

무요소법(RPIM)을 이용한 구조 요소의 응력해석

A Stress Analysis of Structural Element Using Meshfree Method(RPIM)

한 상 을* · 이 상 주** · 주 정 식***

Han, Sang-Eul · Lee, Sang-Ju · Joo, Jung-Sik

ABSTRACT

A Meshfree is a method used to establish algebraic equations of system for the whole problem domain without the use of a predefined mesh for the domain discretization. A point interpolation method is based on combining radial and polynomial basis functions. Involvement of radial basis functions overcomes possible singularity. Furthermore, the interpolation function passes through all scattered points in an influence domain and thus shape functions are of delta function property. This makes the implementation of essential boundary conditions much easier than the meshfree methods based on the moving least-squares approximation. This study aims to investigate a stress analysis of structural element between a meshfree method and the finite element method. Examples on cantilever type plate and stress concentration problems show that the accuracy and convergence rate of the meshfree methods are high.

Keywords: *meshfree method, meshless method, radial basis function, radial point interpolation.*

1. 서 론

유한요소법은 광범위한 분야의 여러 공학적인 문제들을 해결하기 위한 가장 강력한 수치해석방법중의 하나로 지속적인 발전을 거듭하여 왔다. 그러나 유한요소법은 해의 정확도가 요구되는 부분에서 세분화된 요소망을 사용하여야 하며, 요소분할시 요소를 구성하는 절점들 사이에 어떤 규칙성과 연속성을 만족시켜야 하는 제약성을 지니고 있다. 이러한 제약은 응력이나 변형률이 집중되는 국부화 및 특이성(singularity)이 발생하는 문제, 불연속 구간이 존재하는 문제, 기하학적 형상이나 경계조건, 불연속 구간 등이 계속적으로 변화하는 문제와 같은 공학적 문제의 해결에 있어서는 유한요소법 사용상의 큰 단점으로 지적되고 있다. 이러한 단점을 극복하기 위하여 요소의 개념을 사용하지 않고 절점들의 상호관계와 경계영역의 조건만을 사용하여 문제를 해결할 수 있는 무요소법(Meshfree Method)이라는 새로운 수치해석방법이 개발되었다. 무요소법에서는 어떤 기준점을 중심으로 그 점으로부터 일정한 영향영역 내에 포함되어 있는 불규칙하게 분포된 절점들과의 위치적 상관관계에 의해 형상함수가 도출되고 변위함수가 결정된다. 이때 경계영역에 위치한 절점들은 필수 경계조건을 정확히 만족시키지 못하는 경우가 발생할 수 있으므로 추가의 구속조건을 사용하여 경계조건이 만족될 수 있도록 하여야 한다.

* 정회원 · 인하대학교 건축학부 교수 Email: hsang@inha.ac.kr

** 정회원 · 한양대학교 건축환경공학과 BK21 계약교수 Email: kyotolsj@empal.com

*** 학생회원 · 인하대학교 건축학부 석사과정 Email: ryanjoo@hanmail.net

본 연구에서는 무요소법의 수치해의 정도를 향상시키기 위하여 해의 정확성을 유지시키고 필수경계조건을 만족시킬 수 있는 RPIM(Radial Point Interpolation Methods)법을 이용하여 정식화하고, 캔틸레버 플립이트 및 유공평판을 모델링하여 무요소법 및 유한요소법의 응력해석 결과를 비교, 검토한다.

2. 무요소법의 형상함수(Meshfree shape function construction)

GR Liu, Gu는 문제영역을 적절히 분포된 절점으로 나타내고 갤러킨 약형식에 기반을 둔 Mfree Point Interpolation Methods를 제안하였다. PIM법의 주요 특징은 형상함수가 크로네커 델타 성질을 가지고 있고, 필수 경계조건은 유한요소법처럼 쉽게 적용될 수 있다는 점이다. 그러나 PPIM(Polynomial Point Interpolation Method)법에서 모멘트 행렬은 특이성 문제가 발생할 수 있으므로 2단계의 MTA(Matrix Triangularization Algorithm)를 사용하여 모멘트 행렬의 정식화에 사용된 다항식의 절점과 조건을 제외함으로써 이 문제를 해결할 수 있었다. 또한 PPIM법은 단지 국부영역에서 임의로 분포된 절점그룹을 토대로 형상함수를 사용하고, 전체 적분 격자는 갤러킨 약형식에서 적분을 평가하나 형상함수의 비적합성 때문에 PPIM법은 특히 국부지지 영역에서 너무 많은 절점을 사용한 불규칙 절점분포에서는 오차가 많이 발생하는 단점이 있다. 반면, RBF(Radial Basis Functions)를 사용한 RPIM(Radial Point Interpolation Method)법은 특이성문제를 극복하고 임의로 분포된 절점에서도 안정적으로 해를 구할 수 있으며, 유일한 변수는 반지름 r 이기 때문에 3차원에서 도 쉽게 해석할 수 있다. 이런 장점으로 최근 개발된 RPIM법은 PPIM법보다 더 널리 사용된다.

2.1. 형상함수의 개요

RBF는 PPIM법의 특이성문제를 해결하기 위해서 무요소 RPIM법에 사용되며, RPIM 보간법은 다음과 같다.

$$u(x) = \sum_{i=1}^n R_i(x)a_i + \sum_{j=1}^m p_j(x)b_j = \mathbf{R}^T(x)\mathbf{a} + \mathbf{p}^T(x)\mathbf{b} \quad (1)$$

$R_i(x)$ 은 RBF 함수, n 은 RBF 함수의 수, $p_j(x)$ 는 공간 좌표 $x^T = \{x, y\}$ 의 다항식, m 은 다항식 함수의 수이다. $m = 0$ 일 때, 순수 RBF라 하고, RBF는 m 개의 다항 함수를 가지며, 계수 a_i, b_j 는 아직 결정되지 않은 상수이다. $R_i(x)$ 에서 변수는 단지 관심점(the point of interest) x 와 절점 x_i 사이의 거리이다.

$$r = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \quad \text{2차원 문제} \quad (2)$$

주로 사용되는 RBF 함수는 MQ(Multi-Quadrics Function), Exp(Gaussian Function), TPS(Thin Plate Spline Function), Logarithmic Radial Basis Function으로 표 1과 같다.

표 1 RBF(radial basis function)와 형상계수

RBF	수식	형상계수
Multi-quadrics (MQ)	$R_i(x, y) = (r_i^2 + (\alpha_c d_c)^2)^q$	$\alpha_c \geq 0, q$
Gaussian (Exp)	$R_i(x, y) = \exp[-\alpha_c (\frac{r_i}{d_c})^2]$	α_c
Thin Plate Spline (TPS)	$R_i(x, y) = r_i^3$	η
Logarithmic	$R_i(x, y) = r_i^2 \log r_i$	η

2.2. RPIM 형상함수

지지영역에서 25절점을 사용한 RPIM 형상함수와 형상함수의 미분을 수치해석을 통해 제시한다. 그림 1에

서 보여주는 25절점(5×5)은 사각영역 $\{x_i \in [-1, 1], y_i \in [-1, 1]\}$ 에서 규칙적으로 분포된다. 그림 2 ~ 4는 MQ-RBF 형상함수와 형상함수의 미분을 보여주며, 형상계수로 GR. Liu에 의해 검증받은 $\alpha_c = 2.0$, $d_c = 0.5$, $q = 0$, 그리고 $m = 0$ 을 사용하였다.

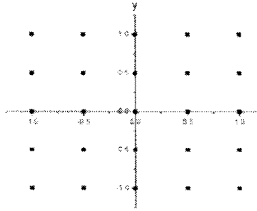


그림 1 필드절점

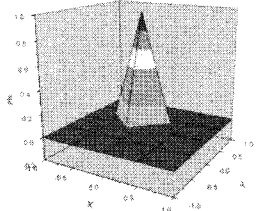


그림 2 RPIM 형상함수

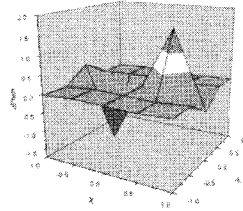


그림 3 x의 1차 미분

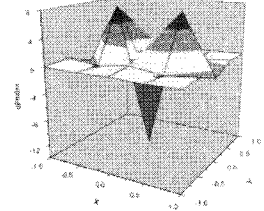


그림 4 x의 2차 미분

3. RPIM법의 정식화

경계 Γ , 영역 Ω 인 2차원 선형탄성문제에서 고체역학문제의 편미분방정식과 경계조건은 다음과 같다.

$$\text{평형방정식:} \quad \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (3)$$

$$\text{자연경계조건:} \quad \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{in } \Omega \quad (4)$$

$$\text{필수경계조건:} \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{in } \Omega \quad (5)$$

식(3)의 변분형태 수식은 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T (\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \quad (6)$$

식(6)에서 \mathbf{D} 는 전체 문제영역 Ω 에 약형식으로 정의된 탄성상수매트릭스이다. 식(6)을 적분하기 위해서 전체 문제영역은 교차되지 않은 적분 격자로 이산화한다. 문제영역은 변수를 근사화하기 위해 필드절점(field node)의 형태로 나타내고 영향절점은 연속적으로 1부터 N 까지 절점번호가 부여된다. RPIM 형상함수는 국부지지영역의 필드절점을 이용한 관심점의 변위를 근사화하는데 사용된다.

$$\mathbf{u}_{(2 \times 1)}^h = \sum_I^n \begin{bmatrix} \phi_I & 0 \\ 0 & \phi_I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_I \\ v_I \end{Bmatrix} = \sum_I^n \boldsymbol{\Phi}_I \boldsymbol{\mu}_I \quad (7)$$

$\boldsymbol{\Phi}_I$ 는 절점 I 의 형상함수 매트릭스, $\boldsymbol{\mu}_I$ 는 절점변위, n 은 국부지지영역의 절점 수이다. 식(7)에서 \mathbf{u}^h 는 샘플링포인트(sampling point or quadrature point)가 될 수 있는 관심점의 근사절점이다.

$$\delta\mathbf{u}_{(2 \times 1)}^h = \boldsymbol{\Phi}_{(2 \times 2n)} \delta\mathbf{u}_{(2n \times 1)} = \sum_I^n \boldsymbol{\Phi}_I \delta\boldsymbol{\mu}_I \quad (8)$$

변형률은 변위와의 관계를 이용하여 얻을 수 있다.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(3 \times 1)} = \mathbf{L}\mathbf{u}^h = \mathbf{L}_{(3 \times 2)} \boldsymbol{\Phi}_{(2 \times 2n)} \mathbf{u}_{(2n \times 1)} \quad (9)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \dots & \phi_n & 0 \\ 0 & \phi_1 & \dots & 0 & \phi_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial \phi_n}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial y} & \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix}$$

$$= \mathbf{B}_{(3 \times 2n)} \mathbf{u}_{(2n \times 1)} = \sum_I^n \mathbf{B}_I \mathbf{u}_I$$

\mathbf{B}_I 는 절점 I 의 변형률 매트릭스이고, 구성방정식을 통하여 응력벡터를 구할 수 있다.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_{(3 \times 3)} \mathbf{B}_{(3 \times 2n)} \mathbf{u}_{(2n \times 1)} = \sum_I^n \mathbf{D}_{(3 \times 3)} (\mathbf{B}_I)_{(3 \times 3)} (\mathbf{u}_I)_{(2 \times 1)} \quad (10)$$

식(9)를 식(6)의 첫 번째 항에 대입하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T (\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \sum_I^n \sum_I^n \delta\mathbf{u}_I^T [\mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_I] \mathbf{u}_I d\Omega \quad (11)$$

지금 단계까지 I, J 는 국부지지영역에서 절점번호를 부여하였으나, 1부터 절점의 전체번호인 N 까지 국부영역의 절점을 전체영역의 절점으로 각각 바꿀 수 있다.

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T (\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega = \sum_I^N \sum_I^N \delta\mathbf{u}_I^T \underbrace{\left(\int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_I d\Omega \right)}_{\mathbf{K}_I} \mathbf{u}_I \quad (12)$$

$\mathbf{K}_{I,J}$ 는 2×2 의 절점강성매트릭스이다. 또한 식(7)을 식(6)의 두 번째 항에 대입하면, 식(13)이 유도되며,

$$\int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega = \sum_I^N \delta\mathbf{u}_I^T \underbrace{\int_{\Omega} \boldsymbol{\Phi}_I^T \mathbf{b} d\Omega}_{\mathbf{F}_I^b} \quad (13)$$

\mathbf{b} 는 물체력벡터이고, \mathbf{F}_I^b 는 절점 물체력벡터이다. 식(13)에서 물체력벡터를 표면력벡터로, 영역을 경계영역으로 대체하여 식(6)의 마지막 항에 대입하면 식(14)를 얻을 수 있다.

$$\int_{\Gamma_i} \delta\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = \delta\mathbf{U}^T \sum_I^N \underbrace{\int_{\Gamma_i} \boldsymbol{\Phi}_I^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma}_{\mathbf{F}_I^t} = \delta\mathbf{U}^T \mathbf{F}^t \quad (14)$$

\mathbf{F}_I^t 는 절점 표면력벡터이고, \mathbf{F}^t 는 절점 표면력벡터를 이용하여 취합한 전체 표면력벡터이다.

식(12), 식(13)과 식(14)를 평형방정식의 변분형태인 식(6)에 대입하면 다음과 같고, 여기에서

$$\delta\mathbf{U}^T [\mathbf{K}\mathbf{U} - \mathbf{F}^b - \mathbf{F}^t] = 0 \quad (15)$$

$\delta\mathbf{U}$ 는 임의적이기 때문에 식(15)는 다음을 만족한다.

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}^b + \mathbf{F}^t \quad (16)$$

무요소 RPIM법의 이산화방정식은 최종적으로 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (17)$$

절점변위는 변위경계조건을 만족시켜 구할 수 있고, 변형률과 응력은 절점변위를 구한 후 식(9), 식(10)을 통해 각각 얻을 수 있다.

4. 모델링 및 해석결과

4.1. 해석모델 1

무요소 RPIM법의 신뢰성을 검증하기 위해 캔틸레버형 평판을 해석대상으로 고려한다. 평판의 길이 $L = 48m$, 높이 $H = 12m$, 단위두께($t = 1.0$)이며, 평면 응력상태로 가정한다. 변수로 하중 $p = 1000N$, 탄성계수 $E = 3.0 \times 10^7 N/m^2$ 그리고 푸아송 비 $\nu = 0.3$ 이다.

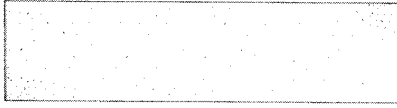


그림 5 무요소법의 필드점점

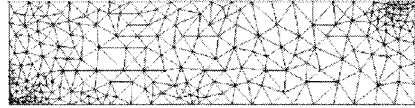


그림 6 무요소법의 적분격자

그림 5는 RPIM법의 해석과정에 사용된 272개의 불규칙한 필드점점, 그림 6은 수치적분을 위한 472개의 적분격자이다. 무요소 RPIM법과 유한요소법을 식(18)의 정해와 비교한 결과 그림 7과 같이 동일한 처짐결과로 나타나 무요소 RPIM법의 신뢰성이 검증되었다.

$$v(x,y) = \frac{P}{6EI} \left[3\nu y^2(L-x) + (4+5\nu) \frac{D^2 x}{4} + (3L-x)x^2 \right] \quad (18)$$

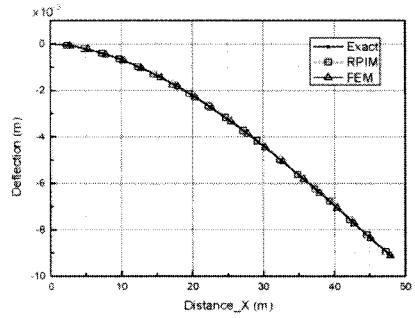


그림 7 중립축에서의 Y방향 처짐

4.2. 해석모델 2

x 축 단일방향의 인장하중이 작용하는 유공평판문제를 해석대상으로 고려해보자. 그림 8과 같이 대칭성을 이용하여 평판의 상단 오른쪽 부분의 평판 만모델링하고 평면 응력으로 해석한다. 변수로 하중 $p = 1N/m$, 탄성계수 $E = 1.0 \times 10^3 N/m^2$, 푸아송 비 $\nu = 0.3$, 원형 홀의 반경 $a = 1.0m$ 그리고 평판의 길이 $b = 5m$ 이다.

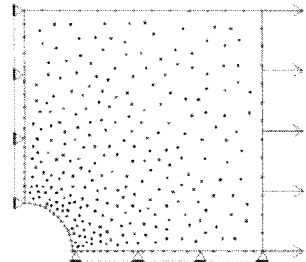
경계조건은 $x=0, y=0$ 에 다음의 조건을 만족한다.

$$u_x = 0, \sigma_{xy} = 0 \quad (x=0), \quad u_y = 0, \sigma_{xy} = 0 \quad (y=0)$$

수평, 수직방향의 경계조건은 각각 다음과 같다.

$$\sigma_{xx} = p, \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0 \quad (x=5), \quad \sigma_{xx} = 0, \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0 \quad (y=5) \quad (20)$$

그림 9는 $x=0$ 에서의 응력분포(σ_{xx}), 그림 10 ~ 11은 유공평판의 전단응력을 나타낸 것이다. 해석결과, 유공평판문제에서도 두가지 수치해석법은 만족할 만한 결과를 보여주었으며, 정해와 비교한 결과 응력집중 범위에서 무요소 RPIM법과 유한요소법은 각각 4.17%, 7.89%, 6.54%와 11.67%, 22.28%, 18.67%의 오차로 무요소 RPIM법이 신뢰성 있는 결과를 제시하는 것으로 나타났다.



(19) 그림 8 유공평판 모델링

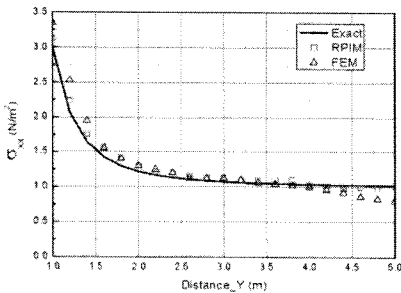


그림 9 $x=0$ 에서의 σ_{xx}

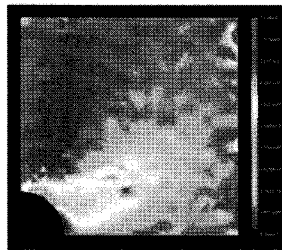


그림 10 무요소법(σ_{xy})

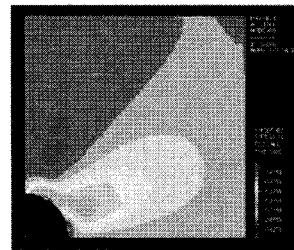


그림 11 유한요소법(σ_{xy})

5. 결론

본 연구에서는 무요소법 중 RPIM법을 소개하였고 구조 요소의 응력해석을 위해 캔틸레버형 평판, 유공평판문제를 수치예제로 무요소법과 유한요소법을 비교하였으며 주요 연구 결과를 정리하면 다음과 같다.

(1) 무요소 RPIM법에 의한 해의 정도를 검증하기 위하여 이론 해와 유한요소법의 근사해석결과를 비교, 분석하였으며, 캔틸레버형 평판을 해석한 결과, 정해와 매우 근사한 처짐결과를 나타내어 무요소 RPIM법의 신뢰성이 증명되었다.

(2) 유공평판문제에서도 신뢰할 만한 결과를 나타내었으며, 응력집중 범위 내에서 무요소 RPIM법은 4.17 ~ 7.89%, 유한요소법은 11.67 ~ 22.28%의 오차로 무요소 RPIM법이 효과적인 수치해석법임이 검증되었다.

감사의 글

본 연구는 2005년 건설교통기술평가원(2005-33305)의 지원에 의하여 연구되었으며, 감사의 의를 표합니다.

참고문헌

- 최창근 (2002) 유한요소법, 테크노 프레스, 대전.
- Chen, Youping. Lee., and J. Eskandarian, A. (2006) Meshless Methods in Solid Mechanics, *Springer Company*, New York.
- Liu, G.R. (2005) An Introduction to Meshfree Methods and their Programming, *Springer Company*, New York.
- Liu, G.R. (2002) Mesh Free Methods Moving beyond the Finite Element Method, *CRC Press Company*, New York.
- Nyhoff, L.R., and Leestma, S.C (1997) Fortran 90 for Engineers and Scientists, *Prentice-Hall International*, London.
- Timoshenko, S.P., and Woinowsky-Krieger (1959) Theory of Plates and Shells, *McGraw-Hill Company*, New York.
- Ugural, A.C. (1981) Stresses in Plates and Shells, *McGraw-Hill Company*, New York.
- Liu, G.R. Gu, YT (2003a) A matrix triangularization algorithm for point interpolation method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(19), pp.2269~2295.
- Liu, G.R. Gu, YT (2001a) A point interpolation method for two-dimensional solids, *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 50, pp.937~951.
- Liu, G.R., and Zhang, Jian (2006) Radial point interpolation based finite difference method for mechanics problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 68(7), pp.728~754.
- Wang, J.G., and Liu, G.R. (2002) A point interpolation meshless method based on radial basis functions, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54(11), pp.1623~1648.
- Chen, X.L. (2003) Meshfree techniques for plate structures, PhD thesis, *National University of Singapore*.