

수동적층보의 스펙트럴요소 해석

Spectral Element Analysis of a PCLD beam

유성준*·이우식**

You, Sungjun · Lee, Usik

ABSTRACT

Spectral element method (SEM) is introduced for the fully coupled structural dynamic problems. In this paper, the beam with passive constrained layered damping (PCLD) treatments is considered as a representative problems. The beam consists of a viscoelastic layer that is sandwiched between the base beam structure and an elastic layer. The fully coupled equations of motion for a PCLD beam are derived. The equations of motion are derived first by using Hamilton's principle. From this equations of motion, the spectral element is formulated for the vibration analysis by use of the SEM. As an illustrative example, a cantilevered beam is considered. It is shown that, as the thickness of VEM layer vanishes, the results become a simple layer beam's that.

Key words: Spectral Analysis, Hamilton's principle, Coupled equations of motion, PCLD beam.

1. 서론

그 동안 다양한 형태의 적층보에 대한 많은 연구가 수행되어 왔다. Hess (1969)는 단순 적층보 (elastic-elastic two-layered beam)를, Oberst (1952)는 수동감쇠 적층보 (elastic-VEM two-layered beam)를, Kerwin (1959)과 Mead, Markus (1969), Yan, Dowell (1972), Mead (1982), Bai, Sun (1993)은 3층의 구조를 가지는 수동감쇠 적층보 (elastic-VEM-elastic three-layered beam: PCLD beam)를 연구하였다. 또 Crawley와 de Luis (1987), Shi와 Atluri (1990)는 단순 적층보의 탄성층 대신 압전소자를 부착한 능동 적층보 (elastic-PZT two-layered beam)를, Baz (1993)와 Liao (1997)는 점탄성층을 구속하는 탄성층을 능동제어기능을 가지는 압전 소자로 비균 능동감쇠 적층보 (elastic-VEM-PZT three-layered beam: ACLD beam)를 연구하였다. 본 논문에서 수동적층보는 탄성재질의 기반층 위에 감쇠특성이 우수한 재료로 구성된 점탄성층이 부착되고, 마지막으로 점탄성층을 구속하는 탄성재질의 보가 가장 위층에 부착된다. 이러한 복합 구조물에 대해서 만족할만한 구조 동특성을 얻기 위해 두 가지 중요한 공학적 문제가 제기되어 왔다. 첫 번째는, 어떠한 방법으로 신뢰할 수 있는 구조적 모델을 도출할 것인가 하는 문제이고, 두 번째는, 도출한 모델에 대한 정확한 해를 어떻게 이끌어 낼 것인가 하는 문제이다.

본 논문에서는 (1) 수동적층보에 대한 연성된 운동방정식과 경계조건을 해밀턴의 원리를 이용하여 유도하고, (2) 유도된 연성된 운동방정식과 경계조건을 이용하여 스펙트럴요소를 유도하였다. 3층으로 이루어진 수동적층보의 점탄

* 학생회원 · 인하대학교 기계공학과 석사과정 Email: yougl@hanmail.net

** 정회원 · 인하대학교 기계공학과 교수 Email: ulee@inha.ac.kr

성층의 두께를 점점 작게 했을 때, 고유진동수와 동적응답이 2층으로 이루어진 단순적층보의 결과에 수렴하는지에 대해서 검토하였다.

2. 운동방정식

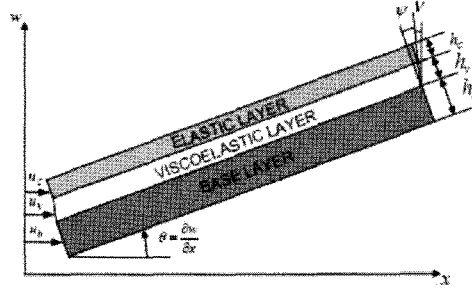


Fig. 1 Geometry of PCLD beam

Fig. 1에서 u_b 와 u_v , u_c 는 각각 기반층과 점탄성층, 탄성층의 중립선에서의 축방향 변위를 나타낸다. 해밀톤의 원리를 적용하면 다음과 같은 운동방정식과 경계조건을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} EI_w w'''' + \rho A \ddot{w} &= -\alpha \ddot{u}_b + \beta u_b'' + \gamma \dot{w}'' - \varepsilon_1 \dot{\psi}' + \varepsilon_2 \psi'''' \\ EA u_b'' - \rho A \ddot{u}_b &= -\alpha \dot{w}' + \beta w'' + \varepsilon_3 \dot{\psi} - \varepsilon_4 \psi'' \\ EI_\psi \psi'' - \rho I \dot{\psi} &= -\varepsilon_1 \dot{w}' + \varepsilon_2 w'' + \varepsilon_3 \dot{u}_b - \varepsilon_4 u_b'' + A_v (G \circ \psi) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \rho A &= \rho_b A_b + \rho_v A_v + \rho_c A_c, & \rho I &= \rho_v I_v + \rho_v A_v h_v^2 / 4 + \rho_c A_c h_c^2 \\ \alpha &= \rho_v A_v h_1 / 2 + \rho_c A_c h_2 / 2, & \beta &= E_v A_v h_1 / 2 + E_c A_c h_2 / 2 \\ \gamma &= \rho_v I_v + \rho_v A_v h_1^2 / 4 + \rho_c A_c h_2^2 / 4, & EA &= E_b A_b + E_v A_v + E_c A_c \\ EI_w &= E_b I_b + E_v (I_v + A_v h_1^2 / 4) + E_c (I_c + A_c h_2^2 / 4), & EI_\psi &= E_v I_v + E_v A_v h_v^2 / 4 + E_c A_c h_c^2 \\ \varepsilon_1 &= \rho_v I_v + \rho_v A_v h_v h_1 / 4 + \rho_c A_c h_v h_2 / 2, & \varepsilon_2 &= E_v I_v + E_v A_v h_v h_1 / 4 + E_c A_c h_v h_2 / 2 \\ \varepsilon_3 &= \rho_v A_v h_v / 2 + \rho_c A_c h_v, & \varepsilon_4 &= E_v A_v h_v / 2 + E_c A_c h_v \\ h_1 &= h_b + h_v, & h_2 &= h_b + 2h_v + h_c \end{aligned} \quad (2)$$

3. 스펙트럴요소 해석

구조물의 고유진동수는 고유치문제로부터 공식화된다. 고유치문제를 공식화하기 위하여 수동적층보의 자유진동을 생각해본다. 식 (1)의 일반해는 DFT (discret Fourier transform) 이론 이용하여 다음과 같이 표현한다.

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^N W_n(x) e^{i\omega_n t}, \quad u_b(x,t) = \sum_{n=1}^N U_n(x) e^{i\omega_n t}, \quad \psi(x,t) = \sum_{n=1}^N \Psi_n(x) e^{i\omega_n t} \quad (3)$$

식 (3)을 식 (1)에 대입하고 시간에 관련된 항들을 모두 소거하면 다음의 세 개의 연성된 미분방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} EI_w W'''' - \omega^2 \rho A W &= \omega^2 (\alpha U' - \gamma W'' + \varepsilon_1 \Psi') + \beta U'' + \varepsilon_2 \Psi'''' \\ EA U'' + \omega^2 \rho A U &= \omega^2 (\alpha W' - \varepsilon_3 \Psi) + \beta W'' - \varepsilon_4 \Psi'' \\ EI_\psi \Psi'' + \omega^2 \rho I \Psi &= \omega^2 (\varepsilon_1 W' - \varepsilon_3 U) + \varepsilon_2 W'' - \varepsilon_4 U'' + A_v G_{Re} \Psi \end{aligned} \quad (4)$$

식 (4)의 일반해를 다음과 같이 가정한다.

$$W(x) = \sum_{i=1}^8 A_i e^{k_i x}, \quad U(x) = \sum_{i=1}^8 B_i e^{k_i x}, \quad \Psi(x) = \sum_{i=1}^8 C_i e^{k_i x} \quad (5)$$

여기서, $k_i (i=1,2,\dots,8)$ 는 파수이다. 식 (5)를 식 (4)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 분산관계식을 얻을 수 있다.

$$a_1 k^8 + a_2 k^6 + a_3 k^4 + a_4 k^2 + a_5 = 0 \quad (6)$$

여기서,

$$\begin{aligned} a_1 &= EA EI_w EI_\psi - \varepsilon_4^2 EI_w + 2\beta \varepsilon_2 \varepsilon_4 - EA \varepsilon_2^2 - EI_\psi \beta^2 \\ a_2 &= \omega^2 [-\rho I \beta^2 + 2\beta \varepsilon_1 \varepsilon_4 - \gamma \varepsilon_4^2 + \rho I EA EI_w - 2EI_w \varepsilon_3 \varepsilon_4 - 2EA \varepsilon_1 \varepsilon_2 + 2\beta \varepsilon_2 \varepsilon_3 + 2\alpha \varepsilon_2 \varepsilon_4 - \rho A \varepsilon_2^2 \\ &\quad + \gamma EA EI_\psi - 2\alpha \beta EI_\psi + \rho A EI_w EI_\psi + A_v G_{Re} (-EA EI_w + \beta^2)] \\ a_3 &= \omega^4 [\rho I EA \gamma - \varepsilon_1^2 EA + 2\beta \varepsilon_3 \varepsilon_1 - 2\rho I \alpha \beta + 2\alpha \varepsilon_1 \varepsilon_4 - 2\gamma \varepsilon_3 \varepsilon_4 - \varepsilon_3^2 EI_w + \rho A \rho I EI_w + 2\alpha \varepsilon_2 \varepsilon_3 \\ &\quad - 2\rho A \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \alpha^2 EI_\psi + \rho A EI_\psi \gamma] + \omega^2 [\rho A \varepsilon_4^2 - \rho A EA EI_\psi + A_v G_{Re} (-\gamma EA + 2\alpha \beta - \rho A EI_w)] \\ a_4 &= \omega^6 [2\alpha \varepsilon_1 \varepsilon_3 - \varepsilon_3^2 \gamma - \rho A \varepsilon_1^2 - \alpha^2 \rho I + \gamma \rho A \rho I] + \omega^4 [2\rho A \varepsilon_3 \varepsilon_4 - \rho A \rho I EA - \rho A^2 EI_w \\ &\quad + A_v G_{Re} (-\rho A \gamma + \alpha^2)] + \omega^2 [\rho A EA A_v G_{Re}] \\ a_5 &= \omega^6 [\rho A \varepsilon_3^2 - \rho A^2 \rho I] + \omega^4 [\rho A^2 A_v G_{Re}] \end{aligned} \quad (7)$$

식 (6)으로부터 8개의 파수 k 를 구한 후 이를 이용하여 식 (4)의 일반해를 다음과 같이 나타낸다.

$$W(x) = \sum_{i=1}^8 A_i e^{k_i x} = [\Phi(x)]\{A\}, \quad U(x) = \sum_{i=1}^8 B_i e^{k_i x} = [\Phi(x)]\{B\}, \quad \Psi(x) = \sum_{i=1}^8 C_i e^{k_i x} = [\Phi(x)]\{C\} \quad (8)$$

여기서,

$$[\Phi(x)] = \begin{bmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & e^{k_3 x} & e^{k_4 x} & e^{k_5 x} & e^{k_6 x} & e^{k_7 x} & e^{k_8 x} \\ (k_2 = -k_1, k_4 = -k_3, k_6 = -k_5, k_8 = -k_7) \end{bmatrix} \quad (9)$$

계수 $\{A\}$, $\{B\}$, $\{C\}$ 의 관계는 식 (9)를 식 (4)에 대입하여 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} \{B\} &= [\text{diagonal}(\lambda_i)]\{A\} \\ \{C\} &= [\text{diagonal}(\mu_i)]\{A\} \end{aligned} \quad (10)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \left[(\beta \varepsilon_2 - EI_w \varepsilon_4) k_i^6 + \omega^2 (\beta \varepsilon_1 + \alpha \varepsilon_2 - EI_w \varepsilon_3 - \gamma \varepsilon_4) k_i^4 \right. \\ &\quad \left. + \left\{ (\alpha \varepsilon_1 - \gamma \varepsilon_3) \omega^4 + \rho A \varepsilon_4 \omega^2 \right\} k_i^2 + \rho A \varepsilon_3 \omega^4 \right] / \Delta_i \\ \mu_i &= \left[(EA EI_w - \beta^2) k_i^6 + \omega^2 (EA \gamma + \rho A EI_w - 2\alpha \beta) k_i^4 \right. \\ &\quad \left. - \left\{ (\alpha^2 - \gamma \rho A) \omega^4 + \rho A EA \omega^2 \right\} k_i^2 - \rho A^2 \omega^4 \right] / \Delta_i \\ \Delta_i &= \left\{ (EA \varepsilon_2 - \beta \varepsilon_4) k_i^4 + \omega^2 (EA \varepsilon_1 + \rho A \varepsilon_2 - \beta \varepsilon_3 - \alpha \varepsilon_4) k_i^2 + \omega^4 (\rho A \varepsilon_1 - \alpha \varepsilon_3) \right\} k_i \end{aligned} \quad (11)$$

Fig. 2의 스펙트럴절점 자유도는 계수 $\{A\}$ 의 함수로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\{v\} = [P(\omega)]\{A\} \quad (12)$$

힘-변위 관계식에 의하여 Fig. 2에서 정의된 스펙트럴 절점의 힘과 모멘트는 계수 $\{A\}$ 에 관해서 다음과 같이 표현된다.

$$\{f\} = [Q(\omega)]\{A\} \quad (13)$$



Fig. 2 Free Body Diagram

식 (12)에서 (13)을 이용하면, 다음과 같은 스펙트럴 절점에 대한 힘-변위 관계식을 얻는다.

$$\{f\} = [Q(\omega)][P(\omega)]^{-1}\{y\} = [K(\omega)]\{y\} \quad (14)$$

4. 수치예제

본 논문에서 수동적층외판보를 수치예제로써 해석을 수행하였다. 이 수동적층외판보는 탄성재료의 기반층 위에 감쇠특성이 우수한 재료로 구성된 점탄성층이 부착되고, 마지막으로 점탄성층을 구속하는 탄성재료의 보가 가장 위층에 부착된다. 점탄성층은 단항 GHM 모델로 표현하였다. 수동적층보는 길이가 261.6 mm 이고, 기반층과 점탄성층, 탄성층 모두 12.7 mm 로 같은 너비를 가진다. 기반층의 두께 (h_b)는 2.86 mm 이고, 탄성계수 (E_b)가 71 GPa, 밀도 (ρ_b)가 2700 kg/m^3 이다. 탄성층의 두께 (h_c)는 0.762 mm이고, 탄성계수 (E_c)가 64.9 GPa, 밀도 (ρ_c)가 7600 kg/m^3 이다. 점탄성층의 소재는 3M ISD 112 이고 구체적인 물성치는 두께 (h_v)가 0.25 mm 이고, 밀도 (ρ_v)가 1250 kg/m^3 이다. 그리고 점탄성층의 탄성계수는 0으로 하였다. 외력은 보의 자유단에 0초부터 0.0001초간 10 N 크기의 사각파의 형태로 가진했다. Fig. 3 (a), (b), (c)는 수동적층보의 점탄성층의 두께가 점점 얇아졌을 때 그 동적응답이 (d)의 2층 단순적층보의 동적응답과 비슷해짐을 보여준다. 또한 Table 1에서 알 수 있듯이 점탄성층의 두께가 얇아짐에 따라 그 고유진동수가 2층 단순적층보에 수렴함을 알 수 있다.

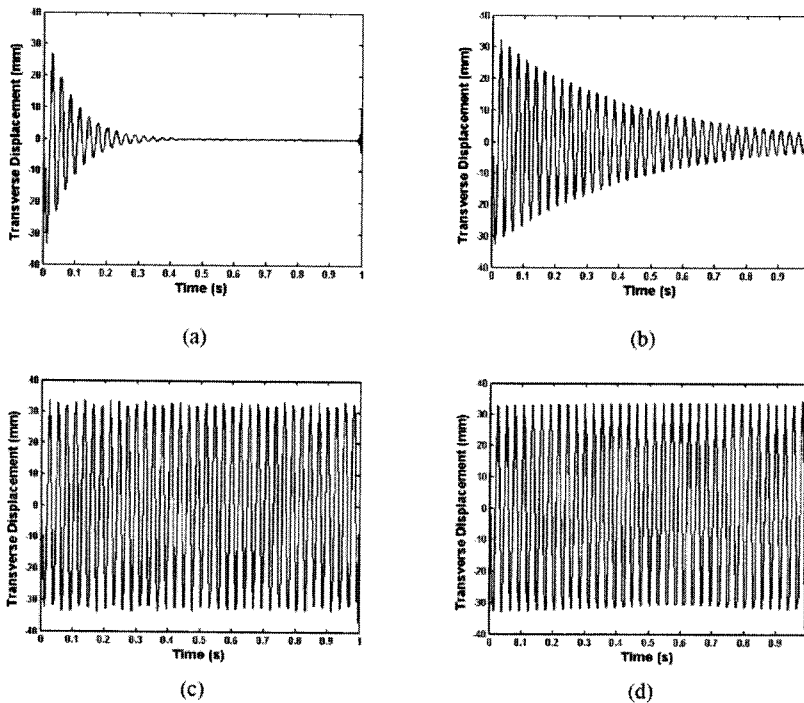


Fig. 3 Dynamic response of PCLD beam and two-layer beam ((a) $h_v = 0.25 \text{ mm}$,
 (b) $h_v = 0.025 \text{ mm}$, (c) $h_v = 0.000025 \text{ mm}$ (d) 2층단순적층보)

Table 1 Viscoelastic-layer thickness dependence of natural frequency for a cantilevered uniform PCLD beam

Mode	$\omega_{three-layer} (Hz)$			$\omega_{two-layer} (Hz)$
	$h_v = 0.25mm$	$h_v = 0.025mm$	$h_v = 0.000025mm$	
1 st	33.789	36.043	36.632	36.633
2 nd	196.45	221.61	229.52	229.53
3 rd	527.29	608.06	642.44	642.49
4 th	985.13	1153.4	1258.3	1258.4

5. 결론

서로 다른 재료로 구성된 수동적층보에 대한 운동방정식을 유도하였다. 유도된 운동방정식에 대한 스펙트럴요소해석을 수행하였다. 이 스펙트럴요소를 이용하여 동특성 해석을 수행하였고, 수동적층보의 점탄성층 두께를 점점 작게 하여 고유진동수와 동적응답을, 2층으로 이루어진 단순적층보의 고유진동수와 동적응답과 비교하였다. 그 결과 점탄성층이 얇아질수록 단순적층보의 운동특성에 수렴한다는 사실을 확인하였다.

참고문헌

- Bai, J. M. and Sun, C. T., 1993, "A Refined Theory of Flexural Vibration for Viscoelastic Damped Sandwich Beams." *Proc. Damping '93*, San Francisco, CA, pp. 319~329.
- Banerjee, J. R., 1989, "Coupled Bending-Torsional Dynamic Stiffness Matrix for Beam Elements," *International Journal for Numerical Methods Engineering*, Vol. 28, pp. 1283~1298.
- Banerjee, J. R., Guo, S. and Howson, W. P., 1996, "Exact Dynamic Stiffness Matrix of a Bending-Torsion Coupled Beam Including Warping," *Computers & Structures*, Vol. 59, No. 4, pp. 613~621.
- Baz, A., 1993, "Active Constrained Layer Damping," *Proc. Damping '93*, San Francisco, CA, pp. 187~209.
- Christensen, R. M., 1982, *Theory of Viscoelasticity: an Introduction*, 2nd ed., Academic Press, Inc., New York.
- DiTaranto, R. A., 1965, "Theory of Vibratory Bending for Elastic and Viscoelastic Layered Finite-Length Beams," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 32, pp. 881~886.
- Doyle, J. F., 1997, *Wave Propagation in Structures*, 2nd Ed., Springer-Verlag, New York.
- Hess, M. S., 1969, "The End Problem for a Laminated Elastic Strip-I. the General Solution," *Journal of Composite Materials*, Vol.3, pp. 262~280.
- Kerwin, E.D., Jr., 1959, "Damping of Flexural Waves by a Constrained Viscoelastic Layer," *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 31, No. 7, pp. 952~962.
- Lee, U. and Kim, J., 2000a, "Determination of Non-Ideal Structural Boundary Conditions: a Spectral Element Approach," *AIAA Journal*, Vol. 38, No. 2, pp. 309~316.
- Lee, U. and Kim, J., 2000b, "Dynamics of Elastic-Piezoelectric Two Layer Beams Using Spectral Element Method," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, pp. 4403~4417.

- Lee, U. and Lee, J.**, 1999, "Spectral-Element Method for Levy-Type Plates Subject to Dynamic Loads," *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 125, No. 2, pp. 243~247.
- Lee, U.**, 2000, "Vibration Analysis of a Periodic Large Lattice Structure Using Spectral Transfer Matrix Method," *Engineering Structures*, Vol. 22, No. 6, pp. 681~690.
- Lesieutre, G. A. and Lee, U.**, 1996, "A Finite Element for Beams Having Segmented Active Constrained Layers with Frequency-Dependent Viscoelastics," *Smart Structures and Materials*, Vol. 5, pp. 615~627.
- Leung, A. Y. T. and Zhou, W. E.**, 1996, "Dynamic Stiffness Analysis of Laminated Composite Plates," *Thin-Walled Structures*, Vol. 25, No. 2, pp. 109~133.
- McTavish, D. J. and Hughes, P. C.**, 1993, "Modeling of Linear Viscoelastic Space Structures," *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 115, pp. 103~110.
- Mead, D. J.**, 1982, "A Comparison of Some Equations for the Flexural Vibration of Damped Sandwich Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 83, No. 3, pp. 363~377.
- Mead, D. J. and Markus, S.**, 1969, "The Forced Vibration of a Three-Layer, Damped Sandwich Beam with Arbitrary Boundary Conditions," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 10, No. 2, pp. 163~175.
- Lu, Y. P. and Douglas, B. E.**, "On the Forced Vibrations of Three-Layer Damped Sandwich Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 32, No. 4, pp. 513~516.
- Sadasiva Rao, Y. V. K. and Nakra, B. C.**, 1974, "Vibrations of Unsymmetrical Sandwich Beams and Plates with Viscoelastic Cores," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 34, No. 3, pp. 309~326.
- Wolfram, S.**, 1996, *The Mathematica Book*, 3rd ed., Wolfram Media/Cambridge University Press.
- Yan, M. J. and Dowell, E. H.**, 1972, "Governing Equations for Vibrating Constrained-Layer Damping Sandwich Plates and Beams," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 39, pp. 1041~1046.