

# 영역/경계 분할 정식화에 의한 삼차원 접촉 해석의 효율성 검토

## Computational Efficiency of 3-D Contact Analysis by Domain/Boundary Decomposition Formulation

신 의 섭\* · 김 용 언\*\* · 류 한 열\*\*\*  
Shin, Eui Sup · Kim, Yong Uhn · Ryu, Han Yeol

---

### ABSTRACT

A domain/boundary decomposition technique is applied to carry out efficient finite element analyses of 3-D contact problems. Appropriate penalty functions are selected for connecting an interface and contact interfaces with neighboring subdomains that satisfy continuity constraints. As a consequence, all the effective stiffness matrices have positive definiteness, and computational efficiency can be improved to a considerable degree. If necessary, any complex-shaped 3-D domain can be divided into several simple-shaped subdomains without considering the conformity of meshes along the interface. With a set of numerical examples, the basic characteristics of computational efficiency are investigated carefully.

**Keywords:** 3-D Contact, Domain/Boundary Decomposition, Contact Interface, Penalty Method.

---

### 1. 서 론

일반적으로 접촉 문제에 대한 정밀한 해석을 위해서는 실제 구조 형상에 가까운 유한요소 모델이 필요하다. 그러나 직접 삼차원 접촉 문제를 취급하는 경우, 복잡한 형상에 적합한 유한요소 모델링, 매우 큰 자유도에서 기인하는 계산 시간 증가 등의 어려움이 수반된다. 따라서 삼차원 접촉 문제에서는 해석 결과의 정확성과 함께 해석 과정의 효율화가 현실적으로 중요한 과제이다.

접촉 현상은 접촉 유무와 그 영역을 사전에 알 수 없으므로 비선형 문제에 해당한다. 이와 같은 경계 비선형 문제에 있어서 가장 효과적인 개념은 해석 영역을 분할한 후 부분적으로 유한요소법을 적용하는 것이다. 현재까지 영역 분할에 근거한 여러 이산화 기법(Bourel 등, 2006; Shin과 Kim, 2000)과 영역/경계 분할법(류한열, 2007)이 제안되었으나, 실제 삼차원 접촉 문제의 계산량 절감에 관련된 정량적인 분석 결과는 충분하지 않다.

본 논문에서는 영역/경계 분할을 삼차원 접촉 문제 해석에 적용하였다. 정식화에 따른 알고리즘 설정과 간단한 수치 예제를 통하여, 제안된 기법에 의한 삼차원 접촉 해석의 효율성 향상을 면밀히 검토하였다.

---

\* 정희원 · 전북대학교 기계항공시스템공학부 교수 Email: esshin@chonbuk.ac.kr

\*\* 전북대학교 항공우주공학과 석사과정 Email: yoneo@chonbuk.ac.kr

\*\*\* 전북대학교 항공우주공학과 석사과정 Email: klyu21@hanmail.net

## 2. 영역/경계 분할법 및 해석 기법

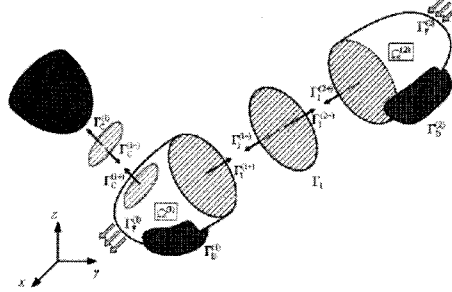


Fig. 1. An example of subdomain, interface, and contact interface

Fig. 1와 같이 전체 영역을  $N_s$ 개의 부영역  $\Omega^{(k)}$ , 공유면  $\Gamma_i$ ,  $N_s$ 개 이하의 접촉 공유면  $\Gamma_c^{(k)}$ 의 집합으로 생각한다. 공유면과 접촉 공유면의 연속 조건과 접촉 경계면에서의 구속 조건을 만족하기 위해 벌칙 함수를 사용하였다. 시험 함수(test function)로서 가상 변위를 도입하면 지배방정식의 약형(weak form)을 얻을 수 있다.

$$\delta\Pi_D = \sum_{k=1}^{N_s} \delta\Pi_D^{(k)} + \delta\Pi_{DI} + \sum_{k=1}^{N_s} \delta\Pi_C^{(k)} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \delta\Pi_D^{(k)} = & \int_{\Omega^{(k)}} \rho^{(k)} \delta u_i^{(k)} dV + \int_{\Omega^{(k)}} \sigma_{ij}^{(k)} \delta \varepsilon_{ij}^{(k)} dV - \int_{\Omega^{(k)}} \bar{f}_i^{(k)} \delta u_i^{(k)} dV \\ & - \int_{\Gamma_i^{(k)}} \bar{f}_i^{(k)} \delta u_i^{(k)} dS + \frac{1}{\varepsilon_{DI}^{(k)}} \int_{\Gamma_i^{(k)}} (u_i^{(k)} - v_i) \delta u_i^{(k)} dS + \frac{1}{\varepsilon_{CI}^{(k)}} \int_{\Gamma_c^{(k)}} (u_i^{(k)} - w_i^{(k)}) \delta u_i^{(k)} dS \end{aligned} \quad (2)$$

$$\delta\Pi_{DI} = \sum_{k=1}^{N_s} \delta\Pi_{DI}^{(k-1)} = \sum_{k=1}^{N_s} \frac{1}{\varepsilon_{DI}^{(k)}} \int_{\Gamma_i^{(k-1)}} (v_i - u_i^{(k)}) \delta v_i dS \quad (3)$$

$$\delta\Pi_C^{(k)} = \frac{1}{\varepsilon_{CI}^{(k)}} \int_{\Gamma_c^{(k-1)}} (w_i^{(k)} - u_i^{(k)}) \delta w_i^{(k)} dS + \frac{1}{\varepsilon_{CI}^{(k)}} \int_{\Gamma_c^{(k)}} (w_j^{(k)} n_j^{(k)} - s^{(k)})^+ n_i^{(k)} \delta w_i^{(k)} dS \quad (4)$$

변분 형태의 지배 방정식을 공간과 시간에 대하여 이산화하면, 블록 행렬 형태의 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_D^{(1)} & \mathbf{L} & \mathbf{0} & -\mathbf{P}_{DI2}^{(1)} & -\mathbf{P}_{CI2}^{(1)} & \mathbf{L} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L} & \hat{\mathbf{K}}_D^{(N_s)} & -\mathbf{P}_{DI2}^{(N_s)} & \mathbf{0} & \mathbf{L} & -\mathbf{P}_{CI2}^{(N_s)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{P}_{DI2}^{(1)T} & \mathbf{L} & -\mathbf{P}_{DI2}^{(N_s)T} & \mathbf{K}_{DI} & \mathbf{0} & \mathbf{L} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{P}_{CI2}^{(1)T} & \mathbf{L} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{CI} & \mathbf{L} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L} & -\mathbf{P}_{CI2}^{(N_s)T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L} & \mathbf{K}_{CI}^{(N_s)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{(1)} \\ \mathbf{u} \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{(N_s)} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w}^{(1)} \\ \mathbf{M} \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{w}^{(N_s)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{f}}_D^{(1)} \\ \mathbf{M} \\ {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{f}}_D^{(N_s)} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_{CI}^{(1)} \\ \mathbf{M} \\ {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{f}}_D^{(N_s)} \\ \mathbf{P}_{CI}^{(N_s)} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

공유면과 접촉 공유면의 변위 연속 조건을 벌칙 함수로 처리하였으므로, 모든 부영역에 대한 유효 강성 행렬은 항상 양정치 성질을 갖는다. 따라서 식 (5)를 분해하여, 모든 행렬의 조립과 계산 과정을 부영역, 공유면, 접촉 공유면을 기본 단위로 하는 병렬화된 알고리즘으로 처리할 수 있다. 구하게 되는 미지수(변위 벡터) 순서를 기준으로 네 종류의 해석 알고리즘  $\mathbf{v-w-u}$ ,  $\mathbf{w-v-u}$ ,  $\mathbf{w-u}$ ,  $\mathbf{v-u}$ 를 구성할 수 있다.

계산의 효율성을 측정하기 위해  $\mathbf{v-w-u}$ 에 소요되는 연산 횟수 FLOPs(Floating-Point Operations)를 Table 1에 정리하였다. 여기서 FULL은 영역/경계 분할법을 적용하지 않은 경우이다. FLOPs는 전체 행렬에 대한 삼각 분해 단계  $f_1(D)$ 와 대입 단계  $f_2(D)$ , 대역 행렬에 대한 삼각 분해 단계  $f_3(D, B)$ 와 대입 단계  $f_4(D, B)$ 로

구분된다. 여기서  $D$ 는 총 자유도,  $B$ 는 대역폭의 크기이다.  $\alpha^{(k)}$ 는  $k$ 번째 접촉 경계면의 접촉 상태 변화 횟수,  $\gamma$ 는 전체 영역 차원의 접촉 상태 변화 횟수,  $N_{TS}$ 는 총 시간 증분 횟수이다.

Table 1. FLOPs results for solution algorithms, FULL and v-w-u

Algor.	$\Omega/\Gamma_c/\Gamma_e$	Decomposition	Substitution
FULL	$\Omega$	$(1+\gamma) \times f_3(D_v, B_v)$	$(N_{TS}+\gamma) \times f_4(D_v, B_v)$
v-w-u	$\Omega^{(k)}$	$1 \times f_3(D_v^{(k)}, B_v^{(k)})$	$(D_w^{(k)} + D_w^{(k)} + N_{TS}) \times f_4(D_v^{(k)}, B_v^{(k)})$
	$\Gamma_1$	$(1+\gamma) \times f_1(D_v)$	$(N_{TS}+\gamma) \times f_2(D_v)$
	$\Gamma_c^{(k)}$	$(1+\alpha^{(k)}) \times f_1(D_w^{(k)})$	$\{(1+\alpha^{(k)}) * D_w^{(k)} + N_{TS} + \alpha^{(k)}\} \times f_2(D_w)$

### 3. 수치 예제 해석 및 고찰

여기서는 간단한 수치 예제를 통하여 영역/경계 분할법을 적용한 삼차원 유한요소 접촉 해석의 효율성을 고찰하였다. 삼차원 다중 접촉(multi-contact) 모델의 형상을 Fig. 2에 도시하였다. 상판에 주기적으로 동적 하중을 부가하면, 상판과 하판의 핀 결합 부위에서 접촉이 발생하게 된다.

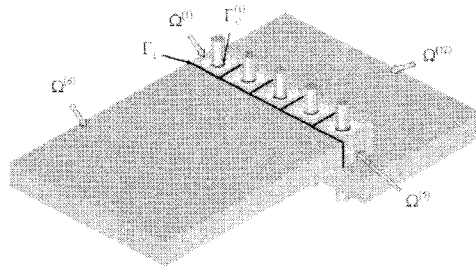


Fig. 2. Finite element model for multi-pin joint

Fig. 3은 10개의 접촉 경계면 전체에서 접촉이 일어나는 경우,  $N_{TS}$ 의 변화에 따른 FLOPs 결과이다.  $\alpha^{(k)}$ 는  $N_{TS}$ 의 2배로 고정하였다.  $N_{TS}$ 가 증가할수록 모든 해석 알고리즘들의 계산량이 감소하였다. v-w-u의 계산량이 3.096%로서 가장 효율적이었으며, w-v-u, w-u, v-u는 각각 18.118%, 18.189%, 14.403% 수준까지 감소하였다. 해석 알고리즘 v-w-u의 경우, 10개의 접촉 공유면에 대한 행렬 연산을 개별적으로 수행함으로써 계산 효율성이 크게 향상된다.  $N_{TS}=10,000$ 일 때 해석 알고리즘 v-w-u에 대한 FLOPs 산출 내역을 Table 2에 정리하였다.

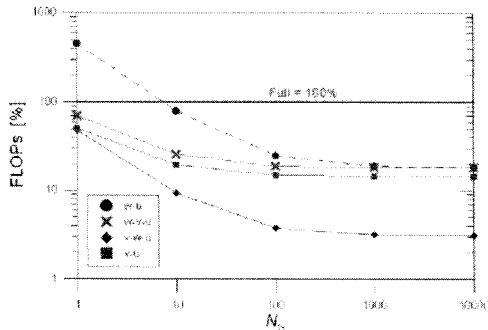


Fig. 3. FLOPs vs. number of time steps

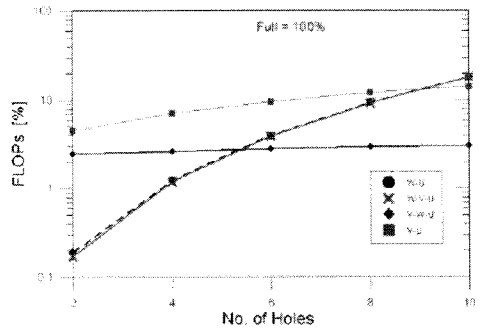


Fig. 4. FLOPs vs. number of holes

Table 2. FLOPs results for multi-contact model (10 holes), FULL and v-w-u

Problem ID	$\Omega/\Gamma_1/\Gamma_0$	Nodes	Elements	Nodes on $\Gamma_1$	Nodes on $\Gamma_0$	Contact Boundary	Size of Matrix		No. of Calculations		Total GFLOPs			
							D.O.F	H.B.V	Decomp.	Subst i	Decomp.	Subst i	Total	Percent.
FULL	$\Omega$	197,472	73,250	<del>341</del>	<del>660</del>	$\circ$	582,416	4,926	20,001	30,000	285,867,781.26	261,514.44	285,129,295.70	100.000
	$\Omega^{(1)}$	7,260	6,000	341	660	$\Delta$	21,780	1,443	1	13,003	43.32	1,184.64	1,228.16	0.000
	$\Omega^{(2)}$	7,260	6,000	506	660	$\Delta$	21,780	1,443	1	13,498	43.32	1,229.95	1,273.27	0.000
	$\Omega^{(3)}$	7,260	6,000	506	660	$\Delta$	21,780	1,443	1	13,498	43.32	1,229.95	1,273.27	0.000
	$\Omega^{(4)}$	7,260	6,000	506	660	$\Delta$	21,780	1,443	1	13,498	43.32	1,229.95	1,273.27	0.000
	$\Omega^{(5)}$	7,260	6,000	341	660	$\Delta$	21,780	1,443	1	13,003	43.32	1,184.64	1,228.16	0.000
	$\Omega^{(6)}$	75,076	67,500	636	0	X	228,220	4,058	1	12,503	3,714.57	34,445.64	38,160.31	0.013
	$\Omega^{(7)}$	7,260	6,000	506	660	$\Delta$	21,780	1,443	1	13,498	43.32	1,229.95	1,273.27	0.000
	$\Omega^{(8)}$	7,260	6,000	506	660	$\Delta$	21,780	1,443	1	13,498	43.32	1,229.95	1,273.27	0.000
	$\Omega^{(9)}$	7,260	6,000	506	660	$\Delta$	21,780	1,443	1	13,498	43.32	1,229.95	1,273.27	0.000
	$\Omega^{(10)}$	7,260	6,000	506	660	$\Delta$	21,780	1,443	1	13,498	43.32	1,229.95	1,273.27	0.000
	$\Omega^{(11)}$	7,260	6,000	506	660	$\Delta$	21,780	1,443	1	13,498	43.32	1,229.95	1,273.27	0.000
	$\Omega^{(12)}$	52,206	45,750	1,166	0	X	156,618	2,475	1	13,498	548.89	15,553.47	16,517.36	0.006
	v-w-u	$\Gamma_1$	3,322	3,000	<del>—</del>	<del>—</del>	<del>—</del>	9,966	<del>—</del>	20,001	30,000	6,593,227.48	4,459.58	6,593,686.79
$\Gamma_6^{(1)}$		660	500	<del>—</del>	<del>—</del>	$\circ$	1,980	<del>—</del>	20,001	30,391,023	51,751.85	120,473.22	172,231.08	0.060
$\Gamma_6^{(2)}$		660	500	<del>—</del>	<del>—</del>	$\circ$	1,980	<del>—</del>	20,001	30,391,519	51,751.85	178,690.27	230,442.13	0.081
$\Gamma_6^{(3)}$		660	500	<del>—</del>	<del>—</del>	$\circ$	1,980	<del>—</del>	20,001	30,391,519	51,751.85	178,690.27	230,442.13	0.081
$\Gamma_6^{(4)}$		660	500	<del>—</del>	<del>—</del>	$\circ$	1,980	<del>—</del>	20,001	30,391,519	51,751.85	178,690.27	230,442.13	0.081
$\Gamma_6^{(5)}$		660	500	<del>—</del>	<del>—</del>	$\circ$	1,980	<del>—</del>	20,001	20,491,023	51,751.85	120,473.22	172,231.08	0.060
$\Gamma_6^{(6)}$		660	500	<del>—</del>	<del>—</del>	$\circ$	1,980	<del>—</del>	20,001	30,391,518	51,751.85	178,690.27	230,442.13	0.081
$\Gamma_6^{(7)}$		660	500	<del>—</del>	<del>—</del>	$\circ$	1,980	<del>—</del>	20,001	30,391,518	51,751.85	178,690.27	230,442.13	0.081
$\Gamma_6^{(8)}$		660	500	<del>—</del>	<del>—</del>	$\circ$	1,980	<del>—</del>	20,001	30,391,518	51,751.85	178,690.27	230,442.13	0.081
$\Gamma_6^{(9)}$		660	500	<del>—</del>	<del>—</del>	$\circ$	1,980	<del>—</del>	20,001	30,391,518	51,751.85	178,690.27	230,442.13	0.081
$\Gamma_6^{(10)}$		660	500	<del>—</del>	<del>—</del>	$\circ$	1,980	<del>—</del>	20,001	30,391,518	51,751.85	178,690.27	230,442.13	0.081
$\Gamma_6^{(11)}$		660	500	<del>—</del>	<del>—</del>	$\circ$	1,980	<del>—</del>	20,001	30,391,518	51,751.85	178,690.27	230,442.13	0.081
$\Gamma_6^{(12)}$		660	500	<del>—</del>	<del>—</del>	$\circ$	1,980	<del>—</del>	20,001	30,391,518	51,751.85	178,690.27	230,442.13	0.081
Total		210,804	182,250	—	—	—	—	—	—	—	—	6,656,076.09	187,172.92	6,843,249.01

Fig. 4에서는 접촉이 발생하는 원공 개수를 조절하면서 FLOPs의 변화를 검토하였다. 접촉이 발생하는 원공이 적은 경우(2~4개) w-v-u와 w-u 계산량이 가장 적은 반면, 원공 개수가 많은 경우(6~10개) v-w-u 계산량이 가장 적어진다.

#### 4. 결론

본 논문에서는 삼차원 접촉 해석의 효율성 향상을 위하여 유한요소 영역/경계 분할법을 적용함으로써, 전체 영역을 자유자재로 분할하고, 부영역, 공유면, 접촉 공유면을 기준으로 각종 수치 연산을 독립적으로 수행할 수 있다. 간단한 수치 예제를 통하여, 해석에 소요되는 계산량이 0.169~18.2%로 감소됨을 확인하였다.

#### 감사의 글

이 논문은 2006년 정부(교육인적자원부)의 재원으로 한국과학기술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구입니다 (KRF-2006-331-D00087).

#### 참고문헌

- 류한열 (2007) 효율적인 접촉 해석을 위한 유한요소 영역/경계 분할법의 제안, 전북대학교 석사학위논문
- Bourel, B., Combescure, A., Valentin, L. D. (2006) Handling Contact in Multi-Domain Simulation of Automobile Crashes, *Finite Element in Analysis and Design*, 42, pp.766-779.
- Shin, E. S., Kim, S. J. (2000) Finite Element Analysis of Pin-load Composite Laminates by Connecting Independently Modeled Subdomains, *Composites B: Eng.*, 31, pp.47-56.