는 단점 또 한 가지고 있다.

Fig. 4에서와 같이 임의로 주어진 N_{node} 개의 노드 \hat{u}_i 로부터, 근사되는 $u(x)$ 는

$$u(x) \cong u^h(x) = p^T(x)a(x) , \text{ for all } x \in \Omega \tag{2}$$

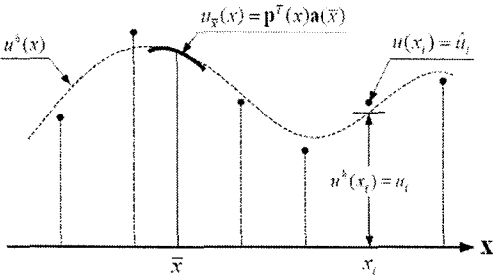


Fig. 4 Conceptual Explanation of MLS (Moving Least Square) Method.

여기에서

$$p^T(x) = [p_1(x), p_2(x), \dots, p_{N_{basis}}(x)] \quad (3)$$

n 차원 이라면, $N_{basis} = n + 1$ 이 되며, $a(x)$ 는 계수벡터이다. 여기에서 $a(x)$ 는 임의의 근사 점 \bar{x} 에서 오차를 최소화 시키는 값으로 결정 된다.

$$u(x) \cong u_{\bar{x}}(x) = p^T(x)a(\bar{x}) \quad (4)$$

근사오차는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$J_{\bar{x}}(b) = \sum_{i=1}^{N_{node}} w_i(\bar{x}) [p^T(x_i)b - \hat{u}_i]^2 \quad (5)$$

$$= [pb - \hat{u}]^T w(\bar{x}) [pb - \hat{u}]$$

여기에서 $w(\bar{x})$ 는 가중치 함수이다. 근사오차 J 의 최소값은 stationarity condition에 의해 $0 = \frac{\partial J_{\bar{x}}(b)}{\partial b}$ 을 만족할 때 얻어진다. 즉,

$$p^T w(\bar{x}) P b = p^T w(\bar{x}) \hat{u}, \text{ or } A(\bar{x}) b = B(\bar{x}) \quad (6)$$

식 (6)으로부터 근사오차를 최소화하는 계수벡터는 다음과 같다.

$$a(\bar{x}) = \begin{Bmatrix} a_1(\bar{x}) \\ a_2(\bar{x}) \\ \vdots \\ a_{N_{basis}}(\bar{x}) \end{Bmatrix} = b, \forall \bar{x} \in \Omega \quad (7)$$

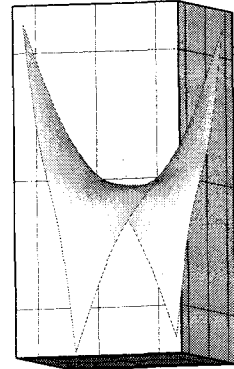


Fig. 5 Original Function

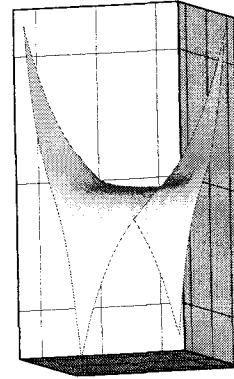


Fig. 6 Approximated Function with MLS

그러므로 전체 영역에서의 근사 값 $u(x)$ 는 다음과 같고

$$u(x) \cong u^h(x) = p^T(x)a(x) \quad (8)$$

$$= p^T(x) A^{-1}(x) B(x) \bar{u}$$

$$= \sum_{i=1}^{N_{node}} \sum_{k=1}^{N_{basis}} p_k(x) [A^{-1}(x) B(x)]_{ki} \hat{u}_i$$

형상함수 ϕ 를 식 (9)와 같이 도입하면,

$$\phi_i = \sum_{k=1}^{N_{basis}} p_k(x) [A^{-1}(x) B(x)]_{ki} \bar{u}_i \quad (9)$$

그러면 식 (8)은 다음과 같이 간단히 쓸 수 있다.

$$u(x) \approx u^h(x) = \sum_{i=1}^{N_{node}} \phi_i \hat{u}_i \quad (10)$$

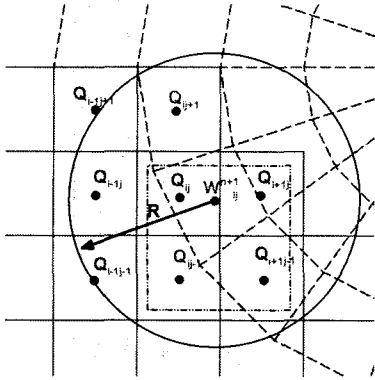


Fig. 7 MLS for Normal Interpolation Point, $W_{i,j}^{m+1}$.

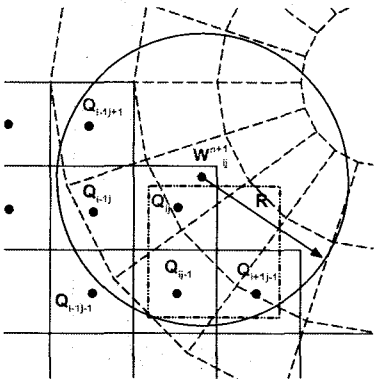


Fig. 8 MLS for Orphan Cells, $W_{i,j}^{m+1}$

MLS기법의 정확도를 검토하기 위하여 다음 식 (11)의 함수를 MLS로 근사한 함수와 원함수와 비교하여 보았다.

$$u(x,y) = (x+y)^4 - (x-y)^4 \tag{11}$$

Fig. 5에는 식 (11)을 각 축으로 20 point를 등 간격으로 구하여 그린 그림을 도시하였다. 또한, Fig. 6에는 25 point에서의 함수값으로 근사한 함수를 도시하였다. 그림에는 비교를 위해 Fig. 5와 동일한 point에서 그 결과를 도시하였다. Fig. 5와 비교할 때 그 결과가 매우 정확함을 확인하였다.

4. 이동최소자승법과 중첩격자기법

앞에서 언급하였듯이 중첩격자기법으로의 이동 최소 자승법의 적용은 내삽과정의 대체이다. Fig. 7에는 내삽과정을 이동최소자승법으로 대체한 모습이다. 0형 격자계(점선)의 기존 내삽점인 $W_{i,j}^{m+1}$ 은 사각형 격자계(실선)로 부터의 정보 전달

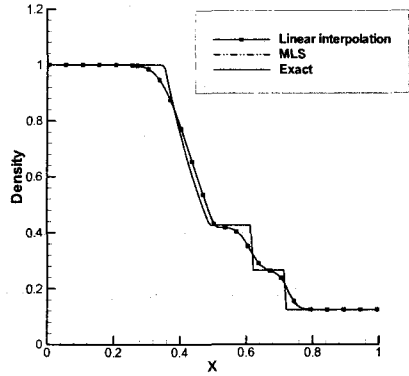


Fig. 9 Computational Results without Orphan Cells

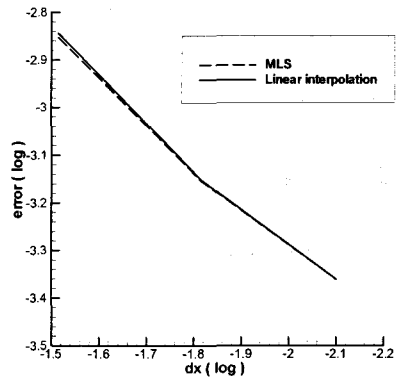


Fig. 10 Grid Convergence Test without Orphan Cell

을 위해 반경 R (Radius of Support) 내의 노드들을 포획한다. 포획된 노드들의 분포로부터 $W_{i,j}^{m+1}$ 의 값이 근사를 통해 얻어진다.

이러한 과정을 Orphan Cell 이 발생한 지점에 적용하면 다음 그림 8와 같다. 앞의 Fig. 7과는 달리 내삽과정에 사용되는 셀이 하나 부족함을 알 수 있다.(검은색 사각형). 따라서 내삽점 $W_{i,j}^{m+1}$ 은 Orphan Cell이 되어 내삽을 수행 할 수 없는 지점이 된다. 하지만 이동최소자승법을 적용하면, 반경 R 내의 포획된 노드들로부터 근사값을 유추 할 수 있다. 또한 두 내삽과정은 피내삽점의 수만 다르기 때문에 같은 프로그램으로 내삽을 수행할 수 있다.

5. 적용 결과

MLS가 중첩격자계의 내삽방법으로 사용될 수 있는가를 확인하기 위하여 Sod의 문제[5]를 해석하여 보았다. 초기의

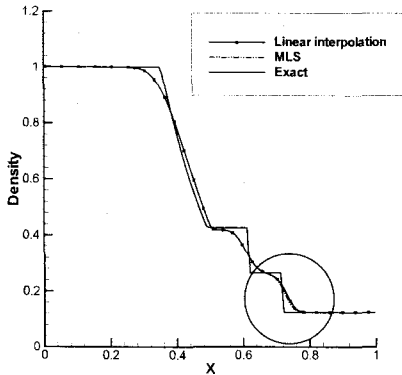


Fig. 11 Computational Results with Orphan Cell

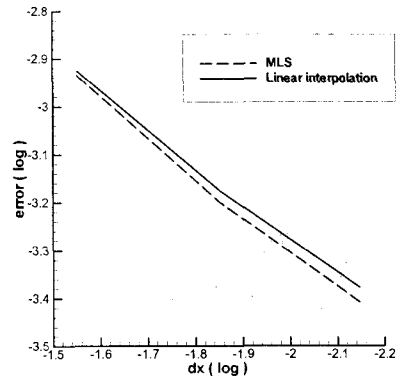


Fig. 13 Grid Convergence Test with Orphan Cells

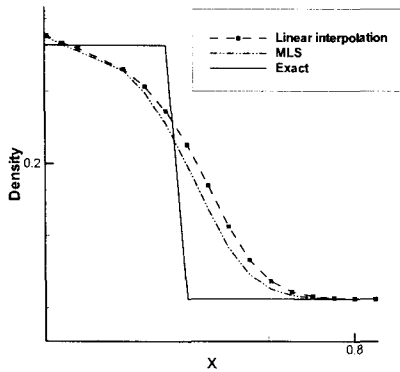


Fig. 12 Close-up View Near Overlapped Region

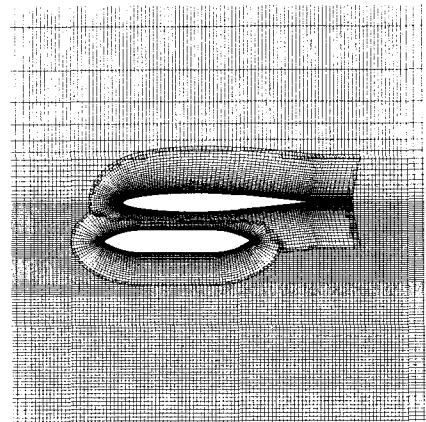


Fig. 14 Grid System for 2-Dimensional Wing Store Problem

밀도비와 압력비는 각각 8과 10이다. 사용된 격자계는 3개의 구역격자로 구성되어 있다. Fig. 9에는 교차영역이 충분하여 2층의 내삽점을 구성하였음에도 orphan cell이 없었다. 비교를 위하여 그림에는 엄밀해도 같이 도시하였다. 그림에서 보듯이 MLS를 이용할 때 선형보간을 사용한 기존의 중첩격자 기법과 유사한 정확도의 결과를 얻을 수 있음을 확인할 수 있다.

Fig. 10에는 두 중첩격자기법을 사용한 경우 격자의 크기에 따른 수렴성을 검토하여 보았다. 이때 오차는 다음과 같이 정의하였다.

$$e = \frac{1}{N} \sqrt{\sum (\rho - \bar{\rho})^2} \quad (12)$$

여기에서 N 은 cell의 수이며, ρ 는 계산으로 얻은 밀도이고, $\bar{\rho}$ 는 엄밀해이다. 가로축은 3개의 구역격자 크기의 평균이다. 그림에서 보듯이 두 중첩격자기법의 차이는 거의 없는 것을 보여주고 있다. 또한 수렴도의 기울기[6]는 이론적인 값 1

에 근접함을 알 수 있다.

Fig. 11은 교차영역을 최소화하여 Orphan Cell을 $x = 0.72$ 부근에 고의로 도입한 결과이다. 그림에서 보듯이 두 중첩격자기법 해의 차이가 나타나고 있다. Fig. 12에는 Orphan Cell이 존재하는 부분을 확대하여 도시하였다. 그림에서 볼 수 있듯이 MLS를 사용한 결과가 엄밀해에 더 근접한 것을 알 수 있다.

Fig. 13에는 Orphan Cell이 있을 경우 격자 수렴도를 도시하였다. MLS의 결과가 선형 내삽방법을 이용한 결과보다 우수함을 보여주고 있다. 수렴도의 기울기도 Orphan Cell이 없는 경우와 유사하게 1에 근접함을 알 수 있다.

Fig. 14에는 참고문헌[7]에서 제시한 2차원 익형 외부장착물 문제에 사용된 격자계를 도시하였다. 사용된 격자계는 각각 148×145 , 189×31 , 141×25 이다. 자유류의 마하수는 $M_\infty = 0.6$ 이다. 1차원 문제와 동일하게 2층의 내삽점을 각 구역격자 외곽에 구성하였다. 이 경우에는 기존 중첩격자기법으로도 Orphan Cell이 발생하지 않는 경우이다. Fig. 15에는

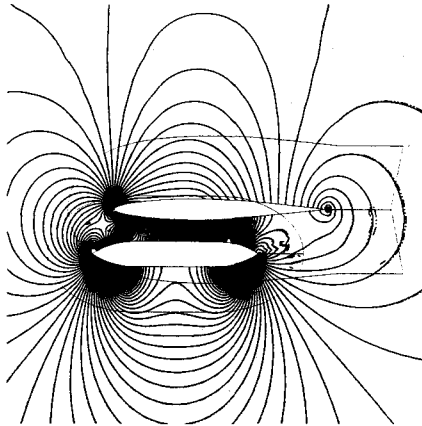


Fig. 15 Isobar Contour for 2-Dimensional Wing Store Problem

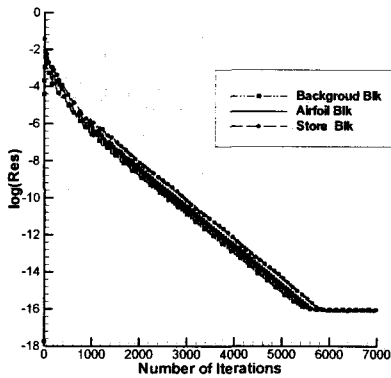


Fig. 16 Convergence History

bilinear interpolation과 MLS를 사용한 중첩격자기법의 결과를 같이 도시하였다. 그림에는 등압력선을 도시하였다. Bilinear interpolation의 경우에는 실선을 MLS는 점선을 이용하였다. 두 등압력선이 거의 차이가 없음을 알 수 있다.

Fig. 16에는 MLS기법을 이용한 경우 수렴도를 보여주고 있다. 이때 CFL수는 10을 사용하였다. 7000회의 반복계산으로 기계 영(Machine Zero)으로 수렴함을 알 수 있다.

6. 결론 및 향후 과제

본 연구에서는 중첩격자기법에서 발생하는 Orphan Cell 문제를 해결하기 위하여 이동최소자승법을 도입하였다. 결과로부터 내삽을 이동최소자승법으로의 대체가 가능하며, Orphan Cell 문제에서 기존 내삽을 이용한 중첩격자기법 보다 자유로워짐을 확인 하였다. 앞으로는 점성 및 비정상 문제와 3차원 문제의 적용 가능성 및 그 정확도에 대한 연구를 수행할 예정이다.

후 기

본 논문에서 수행한 연구는 한국학술진흥재단의 연구비 지원으로 이루어 졌음을 밝힙니다(KRF-2006-D00039). 저자는 이러한 학술 지원에 감사드립니다.

참고문헌

- [1] J.L. Steger and F.C. Dougherty and J.A. Benek, 1983, "A Chimera Grid Scheme," *ASME FED*, Vol.5, pp.59-63.
- [2] Atluri, S.N., Cho, J.Y., Kim, H.G., 1999, "Analysis of thin beams, using the meshless local Petrov-Galerkin method, with generalized moving least squares interpolations," *Computational Mechanics*, Vol.24, pp.334-347.
- [3] 이승수, 김병규, 류세현, 채은정, 이관중, 2006, "날개 전개에 따른 무장분리 특성해석," *국방과학연구소*.
- [4] Atluri, S.N., 2004, "The Meshless Local-Petrov-Galerkin Method for Domain & BIE Discretizations," *Tech Science Press*, Forsyth, GA.
- [5] Sod, G.A., 1978, "Numerical Methods in Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws," *J. Comput. Phys.*, Vol.27, pp.1-31.
- [6] Roach, P.J., 1998, *Verification and Validation in Computational Science and Engineering*, Hermosa Publishers, Albuquerque, NM.
- [7] 이승수, 박민우, 2000, "외부장착물 분리운동해석 S/W(MSAP) 개발연구," *국방과학연구소*, MADC-401-000200.