

Mindlin 평판의 불확실거동에 대하여

On the Uncertain Behavior of Mindlin Plates

노혁천* · 김인호†

Noh, Hyuk-Chun · Kim, In-Ho

ABSTRACT

In order to investigate the stochastic behavior of Mindlin plate under imperfection in the material and geometrical parameters, a stochastic finite element formulation is proposed. The effects of inter-correlations between random parameters on the response variability are also observed. The contribution from the random Poisson ratio is taken into account adopting a stochastic decomposition scheme, which expands the constitutive matrix into an infinite series of sub-matrices. In order to demonstrate the adequacy of the proposed scheme, a square plate with simple and fixed support is taken as an example, and the results are compared with those given in previous research in the literature as well as with the results of Monte Carlo analysis.

Keywords: Mindlin plate, uncertainty, stochastic finite element method, random parameter

1. 서론

일반적 구조해석(결정론적 구조해석)에서 가정하는 구조인수들은 실제로는 공간상으로 임의의 확률적 분포를 가지고 변동하는 임의적인 값으로 볼 수 있으며, 이렇게 나타나는 구조인수의 불확실성은 인위적으로 제거할 수 없는 것으로서, 구조재료 및 기하학적 인수의 고유의 특성이라고 할 수 있다. 불확실성을 가지는 구조인수의 확률적 분포는 기존의 데이터에 근거하거나 이론적인 가정을 통하여 특정의 확률분포를 가지는 것으로 모델링된다. 그러나 이러한 수학적 모델 역시 구조인수의 실제적 확률분포에 대한 근사화에 불과하며, 따라서 불확실성을 묘사하는 수학적 모델 자체가 어느 정도의 불확실성을 이미 내포하고 있다고 할 수 있다(JCSS, 2001). 이에 더하여, 구조의 환경적 요인이라고 할 수 있는 경계조건, 작용하중 등에도 불확실성이 나타날 수 있다.

그러나 구조거동에 대한 추계학적 해석에서 이들 모든 불확실성을 고려한 해석을 수행하는 것은 실용적 관점에서 가능하지도, 나아가 필요하지도 않다고 볼 수 있으며, 추계학적 해석의 궁극적 목표가 구조의 안전적 설계에의 기여에 있다는 관점에서, 어느 구조인수를 불확실인수로서 해석에 고려할 것인가를 결정하는 것이 선행적 중요성을 가지고 있다고 할 것이다.

본 연구에서는 구조 자체에 내재되어 있는 가장 기본적인(중요한) 불확실 인수들로 생각할 수 있는 구조재료와 구조기하인수를 불확실인수로 설정하고, 이들 불확실인수에 의한 구조의 추계학적 거동 해석법을 정확성이 높다고 알려진 가중적분법영역(Schuëller, 2001)에서 제안한다. 대상은 Mindlin 평판으로 한정하며, 탄성계수와 포아슨비 그리고 평판의 두께를 불확실인수로 채택한다. 포아슨비의 공간적 불확실성은 Noh(2004)에 의하여 제안된 추계학적 전개방법을 적용하였다.

제안된 해석법의 적용성 검증을 위하여 단순 및 고정지지 정방형 평판에 대한 해석을 수행하고, 그 결과를 기존에 제시되어왔던 결과 및 몬테카를로해석법(MCS)에 의한 결과와 비교하였다.

* 정회원 세종대학교 토목환경공학과 교수 Email: cpebach@sejong.ac.kr

† 학생회원 세종대학교 토목환경공학과 석사과정 Email: kih119@sejong.ac.kr

2. 불확실 인수

불확실인수로 가정한 세 인수인 탄성계수 E , 포아슨비 ν , 그리고 평판의 두께 t 는 각 인수의 공간적 불확실성을 나타내는 추계장함수(stochastic field function) $f(\mathbf{x})$ 를 추가하여 다음과 같이 구조영역내의 위치벡터 \mathbf{x} 의 함수로 나타낼 수 있다.

$$E(\mathbf{x}) = E_o [1 + f_E(\mathbf{x})]; \nu(\mathbf{x}) = \nu_o [1 + f_\nu(\mathbf{x})]; t(\mathbf{x}) = t_o [1 + f_t(\mathbf{x})] \quad (1)$$

아래첨자 'o'는 각 인수에 대한 결정론적 가정치를 나타내며, 각 인수의 추계장함수는 인수에 대한 기호를 아래첨자로 사용하여 나타내었다. 모든 추계장함수는 평균이 0이고 $(-1, 1)$ 의 열린구간에 속하는 값을 가지는 것으로 가정하였다. 식 (1)에서 볼 수 있는 바와 같이, 각 인수의 변동 성분은 결정론적 가정치와 추계장함수의 곱으로 표현된다.

이들 불확실인수는 구조의 강성에 영향을 미치며, 이는 다음의 식으로 표현되는 Mindlin평판의 응력-변형률 행렬에 각 불확실인수를 직접적 대입하여 얻을 수 있다.

$$\mathbf{D}_b = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_s = \kappa Et \begin{bmatrix} 1/2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 1/2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (2)$$

위에서 D 는 평판의 휨강성도(flexural rigidity)이고 $Et^3/12(1-\nu^2)$ 이다. 상수 κ 는 전단보정계수(shear correction factor)이다. 본 연구에서 평판의 두께를 불확실인수로 설정하였으므로 전단보정계수 역시 어느 정도의 변동이 있을 수 있으나, 여기서는 그 영향이 매우 적다고 판단하고 이를 무시하기로 한다.

식 (1)의 불확실 인수들을 식 (2)에 대입하고, 포아슨비에 대한 추계학적 전개방법(Noh, 2004)을 적용하면, 휨과 전단에 대한 응력-변형률 행렬은 각각 다음과 같이 쓰여진다.

$$\mathbf{D}_b = b_o [\mathbf{D}_b^{(0)} + F_b^{(i)} \mathbf{D}_b^{(i)}], \quad \mathbf{D}_s = s_o [\mathbf{D}_s^{(0)} + F_s^{(i)} \mathbf{D}_s^{(i)}] \quad (3)$$

여기서 $b_o = E_o t_o^3 / 12$, $s_o = \kappa E_o t_o$ 이고, $i = 1, 2, \dots, \infty$ 이다. 식 (3)에 나타난 일반화된 추계장함수 $F_b^{(i)}$, $F_s^{(i)}$ 는 식 (4)와 같이 식 (1)에 주어진 추계장함수의 함수로 표현된다. 여기서는 기술의 간편성을 위하여 위치벡터 \mathbf{x} 를 생략하였다.

$$\begin{aligned} F_b^{(0)} &= f_E + F_t + F_{Et}^b; \quad F_t = 3f_t + 3f_t^2 + f_t^3; \quad F_{Et}^b = f_E F_t \\ F_b^{(i)} &= f_\nu^i (1 + F_b^{(0)}) \\ F_s^{(0)} &= F_{Et}^s = f_E + f_t + f_E f_t \\ F_s^{(i)} &= f_\nu^i (1 + F_s^{(0)}) \end{aligned} \quad (4)$$

3. 추계성을 포함하는 요소강성행렬의 구성

포텐셜범함수에 대한 변분을 통하여 구성할 수 있는 요소강성행렬이 다음과 같으므로

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_e &= \int \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b dV + \int \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s dV \\ &= \mathbf{k}_{be} + \mathbf{k}_{se} \end{aligned} \quad (5)$$

식 (3)의 응력-변형률 행렬의 직접적 대입을 통하여 휨과 전단에 대한 추계학적 요소강성행렬 $\mathbf{k}_{be}, \mathbf{k}_{se}$ 를 식 (6)과 같이 구성할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{be} &= \int \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b^{(0)} \mathbf{B}_b dV + \int F_b^{(i)} \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b^{(i)} \mathbf{B}_b dV \\ &= \mathbf{k}_b^o + \Delta \mathbf{k}_b \\ \mathbf{k}_{se} &= \int \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s^{(0)} \mathbf{B}_s dV + \int F_s^{(i)} \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s^{(i)} \mathbf{B}_s dV \\ &= \mathbf{k}_s^o + \Delta \mathbf{k}_s, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \infty \end{aligned} \quad (6)$$

각 강성행렬의 변동부분인 $\Delta \mathbf{k}_b, \Delta \mathbf{k}_s$ 는, 변위-변형률 행렬의 독립다항식에 대한 분해를 통하여, 다음의 식과 같이 추계적분(또는 가중적분)으로 표현되는 확률변수 X 의 함수로 나타낼 수 있다. 따라서 변위벡터 \mathbf{U} 역시 확률변수 X 의 함수가 됨을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{k}_c^{(i)} &= \int F_c^{(i)} \left(\mathbf{B}_{ck}^T p_{ck} \right) \mathbf{D}_c^{(i)} \left(\mathbf{B}_{cl} p_{cl} \right) dV \\ &= \mathbf{B}_{ck}^T \mathbf{D}_c^{(i)} \mathbf{B}_{cl} \int F_c^{(i)} p_{ck} p_{cl} dV \\ &= \left(\mathbf{K}_c^{(i)} \right)_{kl} \left(X_c^{(i)} \right)_{kl}; \quad i = 0, 1, 2, \dots, \infty \end{aligned} \quad (7)$$

4 변위벡터에 대한 Taylor 전개와 1차 및 2차 모멘트 연산

4.1 1차 Taylor 전개

변위벡터가 확률변수의 함수로 주어지므로 다음과 같이 확률변수의 평균을 중심으로 한 Taylor 전개가 가능하다.

$$\mathbf{U} \cong \mathbf{U}(\boldsymbol{\mu}) + \sum_{r=1}^{n_r} \delta X_r \partial \mathbf{U}_r \quad (8)$$

위에서 $\delta X_r = X_r - \bar{X}_r$, $\partial \mathbf{U}_r = \left[\partial \mathbf{U} / \partial X_r \right]_{X_r = \boldsymbol{\mu}}$ 이며, $\boldsymbol{\mu}$ 는 평균확률변수벡터를 나타낸다. n_r 은 확률변수의 전체 수를 의미한다. 확률변수에 대한 변위벡터의 편미분을 평형식에 대한 편미분을 통하여 수정하면 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$\mathbf{U} \cong \mathbf{U}(\boldsymbol{\mu}) - \sum_{k=0}^m \left\{ \sum_{r(k)=1}^{n_r^{(k)}} \delta X_{r(k)} \mathbf{K}_{\boldsymbol{\mu}}^{-1} \partial \mathbf{K}_{r(k)} \mathbf{U}_{\boldsymbol{\mu}} \right\} \quad (9)$$

4.2 변위의 1차 및 2차 모멘트

결정론적 강성행렬에 대하여 구조인수의 불확실성에 의하여 추가된 가감강성행렬에 따른 변위 벡터가 식 (9)와 같이 얻어졌으므로, 이에 대한 평균과 공분산 연산을 통하여 변위의 1차 및 2차 모멘트 산정을 위한 식을 얻을 수 있다.

먼저, 식 (9)에 평균연산을 가할 경우, 평균중심 변화값인 $\delta X_{r(k)}$ 가 0이 되므로, 변위의 평균은 다음과 같이 식 (9)의 첫 항과 같게 됨을 알 수 있다.

$$E[\mathbf{U}] = \bar{\mathbf{U}} = \mathbf{U}(\boldsymbol{\mu}) \quad (10)$$

공분산은 $E[(\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}})(\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}})^T]$ 로 얻어지므로, 식 (9)와 (10)으로부터 얻어진 결과를 통하여 최종적으로 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\mathbf{U}, \mathbf{U}] &= E \left[\left(-\Sigma_{(A)} + \sum_{k=0}^m \bar{\Sigma}_{(k)} \right) \left(-\Sigma_{(A)} + \sum_{k=0}^m \bar{\Sigma}_{(k)} \right)^T \right] \\ &= E \left[\Sigma_{(A)} \Sigma_{(A)}^T \right] - \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^m E \left[\bar{\Sigma}_{(p)} \bar{\Sigma}_{(q)}^T \right] \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, $\Sigma_{(A)}$, $\bar{\Sigma}_{(k)}$ 는 확률변수 X 의 종류에 따라서 구분된 식을 대표한다.

식 (11)의 각 항은 식 (4)에 나타난 일반화된 추계장함수에 대한 평균연산에서 나타나는 자기 및 상호상관함수(auto- and cross-correlation function)를 포함한 적분식으로 나타난다.

5. 예제해석 및 결과 토론

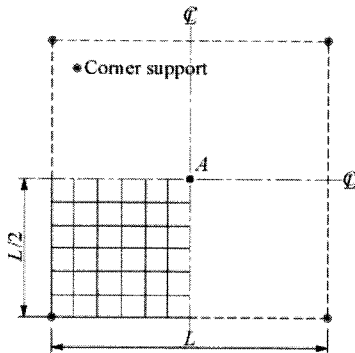


그림 1 예제 평판(단순, 고정지지)

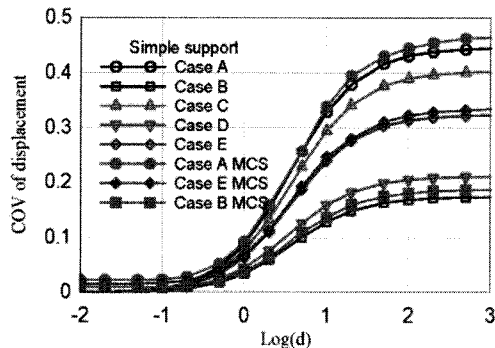


그림 2 상관관계 경우에 따른 분산계수

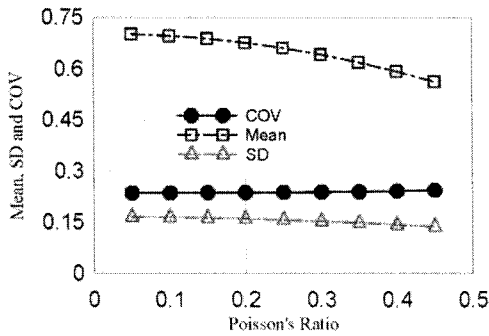


그림 3 포아슨비의 영향 (단순지지)

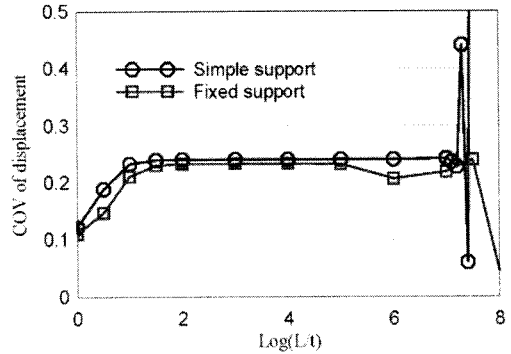


그림 4 평판두께의 결정론적 값에 따른 영향

예제 구조는 $L=20$ 의 정방향 평판이며, 상부에 면 방향으로 향하는 등분포하중이 작용된다. 경계조건은 단순 및 고정지지로 가정하였다. 하중과 구조의 대칭성을 고려하여 1/4 모델을 사용하였고, 총 36(6×6)개의 유한요소로 모델링하였다. 탄성계수, 평판두께 및 포아슨비의 결정론적 값은 각각 10.29×10^3 , 1.0 그리고 0.30이며, 각 인수의 분산계수는 모두 0.1로 가정하였다.

5.1 단일 확률변수에 의한 거동확인

제안된 해석법은 3개의 불확실인수를 동시에 고려함은 물론 이들 사이의 상관관계에 대한 고려가 가능한 것으로서 그 정확성을 알아보기 위하여 기존에 제시된 단일 불확실인수(탄성계수, 포아슨비, 또는 평판두께)에 의한 해석 결과(Graham and Deodatis, 1998; Lawrence, 1987; Noh, 2004)와 비교하였고, 제안된 해석법에 의한 결과는 기존 결과들과 잘 일치하는 것을 관찰하였다. 주목할 만한 것은 평판두께의 불확실성에 따른 평판거동의 응답변화도(COV: coefficient of variation)로서, 본 연구에서 제시한 결과는 기존의 결과(Lawrence, 1987; Choi and Noh 1996)보다 적게 나타났다. 이는 식 (11)에서 식 (4)에 제시된 일반화된 추계장함수가 평균치가 0이 아니기 때문으로, 따라서 평균강성이 증가하고 결과적으로 변위의 공분산은 적은 값으로 산정되었다. 그러나, 각 연구에서 제시된 MCS 해석 결과는 본 연구에서 제시한 결과가 준이론치와 가장 근사한 값을 제공하였다. (지면 문제로 결과는 제시하지 않음)

5.2 세 불확실인수에 의한 평판의 추계학적 거동과 상호 상관관계의 영향

5.2.1 상관관계에 대한 가정

불확실인수 사이의 상관관계가 구조거동에 미치는 영향을 평가하기 위하여 표 1과 같이 5가지의 상관관계 경우를 설정하였고, 각 경우에 대하여 해석을 수행하였다.

표 1. 상관관계의 가정 (완전상관관계를 고려함)

상관관계 계수	상관관계 조건				
	A	B	C	D	E
ρ_{Ev}	+1	+1	-1	-1	0
ρ_{Et}	+1	-1	+1	-1	0
ρ_{vt}	+1	-1	-1	+1	0

5.2.2 가정된 상관관계에 따른 해석 결과

표 1에 제시된 세 개의 불확실인수 사이의 상관관계조건에 따른 응답변화도의 변화는 그림 2와 같다. 탄성계수, 평판두께 및 포아슨비 등 독립적 불확실인수에 의한 평판의 응답변화도는 $\text{Log}(d)=3$ 에서 각각 0.1, 0.3, 그리고 0.02에 근접한 값을 가진다. 그림 2에 제시된 해석 결과는

상관관계에 따라 이들 독립적 불확실인수에 의한 응답변화도가, 근사적으로, 가산되거나 감소되면서 나타나는 것을 알 수 있다. 특기할 사항은 세 인수 사이에 상관관계가 없는 조건-E (표 1 참고)에 해당하는 결과로서, 이 경우 구조의 응답변화도가 증가하는 결과를 보인다는 것이다. 이러한 사실은 어떤 구조계인수를 불확실인수로 단순히 추가하는 것만으로도 그 구조의 응답변화도가 높게 평가된다는 것을 말해주며, 다수의 인수를 해석에 고려해야 하는 필요성을 말해주고 있다. 물론, 인수 사이에 음의 상관관계가 있을 경우에는 응답변화도가 감소하게 되며, 이 경우 불확실성을 고려한 구조의 설계에서 안전도를 낮출 수 있는 근거를 제공해 줄 것이다.

그림 3과 4는 불확실인수의 결정론적 가정치에 따른 영향을 나타낸 것으로서 각각 포아슨비(단순지지)와 평판의 두께에 대한 결과이다. 포아슨비의 경우 결정론적 값이 증가함에 따라 응답변화도 역시 증가하는 경향을 보이며 (고정지지의 경우에도 유사한 거동을 보임), 평판 두께의 경우 전단묵임(shear locking) 현상의 영향을 받는 것을 알 수 있다. 그러나 고정지점을 가지는 평판의 경우 평판두께의 결정론적 값이 두께비 $\log(L/t)=5$ 이후부터 이미 불안정한 값을 보여주고 있다. 그러나 전체적으로 전단묵임 현상이 지배하는 영역 이전 구간에 대하여 안정적인 응답변화도를 제시함을 알 수 있다.

6. 결론

본 연구에서는 Mindlin 평판의 불확실거동을 파악하기 위한 추계론적 유한요소해석을 가중적분법의 관점에서 논하였다. 불확실 인수로는 재료 탄성계수, 포아슨비, 그리고 평판의 두께를 택하였다. 이들 불확실인수는 추계장으로 표현되었고 이들에 대한 평균연산에서 나타나는 자기 또는 상호상관함수를 유도하고 이를 적용하여 응답변화도(COV)를 제시하였다. 평판의 두께가 3차의 변수이고, 포아슨비의 경우 분수형태로 나타내어짐에 따라, 유도된 상관함수는 코딩노력과 계산비용의 관점에서 매우 크기가 큰 함수로 유도되며, 따라서 이를 자동 생성할 수 있는 독립적인 알고리즘을 작성하여 계산에 이용하였다.

기술된 세 개의 구조인수를 불확실인수로 고려함에 따라, 평판에 대한 추계론적 해석에서 가능한 한도의 가장 많은 인수를 고려하게 되었고, 상관관계에 따른 응답변화도의 고찰을 통하여 평판의 추계학적 거동의 파악에서 이들 불확실 인수를 포함하는 것이 중요함을 보여주었다.

참고문헌

- Choi, C.K., Noh, H.C.** (1996). Stochastic finite element analysis of plate structures by weighted integral method. *Structural Engineering and Mechanics*, 4(6), pp.703-715.
- Graham, L., Deodatis, G.** (1998). Variability response functions for stochastic plate bending problems. *Structural Safety*, 20, pp.167-188.
- Joint Committee on Structural Safety (JCSS)** (2001). *Probabilistic assessment of existing structures*. RILEM Publications S.A.R.L. The publishing Company of RILEM.
- Lawrence, M.A.** (1987). Basis random variables in finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24, pp.1849-1863.
- Noh, H.C.** (2004). A formulation for stochastic finite element analysis of plate structures with uncertain Poisson's ratio. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(45-47), pp.4857-4873.
- Noh, H.C.** (2005). Stochastic behavior of Mindlin plate with uncertain geometrical and material parameters. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 20(4), pp.296-306.
- Schuëller, G.I.** (2001). Computational stochastic mechanics – recent advances. *Computers and Structures*, 79, pp.2225-2234.