

이동최소제곱 기반 유한요소를 이용한 새로운 다중 스케일 해석

A new global/local analysis using MLS (Moving Least Square)-based finite elements

임재혁* · 임세영**
Lim, Jae Hyuk · Im, Seyoung

ABSTRACT

We present a new global/local analysis with the aid of MLS(Moving Least Square)-based finite elements which can handle an arbitrary number of nodes on every element side. It give a great flexibility in constructing finite element meshes at the specified local regions without remeshing. Compared to other type global/local analysis, it does not require any superimposed mesh or need not solve the equilibrium equation twice as well as shows an excellent accuracy. To demonstrate the performance of proposed scheme, we will show several examples in relation to capturing highly local stress field.

Keywords: *Global/local analysis, Concurrent Multiscale modeling, MLS-based finite elements*

1. 서론

유한요소법을 이용한 재료의 전산 해석기법은 컴퓨터 기술의 발전과 맞물려 구조물의 설계 및 제작 분야에 있어 중요한 역할을 하고 있다. 하지만, “요소”라는 재료 기술의 제약은 때로 큰 단점이 되기도 한다. 예를 들어, 균열 같은 재료의 분리 현상이 나타나는 경우에는 요소 망을 분리 면을 따라 재구성해야 하며, 이는 공학자에게 많은 시간과 노력을 요구한다. 또한 대형구조물을 독립적으로 모델한 후 결합시키는 경우에는 요소사이의 불일치 접합으로 인해 해의 신뢰성이 떨어진다. 이외에도 최근에 다양한 스케일을 물리현상을 동시에 고려해야 하는 멀티스케일 모델링을 위한 방법론(concurrent multiscale modeling)에 있어서도 보다 정확하고 효율적인 새로운 방법론의 대한 연구가 절실하다. 이런 해결을 위해 다양한 전역/국소 유한요소해석법(Global/Local analysis)가 도입되었다. 전역/국소 유한요소방법론에 대해서 살펴보면 두 가지 다른 요소망을 결합시키는 관점에서 라그랑지 승수법 및 벌칙함수를 이용한 이중 모델해석법 (Aminpour et al, 1995), 삼중 모델해석법(Park et al, 2002) 및 무요소법을 이용한 경계면요소법 (Kim, 2002) 등에 관한 몇몇 시도가 있었으나, 그 방법론의 구현이 복잡할 뿐만 아니라, 심지어 수렴성의 증명을 위한 패치시험이 통과하지 않는 단점이 있다. 이외에도 국소지역에 조밀한 요소망을 포개어 분해능을 증가시키거나 (Fish and Wagiman, 1993, Wagner and Liu 2003), 성긴 요소망을 가지고 해석하여 얻은 해를 보간법을 이용해서 재생한 후 조

* 정회원 · 한국과학기술원 기계공학과 박사후연구원 Email: ljh77@kaist.ac.kr

** 정회원 · 한국과학기술원 기계공학과 교수 Email: sim@kaist.ac.kr

밀한 요소망을 가지고 다시 해석하는 방법론들이 제시되었다. (Cook et al, 2002) 하지만 이러한 방법론은 다른 분해능을 가지는 요소망 사이에 경계조건을 조정해야 하거나, 전체 시스템 행렬을 두 번에 나누어 해석해야 하는 번거로움 등이 있다.

본 연구에서는 이러한 전역/국소 유한요소해석 방법론의 단점을 극복하기 위해 이동최소제공 기반 유한요소를 이용해서 (Lim and Im, 2007, Lim, Im and Cho, 2007, Kim et al 2007) 새로운 해석법을 제시하였으며, 이 방법에서는 경계조건을 보간이나 전체 시스템 행렬을 두 번에 나누어 해석해야 하는 번거로움이 없다. 이 방법론의 효율성을 보여주기 위해 응력집중을 수반하는 구멍이 내재된 부재문제를 해석하도록 하겠다. 2장에서는 이동최소 제공 기반 요소의 실례를 제시하도록 하며, 3장에서는 새로운 전역/국소 해석법(Global/Local analysis)을 위한 방법론에 대해서 설명하도록 하겠다. 4장에서는 수치예제를 통해 성능을 평가하고 5장에서 결론을 내리도록 하겠다.

2. 이차원 및 삼차원 이동 최소 제공 기반 유한요소

이동최소제공 근사 이론 및 이동 최소제공 기반 유한요소 제작과정에 대해서는 참고문헌(Li, S and Liu, W.K., 2004) 및 관련 논문(Lim and Im, 2007, Lim, Im and Cho, 2007)에 잘 나타내 있다. 본 장에서는 그 예인 2차원 선형 (4+n)절점요소, (9+2n)절점 요소, (5+2n)절점요소에 대해 설명하도록 하겠다. 이 모든 요소가 가우스 수치적분으로 패치시험을 만족시키는 요소이다.

2.1 (4+n)절점요소

(4+n)절점 요소는 하나의 선형요소와 여러 개의 선형 요소에 집합이 가능한 요소이며, 기저함수로는 $p = [1, \xi, \eta, \xi\eta]$ 를 택한다. n=3경우를 예로 들면 Fig. 1 와 같다. 4개의 부공간으로 구성되며, 각 부 공간에서 영향력을 가지는 절점은 3, 4와 기타 절점에 의해서 정의된다. 이로 인해 $\overline{3,4}$ 및 $\overline{1,5}$, $\overline{5,6}$, $\overline{6,7}$, $\overline{7,2}$ 절점사이에서 선형 경계를 가진다. 각 부 공간은 2x2 가우스 적분을 통해 수치적분이 된다.

2.2 (9+2n)절점 요소

(9+2n)절점 요소는 하나의 이차 경계에 여러 개의 이차경계의 집합이 가능한 요소로 (4+n)절점 요소와 같이 각 부 공간이 9개의 절점에 의해 근사하며, 기저함수로 9개의 라그랑지 이차다항식을 갖는다. n=1인 경우와 n=4인 경우를 각각 Fig.2(a)~(b)에 나타내었다. n=4인 경우에 대해 설명하면, $\overline{4,7,3}$ 및 $\overline{1,10,11}$, $\overline{11,12,13}$, $\overline{13,5,4}$, $\overline{14,15,16}$, $\overline{16,17,2}$ 에 이차근사를 가진다. 부공간을 3x3요소를 가우스 수치적분이 가능하다.

2.3 A (5+2n)절점 선형-이차 변환 요소

(5+2n)절점 요소의 기저함수는 $p = [1, \xi, \eta, \xi\eta, \xi^2(\eta+1)]$ 이며, $\eta = 1$ 에서 기저는 $[1, \xi, \xi^2]$ 으로 줄어들며, 이차함수가 재생이 된다. 이와 같은 이유로 $\eta = -1$ 에서는 기저는 $[1, \xi]$ 이며, 일차함수가 재생이 된다. n=2인 경우에 요소의 부 공간에 영향력을 가지는 절점을 Fig.3(b)에 나타내었다. 수치적분을 위해서는 각각의 부 공간을 3x2수치적분을 실행하였다. 실제로 Fig.3(a)의 경우는 잘 알려진 선형-이차 변환요소(Hughes,1987)와 같아지며, 이는 선형요소와 이차요소를 집합하는데 유용하다. 하

지만 본 논문에서는 이것의 일반화 된 형태인 $(5+2n)$ 절점요소를 제시 하였으며, 하나의 선형 요소와 임의의 수의 이차요소의 집합도 가능하다.

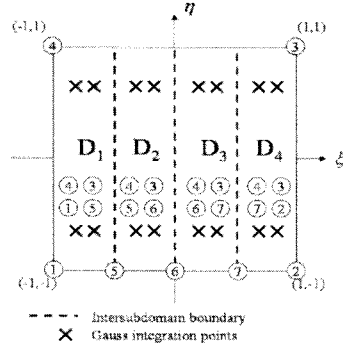


Fig. 1 A $(4+n)$ -noded MLS-based element with linear interpolation on the boundary for $n=3$

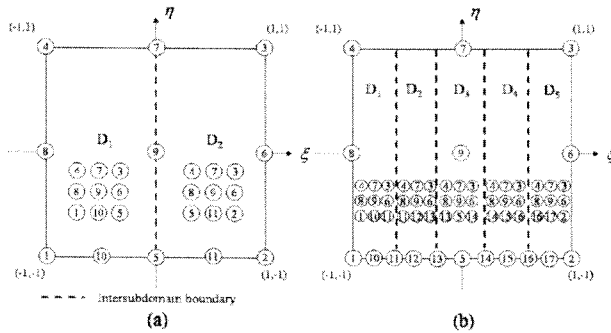


Fig. 2 A $(9+2n)$ -noded MLS-based element with quadratic interpolation on the boundary:
(a) $n=1$, (b) $n=4$

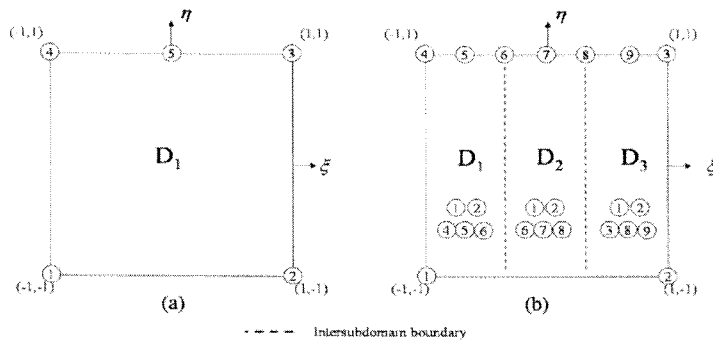


Fig. 3 A $(5+2n)$ -noded MLS-based linear-quadratic transition element: (a) $n=0$, (b) $n=2$

3. 이동최소제곱 기반 유한요소를 이용한 전역/국소 유한요소해석

본 장에서는 이동 최소제곱기반 유한요소를 이용한 전역/국소 유한요소해석에 관해 자세히 설명하도록 하겠다. Fig. 4의 왼쪽의 그림처럼 독립적으로 모델링된 Ω_1 및 Ω_2 와 같은 유한요소망을 생각하도록 하자. 두 개의 요소망은 각각 독립적으로 모델링 되었으므로 요소망의 경계에서 요소망의 불일치가 생기게 된다. 이 문제의 해결을 위해 Fig. 4의 오른쪽 그림처럼 Ω_1 요소와 Ω_2 요소 중에서 불일치된 절점과 만나는 요소에 한해 상응하는 위치에 절점을 추가하여 요소망의 절점의 수를 증가시킨다. 이 때 서로의 같은 위치에 생성된 절점에 한해서 서로 공유할 수 있게 한다면 경계에서 요소망의 불일치 문제는 일치요소망 문제로 변화하게 된다. 이 때 절점의 공유로 인해 절점수가 증가된 요소에 한해서 일반화된 변환요소인 이동최소제곱 기반 유한요소를 사용하면 이러한 불일치 요소망 문제를 쉽게 일치 요소망 문제로 변환이 되며, 기존의 전역/국소해석처럼 경계절점의 자유도의 선형보간을 하거나, 시스템의 행렬을 두 번 해석할 필요가 없는 요소망의 결합이 가능하다.

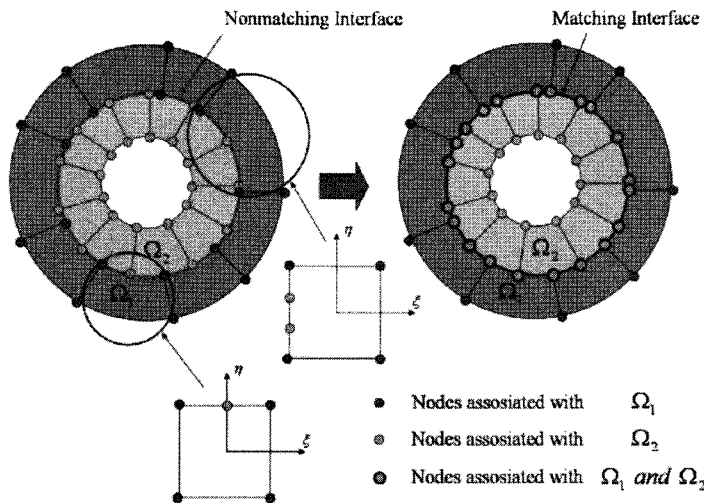


Fig.4 Matching mesh transformation from nonmatching mesh problem using MLS-based finite elements

4. 수치예제

이장에서는 3장에서 제시한 본방법론의 효율성의 검증을 위해서 구멍이 내재된 단순 인장을 받고 있는 무한 판에 응력해석을 실시하였다. 이에 관한 정확해는 참고문헌(Timoshenko and Goodie, 1970)에 잘 나타나 있다. 부재의 재료상수는 탄성계수 10^5Pa , 포와송비 0.3이다. 하중은 $\sigma_{xx}=1.0$ 을 가하였다. 구멍의 집중된 응력을 계산하기 위해서 2차래 Ω_2 에 한하여 순차적으로 분할

하였으며, 이 수치 결과를 Fig. 5(a)~(d) 및 Table 1에 나타내었다. 수치결과에서 볼 수 있듯이 333개의 절점으로 구성된 적은 수의 요소망으로 825개의 절점으로 구성된 참조해에 0.05%미만에 오차로 일치하는 정확한 해를 얻을 수 있었으며, 이는 본 방법론의 효율성을 입증하는 좋은 예이다.

5. 결론

본 연구에서는 이동최소제곱기반 유한요소 (MLS-based finite elements)를 이용해서 응력집중 부위를 모델링하는 새로운 전역/국소(Global/Local) 해석 방법을 제시하였으며, 이 방법의 정확도를 수치예제를 통해서 입증하였다. 더 자세한 것은 관련 논문 (Lim and Im 2007, Lim et al 2007)에 자세히 나타나 있다. 이외에도 이를 이용한 복합재의 해석, 접촉 및 영역분할 알고리즘 등에 관한 다양한 연구가 진행 중에 있다.

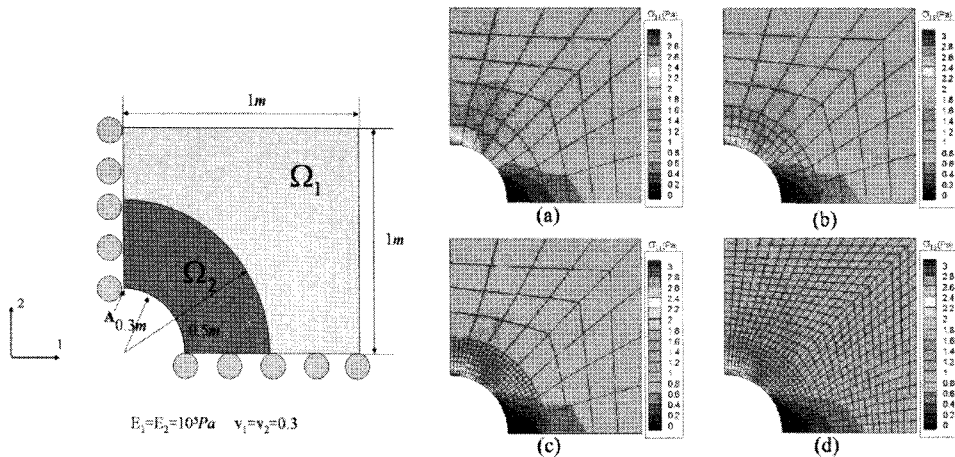


Fig. 5 Numerical modeling and its results of hole problems under simple tension
 (a) coarse mesh (63nodes) (b) 1st adaptation mesh (121 nodes) (c) 2nd adaptation mesh (333 nodes) (d) 2nd reference mesh (825 nodes)

Table 1 Comparison of Maximum σ_{11} stress and Relative error energy norm between adaptation meshes and reference meshes

Total Number of nodes	Maximum σ_{11} stress at the nearest gauss point 'A'	Relative error energy norm in the Ω_2
63 nodes (coarse mesh)	2.663	0.152
121 nodes (1st adaptation mesh)	2.862	8.35×10^{-2}
211 nodes (1st reference mesh)	2.875	8.33×10^{-2}
333 nodes (2nd adaptation mesh)	2.935	4.53×10^{-2}
825 nodes (2nd reference mesh)	2.953	4.46×10^{-2}

감사의 글

본 연구는 과학기술부가 주관하는 21세기 프론티어연구개발사업의 일환인 나노메카트로닉스기술개발사업단의 연구비 지원(M102KN010010-06K1401-01010)에 의해 수행되었습니다.

참고문헌

- Aminpour, M.A., Ransom, J.B., McCleary, S.L.** (1995) A coupled analysis method for structures with independently modeled finite element sub-domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38, pp.3695~3718.
- Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E., Witt R.J.** (2002) *Concepts and applications of finite element analysis*, John Wiley and Sons Inc, New York.
- Fish, J., Wagiman, A.** (1993) Multiscale finite element method for a locally non-periodic heterogeneous medium, *Computational Mechanics*, 12 pp. 164~180.
- Gregory, J. W., Liu, W. K.** (2003) Coupling of atomistic and continuum simulations using a bridging scale decomposition, *Journal of Computational Physics* 190 pp. 249~274.
- Hughes, T.J.R.** (1987) *The finite element method : linear static and dynamic finite element analysis*. Prentice-Hall, New York.
- Kim, H.G.** (2002) Interface Element Method (IEM) for a partitioned system with non-matching interfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, pp. 3165~3194.
- Li, S., Liu, W.K.** (2004) *Meshfree Particle Methods*, Springer, New York.
- Liu, G.R., Gu, Y.T., Dai, K.Y.** (2004) Assessment and applications of point interpolation methods for computational mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59, pp. 1373~1397.
- Lim, J.H., Im, S.** (2007) (4+n)-noded MLS (Moving Least Square)-based finite elements for mesh gradation. *Structural Engineering and Mechanics*, 25, pp. 91~106.
- Lim, J.H., Im, S., Cho Y.S.** (2007) MLS (Moving Least Square)-based finite elements for three-dimensional non-matching meshes and adaptive mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196, pp. 2216~2228.
- Lim, J.H., Im, S., Cho Y.S.** (2007) Variable-node elements for nonmatching meshes by means of MLS (Moving Least Square) scheme, *International Journal Numerical Methods in Engineering*, In press.
- Park, K.C., Felippa, C.A., Rebel, G.** (2002) A simple algorithm for localized construction of non-matching structural interfaces. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53, pp.2117~2142.
- Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N.** (1970), *Theory of Elasticity(3rd edn)*. McGraw-Hill, New York.