

# 자연요소법에 기초한 회전자유도가 없는 평판요소

## Rotation-Free Plate Element Based on the Natural Element Method

조진래\* · 최주형\*\* · 이홍우\*\*\*

Cho, Jin-Rae · Choi, Joo-Hyoung · Lee, Hong-Woo

---

### ABSTRACT

A polygon-wise constant curvature natural element approximation is presented in this paper for the numerical implementation of the abstract Kirchhoff plate model. The strict continuity requirement in the displacement field is relaxed by converting the area integral of the curvatures into the boundary integral along the Voronoi boundary. Curvatures and bending moments are assumed to be constant within each Voronoi polygon, and the Voronoi-polygon-wise constant curvatures are derived in a selective manner for the sake of the imposition of essential boundary conditions. The numerical results illustrating the proposed method are also given.

**Keywords:** Kirchhoff plate element,  $C^1$ -continuity, Natural element method, Voronoi polygons, Constant curvatures and bending moments, Static and free vibration analyses.

---

### 1. 서론

Plate와 shell과 같은 얇은 탄성구조물은 다른 두 가지 차원에 비해 두께가 작은 특징을 갖고 있다. 이러한 특별한 기하학적 특징은 두께방향으로 저차의 다항식을 사용하는 변위와 응력과 같은 여러 가지 흥미로운 양들에 대한 근사화를 유발한다. 저차이론들은 Kirchhoff 가정이 두께가 제로가 될 때 지배적이기 때문에 구조물의 두께가 상당히 작을 때 적절한 정확도를 제공한다. 그러나 동시에 이러한 이론들은 수치해석에 있어서 종종 전단 잠금이 나타난다. 이에 관하여서 얇은 탄성구조물의 제한적 해를 찾기 위해서 이론적, 수치 해석적으로 Kirchhoff plate 모델이 적용되었다. 엄격한 Kirchhoff 구속조건들에 의해 유도되는 plate 휨의 biharmonic 방정식이 일반적인 plate 영역에 대해 이론적으로 얻어졌다. 그러나 수치해석에서는 형상함수에 있어 엄격한  $C^1$ -연속성이 요구된다.

조사한 바에 따르면, 무요소법에서는 얇은 탄성구조물의 수치해석에서 전단 잠금을 극복하기 위한 어떠한 유용한 기법도 제시되지 않았다. 이러한 이유는 무요소법에서 대부분의 연구가 수치적분과 필수 경계조건 처리에 초점이 맞춰져 있을 뿐만 아니라 현재의 주요한 목표도 자연요소법에서 회전이 자유로운 유한요소 정식화의 응용에 관심을 갖고 있기 때문이다. 처짐장은 구조물의 중앙면을 이산화한 비겹침 Voronoi 다각형의 향으로 정의되는 라플라스 보간 함수에 의해 근사화된다. 반면에 곡률과 굽힘 모멘트장은 다각형 내에서

---

\* 정회원 · 부산대학교 기계공학부 교수 Email: jrcho@pusan.ac.kr

\*\* 학생회원 · 부산대학교 기계설계공학과 박사과정 Email: jhchoi0124@pusan.ac.kr

\*\*\* 학생회원 · 부산대학교 기계설계공학과 박사과정 Email: leehongw@pusan.ac.kr

일정하다고 가정된다. 그리고 각각의 Voronoi 다각형 내에서의 값은 선택적 방법에서 필수경계조건의 종류에 따라 처질장의 도함수에 대한 경계적분을 평균면적화함으로서 보간된다. 결론적으로, 최종적인 자연요소 근사화는 각각의 라플라스 기저함수에 상응하는 절점 처짐만을 해결하기 위한 선형방정식이 된다. 필수경계조건은 강성행렬을 구성하는 부분 혹은 종류에 따른 최종 행렬방정식을 구성하는 부분에 부과된다. 그리고 절점과 같은 하중 벡터는 Delaunay 삼각형을 구성하는 뒤쪽 cell에 편리한 가우스 적분을 적용함으로서 수치적으로 적분된다.

현재 연구에 있어서, 주요한 관심은 다각형과 같은 일정한 곡률을 계산하기 위해 유도되는 선택적 수치 방법들이 성공적으로 제한된 해를 유도할 수 있는 지 없는지에 초점이 맞춰져 있다. 제안된 plate 모델의 타당성은 정적 그리고 자유진동해석의 수치실험을 통하여 검증되었다.

## 2. Plate 굽힘 문제의 정식화

Fig. 1(a)에 보이듯이, 분포하중  $q(\mathbf{x}; t)$ 을 받는 균일한 두께  $d$ 와 중간면(기준면)  $\omega \subset R^2$ 을 가지는 plate와 같은 구조물을 고려한다. Plate와 같은 구조물을 3차원 탄성체로 본다면, 물질영역  $\Omega \subset R^3$ 은 경계  $\partial\omega = \partial\omega \times [-d/2, d/2]$ 을 가지는  $\omega = \omega \times [-d/2, d/2]$ 에 의해 정의된다. 3차원 구성에서 정적 평형은 완벽한 3차원 탄성이론에 의해 지배되고, 변위장은 코시응력과 변형률로 구성된다고 잘 알려져 있다.

그러나 이러한 완전 탄성문제는 Fig. 1(b)에 나타난 것처럼 기준평면  $\omega$ 로 제한된 이론적인 plate의 굽힘 문제로 축약시킬 수 있다. 이 때 다음의 Kirchhoff 수직 조건을 만족하여야 한다.

$$\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y = 0, \quad \text{in } \omega \quad (1)$$

그리고 평균 곡률  $b = [b_x, b_y, b_z]^T$ 과 굽힘 모멘트 결과  $m = [m_x, m_y, m_z]^T$ 은 각각 다음과 같이 정의된다.

$$(b_x, b_y, b_z) = \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = \mathbf{L}^T w \quad (2)$$

$$(m_x, m_y, m_z) = \int_{-d/2}^{d/2} z (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dz \quad (3)$$

이러한 두 영역은 완전탄성이론에서 응력-변형률 관계의 다음 변형된 형태로 구성된다.

$$\mathbf{m} = \mathbf{D} \mathbf{b}, \quad \text{in } \omega \quad (4)$$

여기서  $\mathbf{D}$ 는 다음과 같이 탄성계수와 포아송비를 포함하는 재료 행렬이다.

$$\mathbf{D} = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

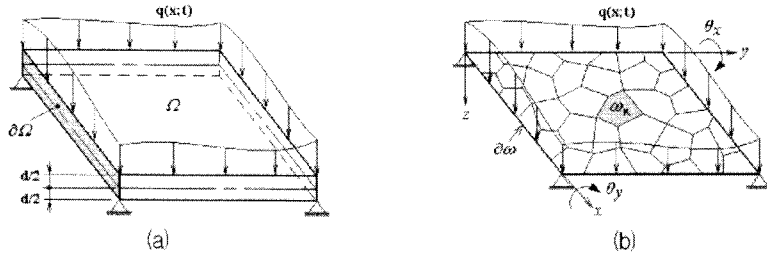


그림. 1. (a) 균일한 두께를 가진 plate와 같은 얇은 구조물 (b) 이론적 plate 모델

### 3. 일정곡률 자연요소 근사화

비겹침 부영역  $w_I$ 는 자연요소법에서는 Voronoi 다각형이 된다. 그리고 현재 연구에서는 곡률과 굽힘 모멘트가 각각의 Voronoi 다각형 내에서 일정하다고 가정한다. 그러면, 임의의 가상공간  $\{\delta \mathbf{b}, \delta \mathbf{m}\}^T$ 과 발산이론에 의해 다음처럼 I번째 Voronoi 다각형 안에서 다각형 내 일정 곡률  $\mathbf{b}_I$ 와 굽힘 모멘트  $\mathbf{m}_I$ 로 표현될 수 있다.

$$\mathbf{b}_I = \frac{1}{|\omega_I|} \int_{\omega_I} Lw \, dA = \frac{1}{|\omega_I|} \oint n \nabla_{\omega} w \, d\Gamma \quad (6)$$

$$\mathbf{m}_I = \bar{\mathbf{D}}_I \mathbf{b}_I, \quad \bar{\mathbf{D}}_I = \frac{1}{|\omega_I|} \int_{\omega_I} \mathbf{D} \, dA \quad (7)$$

식(6),(7)의 내부에 있는  $n$ 과  $\nabla_w$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} -n_x & 0 & -n_y \\ 0 & -n_y & -n_x \end{bmatrix}^T, \quad \nabla_w = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \right\}^T \quad (8)$$

반면에 이론적 plate 굽힘 모델의 동적평형방정식을 부분적분하고, 식(6)과 (7)를 대입함으로써 처짐장  $w$ 를 위한 다음의 약형식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{I=1}^N \oint_{\Gamma_I} (\mathbf{n} \nabla_{\omega} \delta w)^T \, d\Gamma \cdot \frac{\bar{\mathbf{D}}_I}{|\omega_I|} \oint_{\Gamma_I} \mathbf{n} \nabla_{\omega} w \, d\Gamma = \sum_{I=1}^N \int_{\omega_I} \delta w \left( q - \rho d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \, dA \quad (9)$$

그러면 약형식 (9)은 다음과 같이 선형과 자유진동해석을 동시에 만족해야 하는 선형방정식이 된다.

$$\sum_{I=1}^N \mathbf{K}^I \bar{\mathbf{w}} = \sum_{I=1}^N \mathbf{F}^I, \quad \sum_{I=1}^N (\mathbf{K}^I - \lambda^2 \mathbf{M}^I) \bar{\mathbf{w}} = 0 \quad (10)$$

여기서 절점당 강성, 질량행렬과 하중벡터는 각각 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{K}^I = \frac{1}{|\omega_I|} \mathbf{B}_I^T \bar{\mathbf{D}}_I \mathbf{B}_I \quad (11)$$

$$\mathbf{M}^I = \int_{\text{supp}(\phi_I)} \rho \, d\Phi^T \Phi \, dA \quad (12)$$

$$F^I = \int_{\text{supp}(\phi_I)} q \Phi dA \quad (13)$$

$M^I$ 와  $F^I$ 는 편리한 가우스적분을  $\text{supp}(\phi_I)$ 를 포함하는 Delaunay 삼각형에 적용함으로써 적분가능하다는 것에 주목할 만하다.

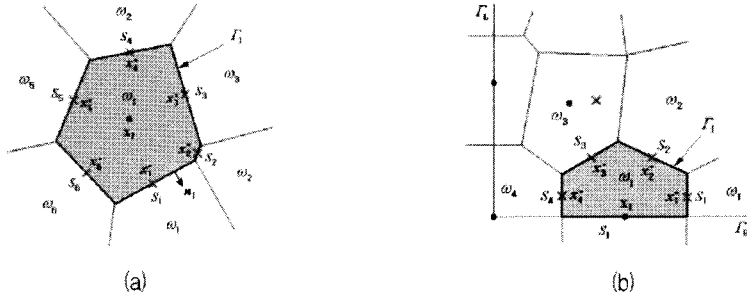


그림. 2. 다각형을 따라 선적분 (a) 내부절점 (b) 경계절점

#### 4. 수치실험

앞 절에서 유도된 수치적인 정식화를 수행하기 위하여 포트란 프로그래밍을 작성하였고, 가시화를 위해서 상업용 후처리 프로그램인 Tecplot을 이용하였다. 제안된 방법의 검증은 plate와 같은 얇은 탄성구조물의 정적과 자유진동해석을 통해 수행되었고, 절점별 질량행렬  $M^I$ 와 하중벡터  $F^I$ 의 수치적분을 위해서 3점 가우스 적분을 이용하였다. 수치적인 정확도(수렴정도)는 이론적 해와 비교를 통하여 평가되었다.



그림. 3. 해석 모델: (a) 균일한 분포하중을 받고 있는 사각형 plate와 같은 구조물 (b) 균일한 NEM 절점 (441개 절점).

그림3(a)는 100Pa의 균일한 하중을 받는 사각 plate와 같은 구조물을 나타내고 있다. 여기서 폭 a와 두께 d는 각각 1.0m,  $1 \times 10^{-5}$ m이다. 반면에 물성치는 탄성계수 210GPa, 포아송비 0.3, 밀도  $0.78 \text{ Pa} \cdot \text{sec}^2/\text{m}$ 이다. 대칭 문제이기 때문에 구조물의 1/4만 선택한다.

양쪽 고정과 단순지지 경우들이 필수경계조건 선택적 처리법을 검증하기 위해서 고려되었다. 수렴성 검증을 위해서 5개의 절점밀도(25, 121, 441, 961, 1681)가 선택되었다.

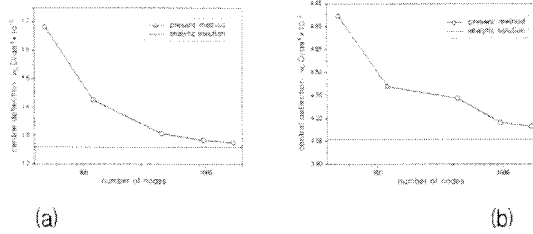


그림. 4. 측정된 중앙부 처짐의 비교 (a) 고정 (b) 단순지지

고정된 부분과 단순 지지된 부분에서 측정된 중앙부 처짐이 그림4(a)와 (b)에 각각 나타나 있다. 여기서  $Ed^3/12(1-\nu^2)$ 는 휨강성도를 나타낸다. 따라서 이론적 해는 고정된 사각 plate에서는  $w_c D/qa^4 = 1.26 \times 10^{-3}$ 이고, 나머지 경우는  $w_c D/qa^4 = 4.06 \times 10^{-3}$ 이다. 제안된 방법이 격자밀도가 증가함에 따라 이론 해에 일정하게 수렴하고 있는 것을 명확히 관찰할 수 있다. 이러한 결과는 Kirchhoff plate 모델의 수치해석을 위한 다각형 내 일정곡률 자연요소정식화와 선택적 방법에 의한 필수경계조건의 부여가 올바른 것을 증명해주고 있다.

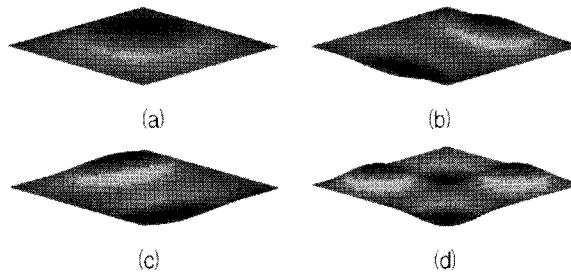


그림. 5. 4개의 최저차 모드 (1681 절점) : (a) (1,1) 모드, (b) (1,2) 모드, (c) (2,1) 모드 (d) (2,2) 모드.

다음으로 Kirchhoff plate 모델의 자유진동해석을 위해 제안된 방법의 적용을 평가하기 위해서 단순 지지된 plate와 같은 구조물의 고유진동수와 고유모드를 계산하였다. 정적해석과 다른 부분은 자연요소근사화를 위해 전체 모델을 선택하였다. 절점별 질량행렬  $M'$ 은 lump 되지 않았고, 관심있는 가장 낮은 고유진동수를 추출하기 위해서 Lanczos와 Jacobi 방법을 적용하였다. 그림5는1681개의 절점으로 구성된 균일한 자연요소에서 얻어지는 4개의 최저차 고유모드를 나타낸다. Reddy(1999)에 따르면, 모든 모서리가 단순지지된 사각 plate의 고유진동수는 다음과 같이 이론적으로 구할 수 있다.

$$\lambda_{(m,n)} = (m^2 + n^2) \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho d}} \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \infty \quad (14)$$

4가지 다른 절점 밀도에 따른 제안된 방법들에 의해 계산된 고유진동수가 표1에서 비교되었다. 여기서 괄호안의 수치 값은 상대오차  $\eta$ 을 나타낸다. 제안된 방법에 의해 계산된 최저고유진동수는 밀도가 증가함에 따라 균일하고 급속히 이론적 해에 접근하며, 절점수가 1681개일 때 최대상대오차가 2%이하가 된다. 일반적인 근사화와 달리, 제안된 방법에 따른 변위와 고유진동수는 각각 더 낮고 더 높은 값을 나타내었다. 이러한 이유는 제안된 방법이 혼합정식화를 기반으로 하고 있기 때문이다.

표 1 절점 수에 따른 최저고유진동수의 변화

Mode	Natural frequencies ( $rad/sec$ )					
	Analytic	Present method - number of nodes				
		25	121	441	961	1,681
(1,1)	30.994	23.815 (23.16%)	29.002 (6.43%)	30.217 (2.51%)	30.531 (1.49%)	30.668 (1.05%)
(1,2) (2,1)	77.486	44.265 (42.87%)	68.881 (11.11%)	74.787 (3.48%)	76.086 (1.81%)	76.591 (1.16%)
(2,2)	123.977	58.153 (53.09%)	105.151 (15.19%)	117.803 (4.98%)	120.713 (2.63%)	121.867 (1.70%)

## 5. 결론

처짐장에서  $C^1$ -연속성이 요구되는 Kirchhoff plate 모델의 수치실험을 위해서 다각형 내에서 일정한 곡률을 갖는 자연요소 근사화가 제시되었다. Plate와 같은 얇은 탄성구조물의 중간 면이 일련의 절점 함으로 구성된 여러 개의 비결침 Voronoi 다각형으로 이산화 되었다. 단지 처짐장만 라플라스 보간함수로 근사화되었고, 반면에 곡률장은 다각형 내에서 일정하고, 각각의 다각형 내의 일정 곡률은 다각형 경계를 따라  $\nabla_w w$ 를 선적분함으로서 보간된다. 이처럼, 엄격한  $C^1$ -연속성 요구조건이 성공적으로 만족되고, 행렬 방정식의 최종적인 선형시스템은 단지 절점의 처짐 해만 요구하다. 세 가지 종류의 필수경계조건은 곡률장 보간을 위한 경로 상에서  $\nabla_w w$ 의 도함수를 선택적으로 계산함으로서 쉽고, 엄격하게 부과할 수 있다. 대표적인 정적, 자유진동문제의 수치결과들로서 무요소 기반으로 제안된 Kirchhoff plate 모델은 격자수에 따라 안정적이고 급속한 수렴을 제공한다는 것을 확인할 수 있었다.

## 감사의 글

본 연구는 BK21 지원 사업으로 수행되었으며 이에 감사드립니다.

## 참고문헌

- Cho, J.R., Oden, J.T. (1997) Locking and boundary layer in hierarchical models for thin elastic structures, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 149, 33-48.
- Cho, J.R., Lee, H.W. (2006) A Petrov-Galerkin natural element method securing the numerical integration accuracy. *J. Mech. Sci. Technol.* 20(1), 94-109.
- Destuynder, Ph. (1985) A classification of thin shell theories. *Acta Applicandae Mathematicae* 4, 15-63.
- Oñate, E., Zárate, F. (2000) Rotation-free triangular plate and shell elements. *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 47, 557-603.
- Reddy, J.N. (1999) Theory and Analysis of Elastic Plates. *Taylor & Francis, MI.*
- Sukumar, N., Moran, B., Belytschko, T. (1998) The natural element is solid mechanics. *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 43, 839-887.