

# 혼합영역이 없는 확장무요소법

## An Extended Meshfree Method without the Blending Region

지 광 습\* • 티몬랏쑈\*\* • 김 지 환\*\*\*  
Zi, Goangseup • Timon Rabczuk • Kim, Ji Hwan

### ABSTRACT

A new type of extended element-free Galerkin method (XFEM) is proposed on this paper. The blending region which was inevitable in the extended finite element method and the extended meshfree method is removed in this method. For this end, two different techniques are developed. The first one is the modification of the domain of influence so that the crack tip is always placed on the edge of a domain of influence. The second method is the use of the Lagrange multiplier. The crack is virtually extended beyond the actual crack tip. The virtual extension was forced close by the Lagrange multiplier. The first method can be applied to two dimensional problems only. Lagrange multiplier method can be used in both two and three dimensions.

**Keywords:** *Extended element free Galerkin method(XEFG) · Local partition of unity · Cohesive cracks · Static and dynamic fractures*

### 1. 서 론

최근 개발된 확장유한요소법(XFEM)은 파괴문제들에 효율적 도구임이 증명되었다. 기존의 유한요소법과 달리 XFEM의 해영역은 균열에 의해 야기되는 불연속성을 가지고 있고, 유일한 단점은 균열 끝의 인접한 요소들에 접촉된 혼합영역(blending region)이다. 이러한 요소들은 부분적으로 혼합영역에서 확장되어지고, 요소들로 인한 국부단위분할은 일어나지 않아 해결책이 부정확하다.

Ventura은 XFEM의 개념을 선형탄성균열에 대한 무요소법으로 이끌어 나갔다. Rabczuk 과 Zi는 점성균열에 대한 XEFG를 개발하였다. XFEM처럼, 균열이 관통하는 영향영역은 계단함수(step function)에 의해 확장되고 균열끝을 포함하는 영향영역들은 속칭 가지함수(branch function)을 통해 확장한다. XEFG는 여러가지 정적 · 동적 파괴 문제에 적용되었다.

### 2. 무요소법

변위  $u$ 를 형상함수를 이용해서 표현하면 다음과 같다.

$$u(X, t) = \sum_{I \in W} \phi_I(X) u_I(t), \quad (1)$$

\* 정회원 • 고려대학교 건축 · 사회 환경공학과 조교수 Email: g-zi@korea.ac.kr

\*\* Mechanical Engineering Department University of Canterbury, New Zealand

\*\*\* 학생회원 • 고려대학교 건축 · 사회 환경공학과 석사과정 Email: jihwan@korea.ac.kr

여기서  $\Phi_I(X)$ 는  $X_I$ 에서 절점 I의 형상함수이고  $W$ 는 모든 절점의 집합이다. 그리고  $u_I$ 는 형상함수를 결정하는 매개변수이다. EFG방법에서, 형상함수는 아래처럼 구성된다.

$$\Phi_J(\mathbf{X}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{X})\mathbf{A}(\mathbf{X})^{-1}\mathbf{D}(\mathbf{X}_J) \quad (2)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}) = \sum_J \mathbf{p}(\mathbf{X}_J)\mathbf{p}^T(\mathbf{X}_J)W(\bar{r}_J; h_J) \quad (3)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{X}_J) = \sum_J \mathbf{p}(\mathbf{X}_J)W(\bar{r}_J; h_J) \quad (4)$$

여기서,  $\mathbf{p}$ 는 기저다항식(base polynomial),  $W$ 는 가중함수(kernel function)이다. 그리고  $r = \|X - X_J\|$ 는  $X_J$ 에서  $X$ 까지 거리이며,  $h_J$ 는 절점  $J$ 의 영향영역의 크기이다.

### 3. 변위 해 공간의 확장

균열로 인한 불연속성을 모델화하기 위해서는 식 (1)의 근사식은 다음과 같이 확장되어야 한다.

$$u(X, t) = u^0(X, t) + u^e(X, t) \quad (5)$$

여기서  $u^e$ 는 식 (1)에 의해서 정의되는 연속 변위영역이다. 그리고  $u^e$ 는 식 (5)에 의한 불연속 변위영역이다.

$$u^e(X, t) = \sum_{J \in e} u^{e,J}(X, t)$$

$e$ 는 영역 내 모든 균열들의 집합이고  $u^{e,J}$ 는 균열  $J$ 에 의해서 일어난 변위확장이다. 변위확장  $u^{e,J}$ 는 다음 식과 같다.

$$u^e(X, t) = \sum_{J \in W_J} \Phi_J(X) \Psi_J^J(X) a_J^J(t) \quad (6)$$

위의 식에서  $W_J$ 는 균열  $J$ 에 의해서 분리된 절점들의 영향영역 집합이며,  $\Psi_J^J$ 는 절점  $I$ 와 균열  $J$ 의 확장함수이다. 부호함수(sign function)확장은 Heaviside 함수 확장에 가깝고, 그 확장은 다음 식과 같다.

$$\Psi_I^J(X) = \text{sign}[f^J(X)] - \text{sign}[f^J(X_J)] \quad (7)$$

### 4. 균열의 시작과 확장

균열 시작과 확장에 대한 쌍곡선 상실 조건(the loss of hyperbolicity criterion)을 사용하였다. 그러므로 음파 텐서(acoustic tensor)  $Q$ 의 최소 고유값이 0보다 작거나 같으면 균열이 시작되거나 확장된다.

$$\min \text{eig}(Q) \leq 0 \quad \text{with } Q = n A n \quad (8)$$

여기서  $n = [\cos\theta \quad \sin\theta]$ 이고, 균열표면에 대한 법선 벡터이다.  $A = C^d + \sigma \otimes I$ ,  $\sigma$ 는 응력 텐서이고  $C^d$ 는 4차원 점선계수이다.

Belytschko은 균열확장 속도를 계산하기 위해 항상 일정한 속도로 움직이는 균열끝에서 쌍곡선 상 실 조건을 만족한다고 가정한 후, 접근법을 제안하였다. 국부해석(8)에서 얻어진 고유값은 모든 균열 끝에서 0에 가깝다. 즉,

$$\frac{D_e}{D_t} = 0 \quad (9)$$

여기서  $e = h \cdot Q \cdot h$ 는 hyperbolicity indicator이고  $h$ 는 국부해석(8)에서의 고유벡터이다.

## 5. 이산지배 방정식

운동량방정식의 약형(weak form)은 아래와 같다.

$$\delta W = \delta W_{\text{int}} + \delta W_{\text{kin}} - \delta W_{\text{ext}} - \delta W \quad (10)$$

여기서  $\delta W_{\text{int}}$ ,  $\delta W_{\text{kin}}$ ,  $\delta W_{\text{ext}}$ ,  $\delta W_{\text{coh}}$ 는 각각 내부응력에 의한 실질적 일, 표면 마찰 그리고 점성 마찰이며, 다음과 같다.

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{\Omega_0 \setminus \Gamma_0^c} (\nabla \otimes \delta \mathbf{u})^T : \mathbf{P} \, d\Omega \quad (11)$$

$$\delta W_{\text{kin}} = \int_{\Omega_0 \setminus \Gamma_0^c} \rho_0 \delta \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega_0 \quad (12)$$

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_{\Omega_0 \setminus \Gamma_0^c} \rho_0 \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega_0 + \int_{\Gamma_0^c} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}}_0 \, d\Gamma \quad (13)$$

$$\delta W_{\text{coh}} = \int_{\Gamma^c} [ \delta \mathbf{u} ] \cdot \boldsymbol{\tau} \, d\Gamma \quad (14)$$

식 (1)과 (5)에서의 연속, 불연속 변형영역  $u^0$ 와  $u^e$ 을 대입하고, 균열 이격 변위(crack opening displacement)  $[u]$ 을 약형에 대입하면 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} &= \sum_{I \in W} \delta u_I^T \int_{\Omega_0 \setminus \Gamma_0^c} \nabla_0 \Phi_I(X)^T : \mathbf{P} \, d\Omega \\ &\quad + \sum_{J \in \varepsilon} \sum_{K \in W_J} \delta a_K^{J^T} \int_{\Omega_0 \setminus \Gamma_0^c} \nabla_0 \times [\phi_K(X) \psi_K^J(X)]^T : \mathbf{P} \, d\Omega \end{aligned} \quad (15)$$

$$\delta W_{\text{kin}} = \sum_{I \in W} \delta u_I^T \sum_{J \in W} \int_{\Omega_0 \setminus \Gamma_0^c} \rho_0 \Phi_I(X)^T \cdot \Phi_J(X) \, d\Omega \, \dot{u}_J$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{I \in W} \delta u_I^T \sum_{J \in W} \sum_{K \in W_J} \times \int_{\Omega_c \setminus \Gamma_c^e} \rho_0 \Phi_I(X)^T \cdot \Phi_K(X) \Psi_K'(X) d\Omega \ddot{a}_J^K \\
& + \sum_{J \in \varepsilon K \in W_J} \delta a_K^{J^T} \sum_{I \in W} \int_{\Omega_c \setminus \Gamma_c^e} \rho_0 \times [\Phi_K(X) \psi_K'(X)]^T \cdot \Phi_I(X) d\Omega \ddot{u}_I \\
& + \sum_{J \in \varepsilon K \in W_J} \delta a_I^{K^T} \sum_{L \in \varepsilon M \in W_L} \int_{\Omega_c \setminus \Gamma_c^e} \rho_0 \times [\Phi_K(X) \Psi_M'(X)]^T \cdot \Phi_M(X) \Psi_M^L(X) d\Omega \ddot{a}_M^L \quad (16)
\end{aligned}$$

$$\delta W_{ext} = \sum_{I \in W} \delta u_I^T \int_{\Omega_c \setminus \Gamma_c^e} \rho_0 \Phi_I(X)^T \cdot b d\Omega + \sum_{I \in W} \delta u_I^T \int_{\Gamma_c^e} \Phi_I(X)^T \cdot \bar{t}_c d\Gamma \quad (17)$$

$$\delta W_{coh} = 2 \sum_{J \in \varepsilon K \in W_J} \delta a_I^{K^T} \int_{\Gamma_c^e} \Phi_K(X)^T \cdot \bar{t}_c d\Gamma \quad (18)$$

라그랑지 승수법을 사용하면,

$$\delta W_L = \delta W + \delta(A \cdot \llbracket u \rrbracket) \quad (19)$$

여기서  $A$ 는 라그랑지 승수 벡터이다. 앞에서 언급했듯이, 라그랑지 승수는  $\Gamma_{c,ext}$ 로 정의 되고, 부요소법의 형상함수를 사용하기 위해 대입된다. 그러므로 이산 라그랑지 승수는 다음과 같다.

$$A = \Phi^0 \lambda \quad (20)$$

여기서  $\lambda$ 은 라그랑지 승수  $A$ 를 대입하기 위한 벡터 파라미터이다

## 7. 수치적용 예제 및 풀이

### 7.1 2개의 노치가 있는 시험체

그림 1과 같은 시험체에서 첫 번째 단계에서 시험체에는 전단력만이 작용된다. 두 번째 단계에서는 전단력은 일정하게 유지되고 수직방향으로의 변위가 점차 증가되었다. 전단력  $P_s = 5$  kN 과  $P_s = 27.5$  kN에서 첫 번째 경우 균열경로는 거의 선형이었고 두 번째 경우의 균열경로는 높이 짧은 균열모형이 관찰되었다.

Nooru-Mohamed에 따른 재료적 성질들은 압축강도  $f_c = 46$  MPa, CEB-FIP Model Code 에 따라서 항복하는 쪼렘인장강도  $f_s = 3.78$  MPa, 인장강도  $f_t = 0.8 f_s$ , 초기탄성계수  $E = 29$  GPa, 푸아송비는  $\nu = 0.22$ , 파괴에너지는  $G_f = 110$  J/m<sup>2</sup> 이다.

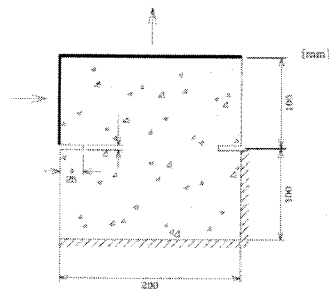
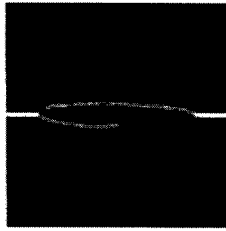
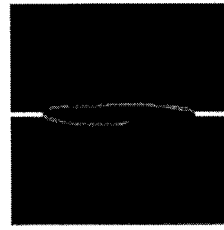


그림. 1 Nooru-Mohamed's 2개의 노치가 있는 시험체

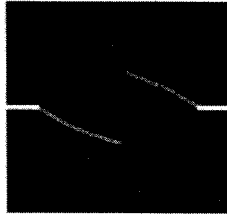


영역-감소 법

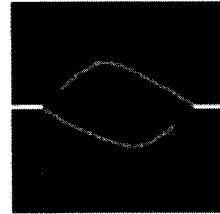


라그랑지 승수법

그림. 2 2개의 노치가 있는 시험체의 균열모형



영역-감소 법



라그랑지 승수법

그림. 3 3개의 노치가 있는 시험체의 균열모형

첫 번째 경우의 하중변환은  $P_s = 5 \text{ kN}$  이다. 두 가지 다른 하중 단계에서의 균열패턴은 그림 2와 같다. 균열은 매우 작은 전단력 때문에 수직방향으로 거의 직각을 이루면서 나아갔다. 두 균열들이 서로 '중복'일 때, 위쪽의 균열은 계속 나아가는 반면에 아래의 균열은 진행이 억제된다.  $P_s = 27.5 \text{ kN}$  과 같은 다른 하중변환에 대한 결과들은 두 가지의 하중 단계에 대한 그림 3과 같다.

## 7.2 Pull-out test

그림 4와 같은 철근 콘크리트의 pull out test를 고려해보자. 대칭조건들을 사용하였고, 시험체의 1/4만을 모델화 하였다. 수직변위 경계조건은 그림 4에서와 같이 reinforcement bar을 시험체의 바깥 쪽으로 당기는데 적용하였다. 또한 같은 구성요소와 점성모델들을 채택하였다. 균열 초기에서 점성력은 벌크에서 계산된다. 즉,  $t_c = n \cdot \sigma$  to ensure traction continuity. 재료 매개변수들은  $\kappa = 16,670 \text{ MPa}$  그리고  $\nu = 12,500 \text{ MPa}$  점성모델에 대해서는  $t_0 = 3 \text{ MPa}$ ,  $a = 11.323 \text{ mm}^{-1}$ ,  $b = 0.647$  그리고  $\alpha = 1$ 이다.

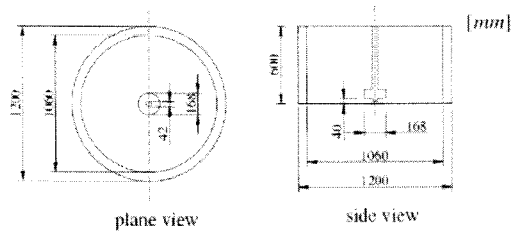


그림. 4 Pull out test의 시험구성

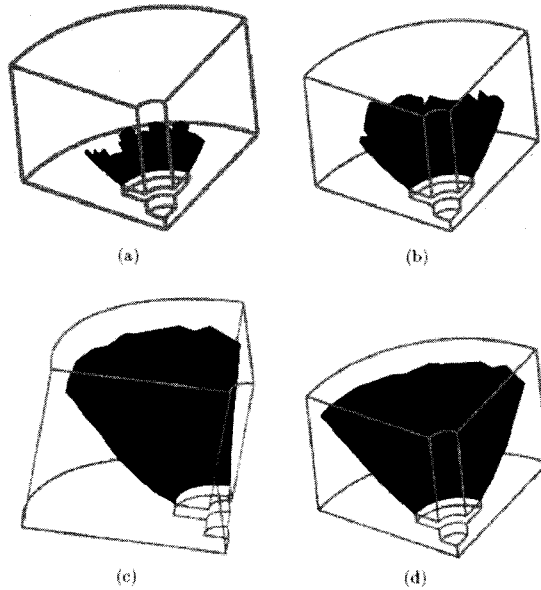


그림. 5 pull-out test의 균열패턴

15,000과 45,000개의 노드들로 시작하는 두 개의 이산화 시험하였다. 다른 하중단계에서 균열패턴은 다른 시각에서 바로본 그림 5와 같다. 균열표면은 물결모양이고, 정확하게 포착된다.

## 8. 결론

1. 점성균열에 대한 새로운 무요소법을 개발하였다. 이 방법은 부호함수가 전체균열을 확장 시킨다.
2. 라그랑지 승수가 불연속 변위영역에서 가지확장을 제거하기 위해 사용될 수 있음을 보여주었고, 실제 확장이 관통된 형상함수를 사용함으로써 자연적으로 이산화 되었다.
3. 새로운 무요소법들은 잘 알려진 정적·동적 문제들에 적용하였다. 그 방법들은 시험적인 결과들과 다른 연구자들에 의한 모의시험들에 잘 일치한다는 것을 증명하였다.
4. 쌍곡선 상실은 균열확대의 속도와 방향을 결정하기 위하여 사용되었다. 쌍곡선 상실에서 계산된 균열확대의 속도는 Rayleigh 파장속도 보다 느리지만 이론적으로는 더 타당하다.

## 감사의 글

본 연구과제는 국방과학연구소 기초연구과제(ADD-06-05-06)의 지원으로 이루어졌고, 건설교통부가 출연하고 한국건설교통기술평가원에서 위탁 시행한 05 건설핵심 D11의 지원으로 이루어졌습니다.

## 참고문헌

- Bazzant, ZP., Caner, FC. (2005) Microplanemodel M5 with kinematic and static constraints for concrete fracture and anelasticity. I: Theory. J Eng Mech ASCE 131(1) pp.31-40
- Rabczuk, T., Zi, G. (2006) A meshfree method based on the local partition of unity for cohesive cracks. Comput Mech (in press)